16. Vari modi di convergenza delle successioni di funzioni reali misurabili.

L'argomento centrale di questa ultima parte del corso è lo studio in generale della convergenza delle successioni negli spazi $\mathcal{L}^p(\mu)$. Tale convergenza, che viene anche detta comunemente "convergenza in media di ordine p", ha un ruolo molto importante non solo nell'ambito dell'Analisi ma anche in vari capitoli di altri settori della Matematica.

Anche se le conoscenze sinora acquisite non consentono allo studente di apprezzare appieno tale importanza, egli può tuttavia incominciare a rendersene conto attraverso la considerazione che, nel caso particolare $p = 1$, la convergenza in media di una sucessione di funzioni $\{f_n\}$ ad una funzione f è una proprietà collegata con un'altra notevole prerogativa della successione stessa: la validità del passaggio al limite sotto il segno di integrale. Infatti, se c'è convergenza in media, si ha la relazione

$$\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f| \, d\mu \ = \ 0 \tag{16.0.1}$$

e da questa, supponendo, ad esempio, che la successione $\{f_n\}$ converga puntualmente in Ω alla funzione f, per le proprietà dell'integrale segue facilmente l'uguaglianza

$$\int \Big(\lim_{n\to\infty} f_n \Big) \, d\mu \ = \ \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu \quad , \tag{16.0.2}$$

dunque per la successione $\{f_n\}$ è lecito il passaggio al limite sotto il segno di integrale (cfr. la Definizione 16.2.3).

Rinviando al successivo n. 16.2 per ulteriori considerazioni sul legame tra convergenza in media e passaggio al limite sotto il segno di integrale, facciamo notare che l'implicazione

$$(16.0.1) \implies (16.0.2) \quad ,$$

sopra evidenziata per le successioni di funzioni $\{f_n\}$ convergenti puntualmente verso f in Ω, era già stata usata nel corso di Analisi 2 per dimostrare che, nel caso dell'integrale di Riemann per le funzioni continue in un intervallo chiuso e limitato di $\mathbb{R}$, una condizione sufficiente per la validità del passaggio al limite sotto il segno di integrale è la convergenza uniforme della successione $\{f_n\}$.

Il teorema di Analisi 2 appena ricordato ci fornisce l'occasione per un'altra importante considerazione. Poiché l'integrale rispetto ad una misura μ non distingue tra loro due funzioni uguali μ-quasi-ovunque, si capisce facilmente come, passando dall'ambito dell'integrale di Riemann a quello, più generale, dell'integrazione in uno spazio di misura astratto, la convergenza puntuale e quella uniforme non siano gli strumenti più appropriati per lo studio del passaggio al limite sotto il segno di integrale (e quindi della convergenza in media), ma occorra fare ricorso ad altri tipi di convergenza.

In questo capitolo vengono introdotti e studiati alcuni altri modi di convergenza per le successioni di funzioni reali misurabili (convergenza quasi-ovunque, convergenza quasi-uniforme e convergenza in misura), utili allo scopo sopra indicato ma anche in altri contesti, e vengono messi in relazione tra loro e con la convergenza in media di ordine p.

Altri due importanti argomenti trattati nel corso del capitolo sono il teorema della "convergenza dominata" di Lebesgue, che fornisce una notevole condizione sufficiente per la convergenza in media di ordine p, e la completezza degli spazi L^p.

Una caratterizzazione completa della convergenza in media di ordine p (teorema di Vitali) verrà data nel successivo Capitolo 18.

Introduciamo adesso alcune notazioni che verranno frequentemente adoperate nel seguito.

Notazioni. (*Convergenza puntuale e convergenza uniforme*). Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni reali definite in un insieme Ω e sia f una funzione reale su Ω.

Per indicare che la successione $\{f_n\}$ converge puntualmente a f in un insieme $A \subseteq \Omega$ adopereremo la notazione

$$f_n \;\to\; f \;\text{ in } A \quad ,$$

mentre per indicare che $\{f_n\}$ converge uniformemente a f in A scriveremo

$$f_n \;\rightrightarrows\; f \;\text{ in } A \quad .$$

Notazione. (*Lo spazio vettoriale $M(\mathcal{A})$*). Dato uno spazio misurabile $(\Omega, \mathcal{A})$, indichiamo con $M(\mathcal{A})$ l'insieme delle funzioni f, definite in Ω ed a valori in $\mathbb{R}$, che sono $\mathcal{A}$-misurabili.

Ovviamente $M(\mathcal{A})$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di addizione e moltiplicazione per gli scalari.

16.1. Il lemma di Fatou ed alcune sue conseguenze.

Il risultato che segue, importante di per sè ma soprattutto per le sue implicazioni, si può annoverare nella famiglia dei teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale, anche se, a rigore, tale affermazione non è del tutto corretta; in questo teorema, infatti, la tesi è espressa da una disuguaglianza e non da un'uguaglianza ed il ruolo del limite è preso dal minimo limite.

Teorema 16.1.1. (Lemma di Fatou). *Dato lo spazio di misura $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, supponiamo che $\{f_n\}$ sia una successione di funzioni numeriche su Ω, $\mathcal{A}$-misurabili e non negative.*

Vale allora la seguente disuguaglianza:

$$\int \left(\lim_{n\to\infty}{}' f_n \right) d\mu \;\le\; \lim_{n\to\infty}{}' \int f_n \, d\mu \quad . \tag{16.1.1}$$

Dimostrazione. Osserviamo preliminarmente che, essendo i termini della sucessione $\{f_n\}$ funzioni $\mathcal{A}$-misurabili e non negative, anche il $\lim'_{n\to\infty} f_n$ è una funzione $\mathcal{A}$-misurabile e non negativa, dunque l'integrale $\int \left(\lim'_{n\to\infty} f_n\right) d\mu$ ha significato.

Ricordiamo che si ha

$$\lim_{n\to\infty}{}' f_n \;=\; \sup_{n\in\mathbb{N}} g_n \quad ,$$

essendo

$$g_n \;=\; \inf\left\{f_n,\; f_{n+1},\; f_{n+2},\; \dots\right\} \qquad \forall n \in \mathbb{N}\ .$$

Osserviamo inoltre che la successione $\{g_n\}$ di funzioni numeriche su Ω, così definita, è una succesione di funzioni $\mathcal{A}$-misurabili e non negative, tali che

$$g_n \;\leq\; g_{n+1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}\ ;$$

è quindi lecito applicare a tale successione il teorema di Beppo Levi. Si ha pertanto

$$(16.1.2) \qquad \int \Big(\lim_{n\to\infty}{}' f_n\Big)\, d\mu \;=\; \int \Big(\sup_{n\in\mathbb{N}} g_n\Big)\, d\mu \;=\; \sup_{n\in\mathbb{N}} \int g_n\, d\mu\ .$$

D'altra parte, per ogni $n \in \mathbb{N}$, essendo

$$g_n \;\leq\; f_k \qquad \forall k \geq n$$

e quindi

$$\int g_n\, d\mu \;\leq\; \int f_k\, d\mu \qquad \forall k \geq n\ ,$$

risulta

$$\int g_n\, d\mu \;\leq\; \inf\left\{\ \int f_n\, d\mu\,,\ \int f_{n+1}\, d\mu\,,\ \int f_{n+2}\, d\mu\ ,\ \dots\right\} \;\stackrel{\text{def.}}{=}\; G_n\quad .$$

Se ne deduce che è

$$(16.1.3) \qquad \sup_{n\in\mathbb{N}} \int g_n\, d\mu \;\leq\; \sup_{n\in\mathbb{N}} G_n \;=\; \lim_{n\to\infty}{}' \int f_n\, d\mu\quad .$$

Dalle (16.1.2) e (16.1.3) segue, ovviamente, la tesi.

Una prima conseguenza del lemma di Fatou è data dalla successiva Proposizione 16.1.1; si tratta di una proprietà di cui godono tutte le misure e che si esprime sotto forma di disuguaglianza. Premettiamo un lemma che mette in relazione l'indicatore del minimo (o massimo) limite di una successione di insiemi con il minimo (o massimo) limite della successione dei corrispondenti indicatori.

Lemma 16.1.1. *Sia Ω un insieme non vuoto. Per ogni successione $\{A_n\}$ di sottoinsiemi di Ω risulta*

$$\mathbb{1}_{\lim\limits_{n\to\infty}{}' A_n} = \lim_{n\to\infty}{}' \mathbb{1}_{A_n} \quad , \tag{16.1.4}$$

$$\mathbb{1}_{\lim\limits_{n\to\infty}{}'' A_n} = \lim_{n\to\infty}{}'' \mathbb{1}_{A_n} \quad . \tag{16.1.5}$$

Dimostrazione. Proviamo la (16.1.4) (in maniera analoga si ragiona per la (16.1.5)). Fissato il punto $\omega \in \Omega$, vi sono due possibilità:

— $\omega \in \lim\limits_{n\to\infty}{}' A_n$;

in questo caso l'indicatore che figura al primo membro è uguale a uno:

$$\mathbb{1}_{\lim\limits_{n\to\infty}{}' A_n}(\omega) = 1 \quad ;$$

si ha inoltre, per n sufficientemente grande, $\omega \in A_n$, cioè $\mathbb{1}_{A_n}(\omega) = 1$; di conseguenza si ha pure

$$\lim_{n\to\infty}{}' \mathbb{1}_{A_n}(\omega) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{1}_{A_n}(\omega) = 1 \quad ;$$

— $\omega \notin \lim\limits_{n\to\infty}{}' A_n$;

in questo caso è

$$\mathbb{1}_{\lim\limits_{n\to\infty}{}' A_n}(\omega) = 0 \quad ;$$

inoltre vi sono infiniti valori dell'indice $n \in \mathbb{N}$ per cui è $\omega \notin A_n$, cioè $\mathbb{1}_{A_n}(\omega) = 0$; pertanto, dato che i rimanenti termini della successione $\{\mathbb{1}_{A_n}(\omega)\}$ sono uguali a 1, si ha pure

$$\lim_{n\to\infty}{}' \mathbb{1}_{A_n}(\omega) = 0 \quad .$$

Proposizione 16.1.1. *Sia $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura.*

Per ogni successione $\{A_n\}$ di insiemi appartenenti alla σ-algebra $\mathcal{A}$ risulta

$$\mu\big(\lim_{n\to\infty}{}' A_n\big) \le \lim_{n\to\infty}{}' \mu(A_n) \quad . \tag{16.1.6}$$

Dimostrazione. Basta applicare il lemma di Fatou alla successione $\left\{\mathbb{1}_{A_n}\right\}$ e tenere presente la (16.1.4).

Se la misura μ è finita, oltre alla (16.1.6) vale anche un'altra disuguaglianza, che si deduce dalla stessa (16.1.6) considerando la successione $\{A_n^{\mathrm{c}}\}$ degli insiemi complementari e che, unitamente alla (16.1.6), consente poi di provare che tutte le misure con segno hanno la proprietà di continuità (Definizione 16.1.1 e Teorema 16.1.1). Precisamente, si ha la seguente

Proposizione 16.1.2. *Sia $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura con $\mu(\Omega) < +\infty$.*
Per ogni successione $\{A_n\}$ di insiemi appartenenti alla σ-algebra $\mathcal{A}$ risulta

$$\lim_{n\to\infty}{}''\mu(A_n) \ \leq\ \mu\big(\lim_{n\to\infty}{}''A_n\big) \quad . \tag{16.1.7}$$

Per dimostrare la Proposizione 16.1.2 ci occorrono due semplici lemmi riguardanti i sottoinsiemi di $\overline{\mathbb{R}}$ e le successioni in $\overline{\mathbb{R}}$.

Lemma 16.1.2. *Dati $X \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ e $c \in \mathbb{R}$, sia Y il sottoinsieme di $\overline{\mathbb{R}}$ definito nel seguente modo:*

$$Y \ =\ \{c - x \,:\, x \in X\} \quad .$$

Risulta

$$\sup Y \ =\ c - \inf X \quad , \quad \inf Y \ =\ c - \sup X \quad . \tag{16.1.8}$$

Dimostrazione. Per ogni elemento $x \in X$ si ha $x \geq \inf X$, cioè $-x \leq -\inf X$, e quindi $c - x \leq c - \inf X$; dall'ultima disuguaglianza, per l'arbitrarietà di $x \in X$, si deduce che è $\sup Y \leq c - \inf X$. Proviamo che vale anche la disuguaglianza contraria. Per ogni $x \in X$, per la definizione di Y, si ha $c - x \leq \sup Y$, cioè $-c + x \geq -\sup Y$, da cui $x \geq c - \sup Y$; pertanto, per l'arbitrarietà di x, risulta $\inf X \geq c - \sup Y$, vale a dire $c - \inf X \leq \sup Y$. Abbiamo così dimostrato che vale la prima delle (16.1.8). Analogamente si prova la seconda.

Lemma 16.1.3. *Siano $\{x_n\}$ una successione di elementi di $\overline{\mathbb{R}}$ e c un elemento di $\mathbb{R}$. Risulta*

$$\lim_{n\to\infty}{}'(c - x_n) \ =\ c - \lim_{n\to\infty}{}''x_n \quad , \tag{16.1.9}$$

$$\lim_{n\to\infty}{}''(c - x_n) \ =\ c - \lim_{n\to\infty}{}'x_n \quad . \tag{16.1.10}$$

Dimostrazione. Proviamo la (16.1.9). Applicando due volte il lemma precedente, si ha

$$\lim_{n\to\infty}{}'(c - x_n) \ =\ \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n}(c - x_k) \ =\ \sup_{n\in\mathbb{N}} \big(c - \sup_{k\geq n} x_k\big) \ =$$

$$=\ c - \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} x_k \ =\ c - \lim_{n\to\infty}{}''x_n \quad .$$

Analogamente si prova la (16.1.10).

Dimostrazione della Proposizione 16.1.1. Poiché

$$\lim_{n\to\infty}{}''A_n \;=\; \Big(\Big(\lim_{n\to\infty}{}''A_n\Big)^{\mathrm{c}}\Big)^{\mathrm{c}} \;=\; \Big(\lim_{n\to\infty}{}'A_n^{\mathrm{c}}\Big)^{\mathrm{c}} \quad ,$$

per la proprietà di sottrattività di μ, la (16.1.6) e la (16.1.9) si ha

$$\mu(\lim_{n\to\infty}{}''A_n) \;=\; \mu(\Omega) \;-\; \mu(\lim_{n\to\infty}{}'A_n^{\mathrm{c}}) \;\geq\; \mu(\Omega) \;-\; \lim_{n\to\infty}{}'\mu(A_n^{\mathrm{c}}) \;=$$

$$= \mu(\Omega) \;-\; \lim_{n\to\infty}{}'\Big[\mu(\Omega) - \mu(A_n)\Big] \;=\; \mu(\Omega) \;-\; \Big[\mu(\Omega) - \lim_{n\to\infty}{}''\mu(A_n)\Big] \;=\; \lim_{n\to\infty}{}''\mu(A_n) \quad .$$

Definizione 16.1.1. (*Proprietà di continuità di una misura con segno*). Sia φ una misura con segno sulla σ-algebra $\mathcal{A}$.

Si dice che φ ha la *proprietà di continuità* se è soddisfatta la seguente condizione:

γ) per ogni successione $\{A_n\}$ di insiemi appartenenti alla σ-algebra $\mathcal{A}$, convergente e tale che $\varphi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \in \mathbb{R}$, risulta

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(A_n) \;=\; \varphi(\lim_{n\to\infty} A_n) \quad , \tag{16.1.11}$$

cioè anche la successione $\{\varphi(A_n)\}$ è convergente in $\mathbb{R}$ ([1]) ed ha come limite il numero

$$\varphi(\lim_{n\to\infty} A_n) \quad .$$

Teorema 16.1.2. *Ogni misura con segno ha la proprietà di continuità.*

Dimostrazione. Poiché ogni misura con segno è uguale alla differenza di due misure (Lemma 11.3.1), è sufficiente esaminare il caso in cui la misura con segno che si considera sia una misura μ.

Supponiamo in un primo momento che la misura μ sia finita. Dalle Proposizioni 16.1.1 e 16.1.2 segue che, per ogni successione $\{A_n\}$ di insiemi appartenenti alla σ-algebra $\mathcal{A}$, su cui è definita la misura μ, vale la catena di disuguaglianze

$$\mu\,(\lim_{n\to\infty}{}'A_n) \;\leq\; \lim_{n\to\infty}{}'\mu(A_n) \leq \lim_{n\to\infty}{}''\mu(A_n) \;\leq\; \mu\,(\lim_{n\to\infty}{}''A_n) \quad ; \tag{16.1.12}$$

pertanto, se la successione di insiemi $\{A_n\}$ è convergente all'insieme A, cioè risulta

$$\lim_{n\to\infty}{}'A_n \;=\; \lim_{n\to\infty}{}''A_n \;=\; A \quad ,$$

([1]) L'ipotesi $\varphi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \in \mathbb{R}$ implica che le quantità $\varphi(A_n)$, $n \in \mathbb{N}$, e $\varphi(\lim_{n\to\infty} A_n)$ sono tutte numeri reali.

allora si ha pure

$$\lim_{n\to\infty}{}' \mu(A_n) \;=\; \lim_{n\to\infty}{}'' \mu(A_n) \;=\; \mu(A) \quad ,$$

dunque è verificata la relazione

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \;=\; \mu(\lim_{n\to\infty} A_n) \quad . \tag{16.1.13}$$

Per rimuovere l'ipotesi che la misura μ sia finita basta ragionare nel modo seguente. Data una qualunque successione $\{A_n\}$ di insiemi appartenenti ad $\mathcal{A}$, convergente e tale che $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) < +\infty$, consideriamo la misura finita μ_1, restrizione di μ alla σ-algebra traccia $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cap \mathcal{A}$. Si ha allora, per quanto già dimostrato,

$$\lim_{n\to\infty} \mu_1(A_n) \;=\; \mu_1(\lim_{n\to\infty} A_n) \quad ,$$

e quindi, anche in questo caso, vale la (16.1.13).

Osservazione 16.1.1. Osserviamo che la proprietà di continuità verso il basso (definita nell'enunciato del Teorema 11.3.3, f)) è una conseguenza della proprietà di continuità.

Esempio 16.1.1. Nello spazio di misura $(\mathbb{R}, \mathcal{L}_1, \mathrm{m}_1)$ consideriamo la successione di insiemi misurabili

$$\{A_n\} \;=\; \{[n-1, n[\,\} \quad .$$

Poichè gli intervalli $[n-1, n[\,$, $n \in \mathbb{N}$, sono a due a due disgiunti, si ha

$$\lim_{n\to\infty} A_n \;=\; \emptyset$$

e quindi

$$\mathrm{m}_1(\lim_{n\to\infty} A_n) \;=\; 0 \quad ;$$

d'altra parte, essendo $\mathrm{m}_1(A_n) = 1 \;\; \forall n \in \mathbb{N}$, si ha pure

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{m}_1(A_n) \;=\; 1 \quad .$$

L'esempio mostra che in generale, data una misura con segno φ sulla σ-algebra $\mathcal{A}$, non è detto che sia soddisfatta la seguente condizione $\overline{\gamma}$), più forte della γ) ([2]):

$\overline{\gamma}$) per ogni successione convergente $\{A_n\}$ di insiemi appartenenti alla σ-algebra $\mathcal{A}$ risulta

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(A_n) \;=\; \varphi(\lim_{n\to\infty} A_n) \quad ,$$

cioè la successione $\{\varphi(A_n)\}$ è convergente in $\overline{\mathbb{R}}$ verso l'elemento

$$\varphi(\lim_{n\to\infty} A_n) \quad .$$

([2]) Un altro esempio che fa vedere ciò è quello considerato nell'Osservazione 5.3.4.

Definizione 16.1.2. (*Proprietà di $\overline{\mathbb{R}}$-continuità di una misura con segno*). Nel seguito, per esprimere il fatto che una misura con segno ha la proprietà $\overline{\gamma}$), diremo che φ ha la *proprietà di $\overline{\mathbb{R}}$-continuità.*

Ovviamente, per una misura con segno finita φ le due condizioni γ) e $\overline{\gamma}$) sono equivalenti, dunque il Teorema 16.1.2 ammette il seguente corollario.

Corollario 16.1.1. *Ogni misura con segno finita ha la proprietà di $\overline{\mathbb{R}}$-continuità.*

Esercizio 16.1.1. Provare che per una qualunque misura μ, definita su una σ-algebra$\mathcal{A}$, le seguenti tre affermazioni sono equivalenti:

– la misura μ ha la proprietà di $\overline{\mathbb{R}}$-continuità;

– la misura μ ha la proprietà di $\overline{\mathbb{R}}$-*continuità verso il basso,* cioè è soddisfatta la condizione seguente:

$\overline{\beta}$) per ogni successione $\{B_n\}$ di insiemi appartenenti alla σ-algebra $\mathcal{A}$, tale che $B_n \downarrow B$, risulta

$$\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) \;=\; \mu(B) \quad ;$$

– per ogni successione $\{A_n\}$ di insiemi appartenenti alla σ-algebra $\mathcal{A}$ è verificata la (16.1.7).

Esercizio 16.1.2. Trovare uno spazio di misura $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, con $\mu(\Omega) = +\infty$, tale che la misura μ abbia la proprietà di $\overline{\mathbb{R}}$-continuità.

Il precedente Esempio 16.1.1 serve anche a mostrare, considerando la successione di funzioni $\{f_n\} = \{\mathbb{1}_{A_n}\}$, un caso in cui la disuguaglianza (16.1.1), che esprime la tesi del Lemma di Fatou, è verificata con il segno $<$ (ovviamente, per avere un caso in cui la (16.1.1) è soddisfatta con il segno $=$, basta considerare una successione di funzioni costante).

Considerando, invece, la successione di funzioni $\{f_n\} = \{-\mathbb{1}_{A_n}\}$, lo stesso esempio fa vedere che nel Lemma di Fatou l'ipotesi che le funzioni f_n siano non negative non può essere eliminata del tutto.

Si ha però la seguente generalizzazione del Lemma di Fatou, la cui dimostrazione è riportata nell'appendice al paragrafo.

Teorema 16.1.1$'$. (Generalizzazione del Lemma di Fatou). *Dato lo spazio di misura $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, supponiamo che $\{f_n\}$ sia una successione di funzioni numeriche $\mathcal{A}$-misurabili su Ω. Supponiamo inoltre che esista una funzione numerica g, definita in Ω, μ-quasi-integrabile inferiormente e tale da aversi, in tutto Ω,*

$$f_n \;\geq\; g \qquad \forall n \in \mathbb{N} \;. \tag{16.1.14}$$

Vale allora la disuguaglianza (16.1.1).

(Il fatto che nelle ipotesi del Teorema 16.1.1$'$ tutti gli integrali che figurano nella (16.1.1) abbiano significato è spiegato nell'appendice.)

Una notevole conseguenza del Teorema 16.1.1$'$ è il seguente corollario, noto anche come "Teorema di Lebesgue generalizzato".

Corollario 16.1.2. *Dato lo spazio di misura $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, supponiamo che $\{f_n\}$ sia una successione di funzioni numeriche $\mathcal{A}$-misurabili su Ω. Supponiamo inoltre che esista una funzione numerica g, definita in Ω, μ-integrabile e tale da aversi, in tutto Ω,*

$$|f_n| \le g \qquad \forall n \in \mathbb{N} \ . \tag{16.1.15}$$

Vale allora la catena di disuguaglianze:

$$\int \Big(\lim_{n\to\infty}{}' f_n \Big) \, d\mu \ \le \ \lim_{n\to\infty}{}' \int f_n \, d\mu \ \le \ \lim_{n\to\infty}{}'' \int f_n \, d\mu \ \le \ \int \Big(\lim_{n\to\infty}{}'' f_n \Big) \, d\mu \quad .$$

Dimostrazione. Osserviamo preliminarmente che dall'ipotesi (16.1.15), cioè

$$-g \ \le \ f_n \ \le \ g \qquad \forall n \in \mathbb{N} \ ,$$

segue che è pure (in tutto Ω)

$$-g \ \le \ \lim_{n\to\infty}{}' f_n \ \le \ \lim_{n\to\infty}{}'' f_n \ \le \ g \quad ,$$

pertanto, oltre alle f_n, $n \in \mathbb{N}$, anche le funzioni

$$\lim_{n\to\infty}{}' f_n \quad , \quad \lim_{n\to\infty}{}'' f_n$$

sono μ-integrabili.

Proviamo la catena di disuguaglianze. La disuguaglianza centrale è ovvia. Quella di sinistra segue subito dal Teorema 16.1.1$'$ dal momento che è

$$f_n \ \ge \ -g \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

e la funzione $-g$ è μ-integrabile. Analogamente, essendo

$$-f_n \ \ge \ g \qquad \forall n \in \mathbb{N} \ ,$$

sempre per il Teorema 16.1.1$'$ si ha

$$\int \Big(\lim_{n\to\infty}{}' (-f_n) \Big) \, d\mu \ \le \ \lim_{n\to\infty}{}' \int (-f_n) \, d\mu \ ,$$

cioè, per la (16.1.9) e le proprietà dell'integrale,

$$- \int \Big(\lim_{n\to\infty}{}'' f_n \Big) \, d\mu \ \le \ - \lim_{n\to\infty}{}'' \int f_n \, d\mu \ ,$$

dunque è verificata anche la disuguaglianza di destra.

Appendice al n. 16.1.

Prima di procedere alla dimostrazione del Teorema 16.1.1$'$ osserviamo che, nelle ipotesi di tale teorema, tutti gli integrali che figurano nella (16.1.1) hanno significato. Infatti dalle disuguaglianze (16.1.14) segue che è pure

$$\lim_{n\to\infty}{}' f_n \;\geq\; g \quad ;$$

pertanto tutte le funzioni f_n, $n \in \mathbb{N}$, e

$$\lim_{n\to\infty}{}' f_n$$

sono μ-quasi-integrabili inferiormente in virtù della seguente proposizione.

Proposizione 16.1.3. *Dato lo spazio di misura* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$*, supponiamo che* $f, g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ *siano due funzioni numeriche* $\mathcal{A}$*-misurabili, verificanti in tutto* Ω *la disuguaglianza* $f \geq g$*.*

Se g *è* μ*-quasi-integrabile inferiormente, anche* f *è* μ*-quasi-integrabile inferiormente e risulta*

$$\int f\,d\mu \;\geq\; \int g\,d\mu \quad . \tag{16.1.16}$$

Analogamente, se f *è* μ*-quasi-integrabile superiormente, anche* g *è* μ*-quasi-integrabile superiormente e vale ancora la* (16.1.16)*.*

Dimostrazione. Supponiamo che g sia μ-quasi-integrabile inferiormente (in maniera del tutto analoga si ragiona se f è μ-quasi-integrabile superiormente).

La disuguaglianza $f \geq g$ implica che è pure

$$\min\{f, 0\} \;\geq\; \min\{g, 0\}$$

e quindi

$$f^- \;\leq\; g^- \quad ;$$

pertanto si ha

$$\int f^-\,d\mu \;\leq \int g^-\,d\mu \;<\; +\infty \quad , \tag{16.1.17}$$

dunque anche f è μ-quasi-integrabile inferiormente.

Analogamente, sempre dalla disuguaglianza $f \geq g$, si ottiene

$$\int f^+\,d\mu \;\geq \int g^+\,d\mu \quad ;$$

pertanto, per ottenere la (16.1.16), basta sommare membro a membro la precedente disuguaglianza e quella che si ricava dalla (16.1.17) moltiplicando entrambi i membri per -1.

Per la dimostrazione del Teorema 16.1.1$'$ ci occorrono un'ulteriore proprietà degli integrali delle funzioni μ-quasi-integrabili ed una delle successioni in $\overline{\mathbb{R}}$.

Proposizione 16.1.4. *Dato lo spazio di misura* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, *supponiamo che* $f, g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ *siano due funzioni* μ*-quasi-integrabili inferiormente* [risp. *superiormente*].

Allora la funzione $f + g$ *è definita* μ*-quasi-ovunque in* Ω, *è* μ*-quasi-integrabile inferiormente* [risp. *superiormente*] *e risulta*

$$\int (f+g)\, d\mu \;=\; \int f\, d\mu \;+\; \int g\, d\mu \quad . \tag{16.1.18}$$

Dimostrazione. Supponiamo, per fissare le idee, che le funzioni f e g siano μ-quasi-integrabili inferiormente (in maniera del tutto analoga si ragiona nel caso in cui le due funzioni siano μ-quasi-integrabili superiormente).

Proviamo dapprima che $f + g$ è definita μ-quasi-ovunque in Ω.

La funzione $f + g$ ha come insieme di definizione l'insieme

$$D \;=\; \Omega \setminus M \;,$$

essendo

$$M \;=\; \Big(\{f = +\infty\} \cap \{g = -\infty\}\Big) \cup \Big(\{f = -\infty\} \cap \{g = +\infty\}\Big) \;.$$

L'insieme M appartiene alla σ-algebra $\mathcal{A}$ dato che le funzioni f e g sono $\mathcal{A}$-misurabili e si ha, ovviamente,

$$M \subseteq \{f = -\infty\} \;\cup\; \{g = -\infty\} \quad .$$

Osserviamo che risulta

$$\{f = -\infty\} \;=\; \{f^- = +\infty\} \quad , \quad \{g = -\infty\} \;=\; \{g^- = +\infty\}$$

e inoltre, essendo per ipotesi

$$\int f^-\, d\mu \;<\; +\infty \quad , \quad \int g^-\, d\mu \;<\; +\infty \quad ,$$

per il Teorema 13.8.2 si ha

$$f^- \;<\; +\infty \quad , \quad g^- \;<\; +\infty \qquad\qquad \mu\text{-q.o. in } \Omega \;,$$

cioè

$$\mu\big(\{f^- = +\infty\}\big) \;=\; 0 \quad , \quad \mu\big(\{g^- = +\infty\}\big) \;=\; 0 \quad .$$

Ne segue che è

$$\mu(M) \;=\; 0 \;\;,$$

dunque $f + g$ è definita μ-quasi-ovunque in Ω.

La funzione $f + g$ è $\mathcal{A}$-misurabile; infatti la funzione somma

$$h \;=\; f\, \mathbb{1}_D \;+\; g\, \mathbb{1}_D$$

è definita in tutto Ω, è $\mathcal{A}$-misurabile (Teorema 12.3.1) ed è un prolungamento di $f + g$.

Dimostriamo adesso che $f + g$ è μ-quasi-integrabile inferiormente e vale la (16.1.18).

Supponiamo in un primo momento che la funzione $f+g$ sia definita in tutto Ω. Si ha allora, in tutto Ω,

$$(f+g)^- \ \leq \ f^- + g^- \qquad (^3)$$

e quindi, per le proprietà dell'integrale delle funzioni $\mathcal{A}$-misurabili e non negative,

$$\int (f^- + g^-)\, d\mu \ = \ \int f^-\, d\mu \ + \ \int g^-\, d\mu \ < \ +\infty \ ,$$

dunque anche $f+g$ è μ-quasi-integrabile inferiormente. Inoltre, in tutto Ω, essendo

$$(f+g)^+ - (f+g)^- \ = \ f + g \ = \ f^+ - f^- + g^+ - g^- \ ,$$

si ha pure

$$(f+g)^+ + f^- + g^- \ = \ (f+g)^- + f^+ + g^+ \qquad (^4) \ ,$$

da cui, grazie al Teorema 13.3.1, si ricava che è

$$\int (f^+ + g^+)\, d\mu \ + \ \int f^-\, d\mu \ + \ \int g^-\, d\mu \ = \ \int (f^- + g^-)\, d\mu \ + \ \int f^+\, d\mu \ + \ \int g^+\, d\mu$$

e quindi, tenendo presente che gli integrali delle parti negative sono finiti,

$$\int (f^+ + g^+)\, d\mu \ - \ \int (f^- + g^-)\, d\mu \ = \ \int f^+\, d\mu \ - \ \int f^-\, d\mu \ + \ \int g^+\, d\mu \ - \ \int g^-\, d\mu \ ,$$

cioè vale la (16.1.18).

Infine, per rimuovere l'ipotesi che l'insieme di definizione D della funzione $f+g$ sia uguale a tutto Ω, basta considerare le due funzioni $f\,\mathbb{1}_D$, $g\,\mathbb{1}_D$ e ragionare come per il Teorema 13.9.1.

Esercizio 16.1.3. Provare che le Proposizioni 16.1.3 e 16.1.4 continuano a valere anche quando le funzioni f e g sono definite μ-quasi-ovunque in Ω.

Dalle Proposizioni 16.1.3 e 16.1.4, tenuto conto del Teorema 13.7.2 (formula (13.7.5)), discende, in modo ovvio, il seguente corollario.

---

(3) Infatti, fissato $\omega \in \Omega$, si hanno i seguenti due casi:

— $(f+g)(\omega) \ \geq \ 0$; in questo caso risulta

$$(f+g)^-(\omega) \ = \ 0 \ \leq \ (f^- + g^-)(\omega) \ ;$$

— $(f+g)(\omega) \ < \ 0$; in questo secondo caso si ha

$$(f+g)^-(\omega) \ = \ -f(\omega) - g(\omega) \ \leq \ f^-(\omega) + g^-(\omega) \ = \ (f^- + g^-)(\omega) \ .$$

(4) Per dimostrare ciò, fissato il punto $\omega \in \Omega$, conviene distinguere i tre casi: $(f+g)(\omega) \in \mathbb{R}$, $(f+g)(\omega) = +\infty$ e $(f+g)(\omega) = -\infty$.

Corollario 16.1.2. *Dato lo spazio di misura $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, supponiamo che la funzione $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ sia μ-quasi-integrabile e la funzione $g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ sia μ-integrabile.*

Risulta allora

$$\int (f - g)\, d\mu \quad = \quad \int f\, d\mu \ - \ \int g\, d\mu \quad .$$

Le dimostrazioni dei seguenti due lemmi sono del tutto analoghe a quelle dei Lemmi 16.1.2 e 16.1.3 e sono lasciate per esercizio al lettore.

Lemma 16.1.4. *Dati $X \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ e $c \in \mathbb{R}$, sia Z il sottoinsieme di $\overline{\mathbb{R}}$ definito nel seguente modo:*

$$Z \ = \ \{c + x \ : \ x \in X\} \quad .$$

Risulta

$$\sup Z \ = \ c + \sup X \quad , \quad \inf Z \ = \ c + \inf X \quad .$$

Lemma 16.1.5. *Siano $\{x_n\}$ una successione di elementi di $\overline{\mathbb{R}}$ e c un elemento di $\mathbb{R}$. Risulta*

$$\lim_{n\to\infty}{}'(c + x_n) \ = \ c + \lim_{n\to\infty}{}' x_n \quad ,$$

$$\lim_{n\to\infty}{}''(c + x_n) \ = \ c + \lim_{n\to\infty}{}'' x_n \quad .$$

Dimostrazione del Teorema 16.1.1$'$. Distinguiamo i due casi $\int g\, d\mu = +\infty$ e $\int g\, d\mu \in \mathbb{R}$.

Nel primo caso, per la Proposizione 16.1.3, si ha

$$\int f_n\, d\mu \ = \ +\infty \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad \int \big(\lim_{n\to\infty}{}' f_n\big)\, d\mu \ = \ +\infty \quad ,$$

dunque la (16.1.1) è verificata con il segno $=$.

Nel secondo caso, posto

$$A \ = \ \{|g| < +\infty\} \quad ,$$

risulta (Teorema 13.8.2)

$$\mu(A^{c}) \ = \ 0 \quad ;$$

inoltre, considerata la successione di funzioni (definite in tutto Ω, $\mathcal{A}$-misurabili e non negative)

$$\big\{f_n \mathbb{1}_A \ - \ g\, \mathbb{1}_A\big\} \quad ,$$

per il Lemma di Fatou si ha

$$\int \Big(\lim_{n\to\infty}{}' \big(f_n \mathbb{1}_A \ - \ g\, \mathbb{1}_A\big)\Big)\, d\mu \ \le \ \lim_{n\to\infty}{}' \int \big(f_n \mathbb{1}_A \ - \ g\, \mathbb{1}_A\big)\, d\mu \quad .$$

D'altra parte si ha pure

$$\int \Big(\lim_{n\to\infty}{}' \big(f_n \mathbb{1}_A \; - \; g\,\mathbb{1}_A \big) \Big)\, d\mu \quad =$$

(per il Lemma 16.1.5)

$$= \quad \int \Big(\big(\lim_{n\to\infty}{}' f_n \mathbb{1}_A \big) \; - \; g\,\mathbb{1}_A \Big)\, d\mu \quad =$$

(per il Corollario 16.1.2)

$$= \quad \int \big(\lim_{n\to\infty}{}' f_n \mathbb{1}_A \big)\, d\mu \quad - \quad \int g\,\mathbb{1}_A \, d\mu \quad =$$

(dato che $\mu(A^{\mathrm{c}}) \, = \, 0$)

$$= \quad \int \big(\lim_{n\to\infty}{}' f_n \big)\, d\mu \quad - \quad \int g\, d\mu \quad ;$$

inoltre

$$\lim_{n\to\infty}{}' \int \big(f_n \mathbb{1}_A \; - \; g\,\mathbb{1}_A \big)\, d\mu \quad =$$

(per il Corollario 16.1.2)

$$= \quad \lim_{n\to\infty}{}' \Big[\int f_n \mathbb{1}_A \, d\mu \; - \; \int g\,\mathbb{1}_A \, d\mu \Big] \quad =$$

(per il Lemma 16.1.5)

$$= \quad \lim_{n\to\infty}{}' \int f_n \mathbb{1}_A \, d\mu \; - \; \int g\,\mathbb{1}_A \, d\mu \quad =$$

(dato che $\mu(A^{\mathrm{c}}) \, = \, 0$)

$$= \quad \lim_{n\to\infty}{}' \int f_n \, d\mu \; - \; \int g\, d\mu \quad .$$

Ne segue che è

$$\int \big(\lim_{n\to\infty}{}' f_n \big)\, d\mu \quad - \quad \int g\, d\mu \quad \leq \quad \lim_{n\to\infty}{}' \int f_n \, d\mu \; - \; \int g\, d\mu$$

e quindi vale la (16.1.1).

16.2. Convergenza quasi-ovunque, convergenza in media e passaggio al limite sotto il segno di integrale.

Definizione 16.2.1. (*Convergenza quasi-ovunque*). Dato lo spazio di misura $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni appartenenti a $M(\mathcal{A})$ e sia f una funzione elemento di $M(\mathcal{A})$.

Si dice che la successione $\{f_n\}$ *converge μ-quasi-ovunque verso la funzione f* se esiste un insieme $A \in \mathcal{A}$, con $\mu(A^c) = 0$, tale che $\{f_n\}$ converga puntualmente a f nell'insieme A:

$$f_n \;\to\; f \;\;\text{in } A \;\;,$$

cioè

$$\lim_{n\to\infty} f_n(\omega) \;=\; f(\omega) \qquad \forall \omega \in A \;. \tag{16.2.1}$$

Per indicare che la successione $\{f_n\}$ converge μ-quasi-ovunque verso la funzione f adoperiamo la notazione

$$f_n \;\to\; f \quad \mu\text{-q.o.}$$

Quando lo spazio di misura "ambiente" $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ risulta chiaro dal contesto e non vi è possibilità di confusione, usiamo anche la notazione abbreviata

$$f_n \;\overset{\text{q.o.}}{\to}\; f$$

e diciamo, più semplicemente, che "la successione $\{f_n\}$ *converge quasi-ovunque verso la funzione f*".

Dalla definizione data risulta evidente che la funzione limite f rispetto alla convergenza μ-quasi-ovunque non è unica (a meno che lo spazio di misura $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ non abbia la proprietà che l'unico insieme di misura nulla sia l'insieme vuoto); infatti, se $g \in M(\mathcal{A})$ è una qualunque funzione tale che $g = f \;\; \mu$-q.o., anche per la funzione g si ha che $f_n \to g$ μ-q.o. D'altra parte è pure vero che nella convergenza μ-quasi-ovunque due funzioni limite della stessa successione $\{f_n\}$ risultano uguali μ-quasi-ovunque e pertanto sono indistinguibili mediante gli integrali, sicché, dal punto di vista dell'integrazione astratta, si può dire che sostanzialmente vi è un'unica funzione limite. In altre parole possiamo affermare che il limite nella convergenza μ-quasi-ovunque non è, in generale, unico come elemento di $M(\mathcal{A})$, però individua un unico elemento dello spazio vettoriale quoziente $M(\mathcal{A})_{/\mathcal{N}}$ (dove $\mathcal{N}$ è lo spazio vettoriale di tutte le funzioni $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$, $\mathcal{A}$-misurabili e tali che $\varphi = 0$ μ-q.o.).

Le considerazioni appena svolte sono riepilogate e precisate nella seguente proposizione.

Proposizione 16.2.1. (Essenziale unicità della funzione limite nella convergenza quasi-ovunque). *Dato lo spazio di misura* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$*, sia* $\{f_n\}$ *una successione di funzioni appartenenti a* $M(\mathcal{A})$ *e siano* $f, g \in M(\mathcal{A})$ *. Supponiamo inoltre che risulti*

$$f_n \;\to\; f \quad \mu-\text{q.o.}$$

Si ha allora la seguente equivalenza

$$f_n \;\to\; g \quad \mu\text{-q.o.} \qquad \Longleftrightarrow \qquad f = g \quad \mu\text{-q.o.}$$

Dimostrazione. Per ipotesi esiste un insieme $A \in \mathcal{A}$, con $\mu(A^c) = 0$, per il quale risulta verificata la (16.2.1).

Proviamo l'implicazione $\Longrightarrow$. Da $f_n \to g$ μ-q.o. segue l'esistenza di un altro insieme $B \in \mathcal{A}$, con $\mu(B^c) = 0$, tale che

$$(16.2.1)' \qquad \lim_{n\to\infty} f_n(\omega) \;=\; g(\omega) \qquad \forall \omega \in B\ .$$

Posto $C = A \cap B$, si ha

$$\mu(C^c) \;=\; \mu(A^c \cup B^c) \;\le\; \mu(A^c) + \mu(B^c) \;=\; 0\ \ ,$$

quindi $\mu(C^c) = 0$, e risulta, per le (16.2.1) e (16.2.1)′ (e per l'unicità del limite in $\mathbb{R}$),

$$f(\omega) \;=\; \lim_{n\to\infty} f_n(\omega) \;=\; g(\omega) \qquad \forall \omega \in C\ ,$$

dunque $f = g$ μ-q.o.

Viceversa, proviamo la $\Longleftarrow$. Poiché $f = g$ μ-q.o., esiste $D \in \mathcal{A}$, con $\mu(D^c) = 0$, tale che

$$(16.2.2) \qquad f(\omega) \;=\; g(\omega) \qquad \forall \omega \in D\ .$$

Posto $B = A \cap D$, si ha, come in precedenza, $\mu(B^c) = 0$ e risulta, per le (16.2.1) e (16.2.2),

$$\lim_{n\to\infty} f_n(\omega) \;=\; f(\omega) \;=\; g(\omega) \qquad \forall \omega \in B\ ,$$

dunque è vero che $f_n \to g$ μ-q.o. Ciò completa la dimostrazione.

Ovviamente, quando nel seguito diremo che una data una successione $\{f_n\}$ di funzioni appartenenti a $M(\mathcal{A})$ *converge* μ*-quasi-ovunque*, senza fare riferimento alla funzione limite, intenderemo dire che esiste una funzione $f \in M(\mathcal{A})$ tale che $f_n \to f$ μ-q.o.

Esercizio 16.2.1. Provare che condizione necessaria e sufficiente affinché una successione $\{f_n\}$ di funzioni appartenenti a $M(\mathcal{A})$ converga μ-quasi-ovunque è che per l'insieme

$$L \;=\; \big\{ \lim_{n\to\infty}{}' f_n = \lim_{n\to\infty}{}'' f_n \big\} \cap \big\{ \lim_{n\to\infty}{}' f_n \in \mathbb{R} \big\}$$

risulti $\mu(L^c) = 0$.

Osservazione 16.2.1. È evidente che la convergenza puntuale in Ω di una successione $\{f_n\}$ di funzioni appartenenti a $M(\mathcal{A})$ verso una funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}$ implica che $f_n \to f$ μ-q.o. (il fatto che anche la funzione f appartenga a $M(\mathcal{A})$ è assicurato dal Corollario 12.3.2). In generale, invece, non vale l'implicazione contraria. È facile trovare un controesempio in tal senso in ogni spazio di misura $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ nel quale vi siano insiemi di misura nulla non vuoti; infatti, se E è uno qualsiasi di tali insiemi, la successione di funzioni

$$\{f_n\} \;=\; \{(-1)^n \mathbb{1}_E\}$$

converge μ-quasi ovunque verso la funzione identicamente nulla, ma non converge puntualmente in Ω.

Definizione 16.2.2. (*Convergenza in media*). Dato lo spazio di misura $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni appartenenti a $M(\mathcal{A})$ e sia $f \in M(\mathcal{A})$. Sia dato, inoltre, un esponente $p \in]0, +\infty[$.

Si dice che la successione $\{f_n\}$ *converge in media di ordine* p *verso la funzione* f se sono soddisfatte le seguenti condizioni:

i) $f_n \in \mathcal{L}^p(\mu) \quad \forall n \in \mathbb{N}$;

ii) $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$;

iii) $\lim_{n\to\infty} f_n \;=\; f$ nello spazio semimetrico $(\mathcal{L}^p(\mu), d_p)$, cioè, equivalentemente,

$$\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f|^p \, d\mu \;=\; 0 \quad .$$

Per indicare che la successione $\{f_n\}$ converge converge in media di ordine p verso la funzione f scriviamo

$$f_n \;\to\; f \quad \text{in } \mathcal{L}^p(\mu)$$

o, più semplicemente, quando non vi è possibilità di equivoco circa lo spazio di misura sottostante,

$$f_n \;\xrightarrow{p}\; f \quad .$$

Anche per la convergenza in media, per quanto concerne l'unicità della funzione limite, si ha una situazione analoga a quella della convergenza quasi-ovunque.

Proposizione 16.2.2. (Essenziale unicità della funzione limite nella convergenza in media.) *Dato lo spazio di misura* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, *sia* $\{f_n\}$ *una successione di funzioni appartenenti a* $M(\mathcal{A})$ *e siano* $f, g \in M(\mathcal{A})$. *Sia, inoltre,* $p \in]0, +\infty[$. *Supponiamo che risulti*

$$f_n \;\to\; f \quad \text{in } \mathcal{L}^p(\mu) \quad .$$

Si ha allora la seguente equivalenza

$$f_n \;\to\; g \quad \text{in } \mathcal{L}^p(\mu) \quad \Longleftrightarrow \quad f = g \quad \mu\text{-q.o.}$$

Dimostrazione. Ricordiamo che in uno spazio semimetrico (S,d), se una successione $\{x_n\}$ converge verso un elemento x, allora la stessa successione converge verso tutti e soli gli elementi $y \in S$ tali che $d(x,y) = 0$ e che, nel caso particolare dello spazio semimetrico $(\mathcal{L}^p(\mu), d_p)$, si ha

$$d_p(f,g) \;=\; 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f = g \quad \mu\text{-q.o.}$$

A questo punto entrambe le implicazioni $\Longrightarrow$ e $\Longleftarrow$ seguono da quanto sopra ricordato: la $\Longrightarrow$ immediatamente e la $\Longleftarrow$ dopo aver osservato che, se è $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$, $g \in M(\mathcal{A})$ e $f = g$ μ-q.o., allora è pure (Teorema 13.8.1) $g \in \mathcal{L}^p(\mu)$.

Anche per la convergenza in media, quando per una una data una successione $\{f_n\}$ di funzioni appartenenti a $M(\mathcal{A})$ diciamo che $\{f_n\}$ *converge in media di ordine p,* senza fare riferimento alla funzione limite, intendiamo dire che esiste una funzione $f \in M(\mathcal{A})$ tale che $f_n \to f$ in $\mathcal{L}^p(\mu)$.

Definizione 16.2.3. (*Passaggio al limite sotto il segno di integrale*). Dato lo spazio di misura $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni appartenenti a $\mathcal{L}^1(\mu)$, convergente μ-quasi-ovunque verso una funzione $f \in M(\mathcal{A})$.

Si dice che per la successione $\{f_n\}$ *è lecito il passaggio al limite sotto il segno di integrale* se sono soddisfatte le seguenti condizioni:

1) $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$;

2) $$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu \;=\; \int f \, d\mu \quad .$$

Osservazione 16.2.2. Con la Definizione 16.2.3 la frase "per la successione $\{f_n\}$ è lecito il passaggio al limite sotto il segno di integrale" acquista un significato tecnico ben preciso, più restrittivo del semplice fatto che sia possibile scambiare tra loro il segno di limite con quello di integrale, cioè valga la (16.0.2); infatti, oltre alla μ-integrabilità delle funzioni f_n, $n \in \mathbb{N}$, alla convergenza μ-quasi ovunque della successione $\{f_n\}$ verso una funzione $f \in M(\mathcal{A})$ ed alla validità della (16.0.2), si richiede che pure la funzione limite f appartenga a $\mathcal{L}^1(\mu)$.

Per comprendere meglio il senso dell'osservazione consideriamo il caso di una successione di funzioni reali verificante le ipotesi del teorema di Beppo Levi; allora, anche se la (16.0.2) è sempre verificata, il passaggio al limite sotto il segno di integrale è lecito se e soltanto se la funzione $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ è μ-integrabile.

Esercizio 16.2.2. Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni appartenenti a $M(\mathcal{A})$ verificante le ipotesi del teorema di Beppo Levi. Provare che per la successione $\{f_n\}$ è lecito il passaggio al limite sotto il segno di integrale se e soltanto se

$$\int \Big(\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n \Big) \, d\mu \;<\; +\infty \quad .$$

Proposizione 16.2.3. (Convergenza in $\mathcal{L}^1(\mu)$ e passaggio al limite sotto il segno di integrale.) *Dato lo spazio di misura $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni appartenenti a $\mathcal{L}^1(\mu)$, convergente μ-quasi-ovunque verso una funzione $f \in M(\mathcal{A})$.*

Condizione sufficiente affinché per la successione $\{f_n\}$ sia lecito il passaggio al limite sotto il segno di integrale è che $\{f_n\}$ converga verso f in $\mathcal{L}^1(\mu)$.

Dimostrazione. Per ipotesi valgono le i), ii) e iii) della Definizione 16.2.2 con $p = 1$; di conseguenza la 1) della Definizione 16.2.3 è ovviamente verificata in quanto coincide con la ii), mentre la 2) segue subito dalla iii) tenendo presente che è (Teorema 13.7.2 e Proposizione 13.7.3)

$$\left| \int f_n \, d\mu \; - \; \int f \, d\mu \right| \;=\; \left| \int (f_n - f) \, d\mu \right| \;\leq\; \int |f_n - f| \, d\mu \qquad \forall n \in \mathbb{N} \; .$$

L'esempio successivo mostra che la precedente condizione sufficiente non è necessaria.

Esempio 16.2.1. Nello spazio di misura $(\mathbb{R}, \mathcal{L}_1, \mathrm{m}_1)$ consideriamo la successione di funzioni $\{f_n\}$ data da

$$f_n \;=\; -n\mathbb{1}_{[-\frac{1}{n},0[} + n\mathbb{1}_{]0,\frac{1}{n}]} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \; .$$

Si tratta di una successione di funzioni appartenenti a $\mathcal{L}^1(\mathrm{m}_1)$, convergente puntualmente in $\mathbb{R}$ (e quindi m_1-q.o.) verso la funzione identicamente nulla. Si ha inoltre

$$\int f_n \, d\mathrm{m}_1 \;=\; 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

e quindi

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mathrm{m}_1 \;=\; \int 0 \, d\mathrm{m}_1 \quad ,$$

dunque è lecito il passaggio al limite sotto il segno di integrale. D'altra parte si ha pure

$$\int |f_n| \, d\mathrm{m}_1 \;=\; 2 \qquad \forall n \in \mathbb{N} \; ,$$

pertanto $\{f_n\}$ non converge in media alla funzione identicamente nulla.

Esercizio 16.2.3. Provare che la successione $\{f_n\}$ considerata nel precedente esempio non converge in $\mathcal{L}^1(\mathrm{m}_1)$ (suggerimento: mostrare che $\{f_n\}$ non è una successione di Cauchy).

Trovare tutti i valori di $p \in]0, +\infty[$ per i quali $\{f_n\}$ converge in $\mathcal{L}^p(\mathrm{m}_1)$.

Per completare il quadro delle relazioni esistenti tra convergenza in $\mathcal{L}^1(\mu)$ e passaggio al limite sotto il segno di integrale, facciamo vedere che per una successione $\{f_n\}$ di funzioni appartenenti a $\mathcal{L}^1(\mu)$, convergente μ-quasi-ovunque verso una funzione $f \in M(\mathcal{A})$, la convergenza in $\mathcal{L}^1(\mu)$ equivale al fatto che per la successione in questione sia lecito il passaggio al limite sotto il segno di integrale su ogni insieme $E \in \mathcal{A}$, in maniera uniforme rispetto a E, cioè si abbia $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ e risulti

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu \; = \; \int_E f \, d\mu$$

uniformemente rispetto a $E \in \mathcal{A}$.

Proposizione 16.2.4. (Caratterizzazione della convergenza in $\mathcal{L}^1(\mu)$ mediante il passaggio al limite sotto il segno di integrale in maniera uniforme rispetto all'insieme di integrazione). *Dato lo spazio di misura $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni appartenenti a $\mathcal{L}^1(\mu)$, convergente μ-quasi-ovunque verso una funzione $f \in M(\mathcal{A})$.*

Condizione necessaria e sufficiente affinché $\{f_n\}$ converga verso f in $\mathcal{L}^1(\mu)$ è che siano veri i seguenti due fatti:

1) $\quad f \in \mathcal{L}^1(\mu)$;

2*) $\quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \overline{n} \in \mathbb{N} \quad : \quad \left| \int_E f_n \, d\mu \; - \; \int_E f \, d\mu \right| \; < \; \varepsilon \qquad \forall n \geq \overline{n} \; , \; \forall E \in \mathcal{A}$.

Dimostrazione. La condizione è necessaria. Per ipotesi si ha che vale la 1) e risulta inoltre

$$\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f| \, d\mu \; = \; 0 \quad ;$$

pertanto, assegnato un qualunque $\varepsilon > 0$, esiste un indice $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\int |f_n - f| \, d\mu \; < \; \varepsilon \qquad\qquad \forall n \geq \overline{n} \; ;$$

di conseguenza, per le proprietà dell'integrale (Teorema 13.7.2 e Proposizione 13.7.3) e la monotonia della misura $|f_n - f|\mu$, per ogni indice $n \geq \overline{n}$ ed ogni insieme $E \in \mathcal{A}$ si ha

$$\left| \int_E f_n \, d\mu \; - \; \int_E f \, d\mu \right| \; = \; \left| \int_E (f_n - f) \, d\mu \right| \; \leq$$

$$\leq \; \int_E |f_n - f| \, d\mu \; \leq \; \int |f_n - f| \, d\mu \; < \; \varepsilon \quad ,$$

dunque vale la 2*).

La condizione è sufficiente. Per ipotesi valgono la 1) e la 2*); occorre provare che è

$$\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f| \, d\mu \;=\; 0 \quad .$$

Poniamo, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$E_n^+ \;=\; \{f_n - f \geq 0\} \qquad , \qquad E_n^- \;=\; \{f_n - f < 0\} \quad .$$

Dalla 2*) segue che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n^* \in \mathbb{N}$ tale che

$$\left| \int_E f_n \, d\mu \;-\; \int_E f \, d\mu \right| \;<\; \tfrac{\varepsilon}{2} \qquad\qquad \forall n \geq n^* \;,\; \forall E \in \mathcal{A} \;;$$

di conseguenza, per ogni $n \geq n^*$, per la finita additività della misura $|f_n - f|\mu$ si ha

$$\int |f_n - f| \, d\mu \;=\; \int_{E_n^+} |f_n - f| \, d\mu + \int_{E_n^-} |f_n - f| \, d\mu \;=$$

$$= \int_{E_n^+} (f_n - f) \, d\mu + \int_{E_n^-} (f - f_n) \;=\; \left| \int_{E_n^+} (f_n - f) \, d\mu \right| + \left| \int_{E_n^-} (f - f_n) \, d\mu \right| \;=$$

$$= \left| \int_{E_n^+} f_n \, d\mu \;-\; \int_{E_n^+} f \, d\mu \right| \;+\; \left| \int_{E_n^-} f \, d\mu \;-\; \int_{E_n^-} f_n \, d\mu \right| \;<\; \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} \;=\; \varepsilon \quad ,$$

dunque vale la 2).

16.3. Il teorema della convergenza dominata.

Il seguente importantissimo teorema, noto come "Teorema di Lebesgue" o "Teorema della convergenza dominata", fornisce una condizione sufficiente per la convergenza in media di ordine p, la quale, oltre ad essere facilmente applicabile, presenta pure degli interessanti risvolti dal punto di vista teorico. L'ipotesi principale, oltre alla convergenza quasi-ovunque, è che tutte le funzioni f_n della successione che si considera siano "dominate", cioè maggiorate, in valore assoluto, da un'unica funzione di classe L^p; ciò spiega l'appellativo di teorema della convergenza dominata.

Teorema 16.3.1. (Teorema di Lebesgue o della "convergenza dominata"). *Dati lo spazio di misura* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *e l'esponente* $p \in]0, +\infty[$, *supponiamo che* $\{f_n\}$ *sia una successione di funzioni appartenenti a* $M(\mathcal{A})$ *avente la proprietà che per* μ*-quasi-ogni* $\omega \in \Omega$ *la successione* $\{f_n(\omega)\}$ *risulti convergente in* $\overline{\mathbb{R}}$. *Supponiamo inoltre che esista una funzione* g *di classe* L^p *tale da aversi, in tutto* Ω,

$$|f_n| \ \leq \ g \qquad \forall n \in \mathbb{N} \ . \tag{16.3.1}$$

Allora la successione $\{f_n\}$ *converge* μ*-quasi-ovunque e, per ogni funzione* $f \in M(\mathcal{A})$ *tale che* $f_n \to f$ μ*-q.o., si ha pure la convergenza in media di ordine* p*:*

$$f_n \ \to \ f \quad \text{in } \mathcal{L}^p(\mu) \ .$$

Dimostrazione. Dire che per μ-quasi-ogni $\omega \in \Omega$ la successione $\{f_n(\omega)\}$ è convergente in $\overline{\mathbb{R}}$ significa dire che esiste un insieme $B \in \mathcal{A}$, con $\mu(B^c) = 0$, tale che

$$\forall \omega \in B \quad \Longrightarrow \quad \text{la successione } \{f_n(\omega)\} \text{ è convergente in } \overline{\mathbb{R}} \qquad (^5) \ . \tag{16.3.2}$$

Inoltre, dato che la funzione g è di classe L^p, considerato l'insieme

$$C \ = \ \{g < +\infty\} \ = \ \{|g|^p < +\infty\} \ \ ,$$

il Teorema 13.8.2 assicura che è $\mu(C^c) = 0$. Posto $A = B \cap C$, si ha $A \in \mathcal{A}$, $\mu(A^c) = 0$ e, per ogni $\omega \in A$, il limite della successione $\{f_n(\omega)\}$ (limite che esiste per la (16.3.2)) è finito, dal momento che

$$|f_n(\omega)| \ \leq \ g(\omega) \ < \ +\infty \qquad \forall n \in \mathbb{N} \ .$$

Allora, considerata la funzione $\mathcal{A}$-misurabile $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$, definita ponendo

$$f \ = \ \Big(\lim_{n\to\infty}{}' f_n\Big) \mathbb{1}_A \ \ ,$$

per quanto precedentemente osservato si ha che la f è a valori reali (6), dunque $f \in M(\mathcal{A})$, e risulta

$$\lim_{n\to\infty} f_n(\omega) \ = \ f(\omega) \qquad \forall \omega \in A \ ,$$

pertanto $f_n \to f$ μ-q.o.

---

(5) Poiché le funzioni f_n, $n \in \mathbb{N}$, sono $\mathcal{A}$-misurabili, ciò equivale a dire che l'insieme

$$\big\{\omega \in \Omega \ : \ \{f_n(\omega)\} \text{ è convergente in } \overline{\mathbb{R}}\,\big\} \ = \ \big\{\lim_{n\to\infty}{}' f_n \ = \ \lim_{n\to\infty}{}'' f_n\,\big\}$$

(che appartiene ad $\mathcal{A}$ per la misurabilità delle f_n) è il complementare di un insieme di misura nulla.

(6) Infatti si ha:

— se $\omega \in A$, allora $f(\omega) = \lim'_{n\to\infty} f_n(\omega) = \lim_{n\to\infty} f_n(\omega) \ \in \mathbb{R}$;

— se $\omega \in A^c$, allora $f(\omega) = 0$.

Una volta acquisita l'esistenza di funzioni $f \in M(\mathcal{A})$ tali che $f_n \to f$ μ-q.o., facciamo vedere che, se f è una qualunque di tali funzioni, si ha pure $f_n \to f$ in $\mathcal{L}^p(\mu)$.

Dall'ipotesi (16.1.1) segue che le funzioni f_n, $n \in \mathbb{N}$, sono (Proposizione 15.1.1) tutte di classe L^p e quindi appartengono a $\mathcal{L}^p(\mu)$. Inoltre, sempre dalla (16.1.1), passando al limite per $n \to \infty$, si ottiene $|f| \leq g$ μ-q.o., quindi anche f appartiene a $\mathcal{L}^p(\mu)$. Proviamo che è

$$\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f|^p \, d\mu \;=\; 0 \quad . \tag{16.3.3}$$

Posto

$$g_n \;=\; |f_n - f|^p \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad , \qquad h \;=\; (g + |f|)^p \quad ,$$

le funzioni g_n, $n \in \mathbb{N}$, e h sono μ-integrabili. Risulta inoltre in tutto Ω, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$g_n \;\leq\; (|f_n| + |f|)^p \;\leq\; (g + |f|)^p \;=\; h$$

e quindi

$$h - g_n \;\geq\; 0$$

(si osservi che la funzione $h - g_n$ è definita in tutto Ω in quanto la g_n è a valori reali), per cui è lecito applicare il lemma di Fatou alla successione $\{h - g_n\}$. In questo modo si ottiene

$$\int \Big(\lim_{n\to\infty}{}' (h - g_n) \Big) \, d\mu \;\leq\; \lim_{n\to\infty}{}' \int (h - g_n) \, d\mu \;\;=$$

(tenendo presente che le funzioni g_n e h sono μ-integrabili)

$$= \;\; \lim_{n\to\infty}{}' \Big(\int h \, d\mu \;-\; \int g_n \, d\mu \Big) \;\;=$$

(per la (16.1.9))

$$= \;\; \int h \, d\,\mu \;-\; \lim_{n\to\infty}{}'' \int g_n \, d\mu \quad .$$

Poiché, grazie all'ipotesi $f_n \to f$ μ-q.o., si ha

$$\lim_{n\to\infty}{}' (h - g_n) \;=\; h \quad \mu\text{-q.o.} \quad ,$$

dalla precedente catena di disuguaglianze si deduce che è

$$\lim_{n\to\infty}{}'' \int g_n \;\leq\; 0 \quad ;$$

d'altra parte, essendo le funzioni g_n non negative, si ha pure

$$\lim_{n\to\infty}{}' \int g_n \;\geq\; 0 \quad ,$$

dunque è

$$\lim_{n\to\infty}\int g_n \;=\; 0 \quad ,$$

cioè vale la (16.3.3).

Il Teorema di Lebesgue ammette, ovviamente, il seguente corollario.

Corollario 16.3.1. *Dato lo spazio di misura $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, supponiamo che $\{f_n\}$ sia una successione di funzioni appartenenti a $M(\mathcal{A})$ convergente μ-q.o. verso una funzione $f \in M(\mathcal{A})$. Sia, inoltre, $p \in]0, +\infty[$.*

Condizione sufficiente affinché la successione $\{f_n\}$ converga verso f in media di ordine p è che esiste una funzione g di classe L^p tale da risultare, in tutto Ω,

$$|f_n| \;\leq\; g \qquad \forall n \in \mathbb{N} \; . \tag{16.3.1}$$

Il successivo esempio mostra che la condizione sufficiente espressa dal Corollario 16.3.1 non è necessaria.

Esempio 16.3.1. Nello spazio di misura $(\mathbb{R}, \mathcal{L}_1, \mathrm{m}_1)$ consideriamo la successione $\{f_n\}$ di funzioni appartenenti a $M(\mathcal{L}_1)$ definita ponendo

$$f_n \;=\; \mathbb{1}_{[H_n, H_{n+1}]} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \; ,$$

essendo H_n, $n \in \mathbb{N}$, la somma parziale n-ma della serie armonica:

$$H_n \;=\; 1 + \ldots + \frac{1}{n} \quad .$$

La successione $\{f_n\}$ converge m_1-q.o. verso la funzione identicamente nulla. Infatti, dato che $\lim_{n\to\infty} H_n = +\infty$, fissato un qualunque $\omega \in \mathbb{R}$ risulta, per n sufficientemente grande, $\omega < H_n$ e quindi $f_n(\omega) = 0$, dunque si ha

$$\lim_{n\to\infty} f_n(\omega) \;=\; 0 \quad .$$

Si ha inoltre

$$\lim_{n\to\infty}\int |f_n|^p \, d\mu \;=\; \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} \;=\; 0 \quad ,$$

e quindi

$$f_n \to 0 \;\text{ in }\; \mathcal{L}^p(\mathrm{m}_1) \; ,$$

qualunque sia l'esponente $p \in]0, +\infty[$.

Non esiste tuttavia alcuna funzione g, di classe L^p, tale che la (16.3.1) sia verificata in tutto $\mathbb{R}$. Infatti, se $g : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ è una qualunque funzione $\mathcal{L}_1$-misurabile tale da aversi, in tutto $\mathbb{R}$,

$$\mathbb{1}_{[H_n, H_{n+1}]} \;\leq\; g \qquad \forall n \in \mathbb{N} \; ,$$

allora si ha pure

$$g \quad \geq \quad \mathbb{1}_{\bigcup_{n=1}^{\infty}[H_n, H_{n+1}]} \quad = \quad \mathbb{1}_{[1,+\infty[} \quad ,$$

quindi

$$\int |g|^p \, d \; mu \quad \geq \quad \int \mathbb{1}^p_{[1,+\infty[} \quad = \quad +\infty \quad .$$

Vedremo più avanti che da una successione convergente in media è sempre possibile estrarne una che verifichi le ipotesi del teorema della convergenza dominata (Proposizione 16.5.1); questo fatto consente di ottenere una caratterizzazione della convergenza in media (Teorema 16.5.1), formulata proprio attraverso le ipotesi del teorema della convergenza dominata (su opportune successioni estratte).

Osservazione 16.3.1. Il Teorema 16.3.1 ed il relativo Corollario 16.3.1 continuano a valere se, invece dell'ipotesi che tutte le disuguaglianze (16.3.1) siano verificate in tutto Ω, si suppone ognuna di esse sia vera μ-q.o., cioè: per ogni $n \in \mathbb{N}$ esista un insieme $A_n \in \mathcal{A}$, con $\mu(A_n^{\mathrm{c}}) = 0$, tale che

$$|f_n(\omega)| \leq g(\omega) \qquad \forall \omega \in A_n \; .$$

Per provare ciò basta considerare l'insieme

$$A \;=\; \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

e applicare i risultati già dimostrati alla successione di funzioni $\left\{f_n \mathbb{1}_A\right\}$, assumendo come funzione "dominante" la $g\mathbb{1}_a$.

Il precedente Esempio 16.3.1 continua a mostrare che la condizione sufficiente del Corollario 16.3.1, anche se così modificato, non è necessaria.

16.4. Completezza degli spazi L^p.

Lemma 16.4.1. *Dato lo spazio di misura $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, supponiamo che $\{f_n\}$ sia una successione di funzioni numeriche definite in Ω, $\mathcal{A}$-misurabili e non negative. Sia, inoltre, $p \in]0, +\infty[$.*

Risulta allora

$$\int \Big(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\Big)^p d\mu \quad \leq \quad \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n^p \, d\mu \qquad \textit{se} \;\; 0 < p < 1 \ , \tag{16.4.1}$$

$$\Big(\int \Big(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\Big)^p d\mu\Big)^{\frac{1}{p}} \quad \leq \quad \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\int f_n^p \, d\mu\Big)^{\frac{1}{p}} \qquad \textit{se} \;\; p \geq 1 \ . \tag{16.4.2}$$

Dimostrazione. Consideriamo la successione di funzioni $\{s_n\}$ ottenuta ponendo

$$s_n \;=\; f_1 + \ldots + f_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

ed osserviamo che risulta

$$s_n \;\uparrow\; \sum_{k=1}^{\infty} f_k$$

e quindi

$$s_n^p \;\uparrow\; \Big(\sum_{k=1}^{\infty} f_k\Big)^p \quad .$$

Supponiamo che sia $0 < p < 1$. Dal Teorema 15.2.3, procedendo per induzione su n, si ricava che è

$$\int s_n^p \, d\mu \quad \leq \quad \sum_{k=1}^{n} \int f_k^p \, d\mu \qquad \forall n \in \mathbb{N} \ .$$

Passando al limite per $n \to \infty$ nella precedente disuguaglianza e usando il teorema di Beppo Levi si ottiene la (16.4.1).

Sia, adesso, $p \geq 1$. Dal Teorema 15.2.2, procedendo per induzione su n, si ottengono le disuguaglianze

$$\Big(\int s_n^p \, d\mu\Big)^{\frac{1}{p}} \quad \leq \quad \sum_{k=1}^{n} \Big(\int f_k^p \, d\mu\Big)^{\frac{1}{p}} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \ ;$$

da queste, passando al limite per $n \to \infty$ e applicando il teorema di Beppo Levi, si ottiene la (16.4.2).

Ricordando la definizione della semimetrica d_p si perviene subito al seguente corollario.

Corollario 16.4.1. *Dati lo spazio di misura* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *e l'esponente* $p \in]0, +\infty[$ *, supponiamo che* $\{g_n\}$ *sia una successione di funzioni appartenenti a* $\mathcal{L}^p(\mu)$ *tale che*

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_p(g_n, 0) \ < \ +\infty \quad .$$

Allora la funzione numerica g *definita ponendo*

$$g \ = \ |g_1| + |g_2| + \ldots + |g_n| + \ldots$$

è di classe L^p*.*

Teorema 16.4.1. (Comportamento delle successioni di Cauchy di $\mathcal{L}^p(\mu)$). *Dati lo spazio di misura* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *e l'esponente* $p \in]0, +\infty[$ *, supponiamo che* $\{f_n\}$ *sia una successione di Cauchy in* $\mathcal{L}^p(\mu)$*.*

Esistono allora una funzione $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ *ed una successione* $\{f_{n_k}\}$*, estratta da* $\{f_n\}$*, tali che*

$$f_n \ \to \ f \quad \text{in} \ \ \mathcal{L}^p(\mu) \quad ,$$

$$f_{n_k} \ \to \ f \quad \mu\text{−q.o.}$$

Dimostrazione. Il fatto che $\{f_n\}$ sia una successione di Cauchy implica che per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste $n_k \in \mathbb{N}$ tale che

$$d_p(f_n, f_m) \ \leq \ 2^{-k} \qquad\qquad \forall n, m \geq n_k \ . \tag{16.4.3}$$

Ovviamente è sempre possibile fare in modo che la successione di indici $\{n_k\}$, che così si ottiene, sia crescente.

Consideriamo la successione estratta $\{f_{n_k}\}$. Grazie alla (16.4.3) si ha, per ogni $k \in \mathbb{N}$,

$$d_p(f_{n_{k+1}} - f_{n_k}, 0) \ = \ d_p(f_{n_{k+1}}, f_{n_k}) \ \leq \ 2^{-k} \quad ;$$

conseguentemente risulta

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_p(f_{n_{k+1}} - f_{n_k}, 0) \ < \ +\infty$$

e pertanto (Corollario 16.4.1) la funzione

$$g \ \stackrel{\text{def.}}{=} \ |f_{n_1}| + |f_{n_2} - f_{n_1}| + |f_{n_3} - f_{n_2}| + \ldots$$

è di classe L^p. Ne segue che μ-quasi-ovunque in Ω si ha $g^p < +\infty$ e quindi $g < +\infty$. Da ciò si deduce che la successione $\{f_{n_k}(\omega)\}$ è convergente in $\mathbb{R}$ (e quindi in $\overline{\mathbb{R}}$) per μ-quasi-ogni $\omega \in \Omega$; essa è infatti la successione delle somme parziali della serie

$$f_{n_1}(\omega) + \big[f_{n_2}(\omega) - f_{n_1}(\omega)\big] + \big[f_{n_3}(\omega) - f_{n_2}(\omega)\big] + \ \ldots \quad ,$$

la quale converge in $\mathbb{R}$ per ogni $\omega \in \{g < +\infty\}$, in quanto per tali ω si ha

$$|f_{n_1}(\omega)| + |f_{n_2}(\omega) - f_{n_1}(\omega)| + |f_{n_3}(\omega) - f_{n_2}(\omega)| + \ \dots \ = \ g(\omega) \ < \ +\infty \quad .$$

Si ha inoltre in tutto Ω, per ogni $k \in \mathbb{N}$,

$$|f_{n_k}| \ = \ \big|f_{n_1} + \big(f_{n_2} - f_{n_1}\big) + \dots \big(f_{n_k} - f_{n_{k-1}}\big)\big| \ \leq$$

$$\leq \ \big|f_{n_1}\big| + \big|f_{n_2} - f_{n_1}\big| + \dots \big|f_{n_k} - f_{n_{k-1}}\big| \ \leq \big|f_{n_1}\big| + \big|f_{n_2} - f_{n_1}\big| + \dots \big|f_{n_k} - f_{n_{k-1}}\big| + \dots \ = \ g \quad ,$$

dunque la successione $\{f_{n_k}\}$ verifica le ipotesi del teorema della convergenza dominata. Esiste pertanto $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ tale che

$$f_{n_k} \ \to \ f \quad \mu\text{–q.o.} \quad ,$$

$$f_{n_k} \ \to \ f \quad \text{in} \ \ \mathcal{L}^p(\mu) \quad .$$

Per completare la dimostrazione facciamo vedere che l'intera successione $\{f_n\}$ converge a f in media di ordine p.

Assegnato un qualunque $\varepsilon > 0$, per ipotesi esiste un indice ν tale che

$$d_p(f_n, f_m) \ \leq \ \frac{\varepsilon}{2} \qquad\qquad \forall n, m \geq \nu \quad .$$

Poiché è

$$\lim_{k\to\infty} d_p(f_{n_k}, f) \ = \ 0 \quad ,$$

è possibile fissare un indice $n_{k^*} \geq \nu$ tale che

$$d_p(f_{n_{k^*}}, f) \ \leq \ \frac{\varepsilon}{2} \quad .$$

Si ha allora, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq \nu$,

$$d_p(f_n, f) \ \leq \ d_p(f_n, f_{n_{k^*}}) \ + \ d_p(f_{n_{k^*}}, f) \ \leq \ \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \ = \ \varepsilon \quad ,$$

dunque risulta

$$\lim_{n\to\infty} d_p(f_n, f) \ = \ 0 \quad ,$$

come dovevamo dimostrare.

Dal precedente teorema segue, ovviamente, il

Teorema 16.4.2. (Completezza degli spazi L^p). *Per ogni spazio di misura $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ed ogni esponente $p \in]0, +\infty[$ lo spazio semimetrico $(\mathcal{L}^p(\mu), d_p)$ è completo. Di conseguenza pure lo spazio metrico $(L^p(\mu), d_p^*)$ è completo. Inoltre, per $p \geq 1$, si ha che lo spazio normato $L^p(\mu)$ (7) è uno spazio di Banach.*

---

(7) con la norma definita nel n. 15.4.

16.5. Relazioni tra convergenza in media e convergenza quasi-ovunque.

Un'altra conseguenza del Teorema 16.4.1 è che da ogni successione $\{f_n\}$, convergente in media di ordine p, se ne può estrarre una, $\{f_{n_k}\}$, verificante le ipotesi del teorema della converegenza dominata e quindi, in particolare, convergente μ-quasi-ovunque.

Proposizione 16.5.1. *Dati lo spazio di misura $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ e l'esponente $p \in]0, +\infty[$, supponiamo che $\{f_n\}$ sia una successione di funzioni appartenenti a $\mathcal{L}^p(\mu)$, convergente in media di ordine p verso una funzione $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$.*

Esiste allora una successione $\{f_{n_k}\}$, estratta da $\{f_n\}$, convergente μ-quasi-ovunque verso f e avente la proprietà che vi è una funzione g, di classe L^p, tale da risultare, in tutto Ω,

$$|f_{n_k}| \leq g \qquad \forall k \in \mathbb{N} . \tag{16.5.1}$$

Dimostrazione. Dall'ipotesi $f_n \xrightarrow{p} f$ segue che $\{f_n\}$ è una successione di Cauchy in $\mathcal{L}^p(\mu)$, pertanto, per il Teorema 16.4.1, esistono una funzione $\widetilde{f} \in \mathcal{L}^p(\mu)$ ed una successione $\{f_{n_k}\}$, estratta da $\{f_n\}$, tali che

$$f_n \to \widetilde{f} \quad \text{in } \mathcal{L}^p(\mu) \quad , \tag{16.5.2}$$

$$f_{n_k} \to \widetilde{f} \quad \mu\text{−q.o.} \; ; \tag{16.5.3}$$

inoltre la dimostrazione del Teorema 16.4.1 implica l'esistenza di g, funzione di classe L^p , per cui valgono le (16.5.1). Dalla (16.5.2), usando la Proposizione 16.2.2, si deduce che è $f = \widetilde{f}$ μ-q.o.; di conseguenza, per la (16.5.3) e la Proposizione 16.2.1, si ha pure

$$f_{n_k} \to f \quad \mu\text{−q.o.}$$

Ciò completa la dimostrazione.

Corollario 16.5.1. *Dati lo spazio di misura $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ e l'esponente $p \in]0, +\infty[$, supponiamo che $\{f_n\}$ sia una successione di funzioni appartenenti a $M(\mathcal{A})$ convergente μ-quasi-ovunque verso una funzione $f \in M(\mathcal{A})$ ed in media di ordine p verso un'altra funzione $h \in M(\mathcal{A})$.*

Risulta allora

$$f = h \quad \mu\text{-q.o.} \tag{16.5.4}$$

e pertanto si ha pure

$$f_n \to f \quad \text{in } \mathcal{L}^p(\mu) \qquad , \qquad f_n \to h \quad \mu\text{-q.o.}$$

Dimostrazione. Per la Proposizione 16.5.1 esiste una successione $\{f_{n_k}\}$, estratta da $\{f_n\}$, tale che
$$f_{n_k} \;\to\; h \quad \mu\text{-q.o.} \;\; ;$$
ovviamente si ha pure
$$f_{n_k} \;\to\; f \quad \mu\text{-q.o.} \;\; ,$$
pertanto, per la Proposizione 16.2.1, risulta verificata la (16.5.4). L'ultima affermazione dell'enunciato è una conseguenza immediata delle Proposizioni 16.2.1 e 16.2.2.

L'esempio seguente fa vedere che, in generale, dalla convergenza in media di ordine p di una successione $\{f_n\}$ non segue la convergenza μ-quasi-ovunque dell'intera successione.

Esempio 16.5.1. Nello spazio di misura
$$\Big([0,1[\,,\ [0,1[\cap\mathcal{L}_1\,,\ \mathrm{m}_{[0,1[} \Big) \;,$$
dove il simbolo $\mathrm{m}_{[0,1[}$ denota la restrizione della misura di Lebesgue m_1 alla σ-algebra traccia $[0,1[\cap\mathcal{L}_1$, consideriamo la seguente successione $\{f_n\}$ di funzioni appartenenti a $M([0,1[\cap\mathcal{L}_1)$:
$$f_1 \;=\; \mathbb{1}_{[0,1[} \quad ,$$
$$f_2 \;=\; \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{2}[} \quad , \quad f_3 \;=\; \mathbb{1}_{[\frac{1}{2},1[}$$
$$f_4 \;=\; \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{4}[} \quad , \quad f_5 \;=\; \mathbb{1}_{[\frac{1}{4},\frac{1}{2}[} \quad , \quad f_6 \;=\; \mathbb{1}_{[\frac{1}{2},\frac{3}{4}[} \quad , \quad f_7 \;=\; \mathbb{1}_{[\frac{3}{4},1[} \quad ,$$
$$\text{ecc. ecc.} \quad ,$$
vale a dire la successione che si ottiene suddividendo via via, per $h = 0,1,2,\ldots$, l'intervallo $[0,1[$ in 2^h intervalli semiaperti a destra, a due a due disgiunti e di uguale ampiezza, e prendendo, di volta in volta, come termini della successione, gli indicatori degli intervalli così ottenuti secondo l'ordine dato dall'ordinamento aritmetico di $\mathbb{R}$. È facile convincersi che l'espressione analitica della legge della successione $\{f_n\}$ è
$$f_n \;=\; \mathbb{1}_{\left[\frac{k(n)}{2^{h(n)}}\,,\,\frac{k(n)+1}{2^{h(n)}}\right[} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \;,$$
dove, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si è indicata con $(h(n), k(n))$ l'unica coppia (h,k) di interi non negativi, con $k < 2^h$, tale che
$$n \;=\; 2^h + k \quad ,$$
cioè la coppia
$$h \;=\; \left[\log_2 n\right] \qquad , \qquad k \;=\; n - h \quad .$$

Fissato un qualunque esponente $p \in]0,+\infty[$, si ha

$$\int |f_n|^p \, d\mu \;=\; \frac{1}{2^{h(n)}} \qquad\qquad \forall n \in \mathbb{N} \;;$$

D'altra parte dalla definizione di $h(n)$ segue che è

$$n \;<\; 2 \cdot 2^{h(n)} \qquad\qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

e quindi

$$\lim_{n\to\infty} 2^{h(n)} \;=\; +\infty \quad ;$$

possiamo allora concludere che la successione $\{f_n\}$ converge in media di ordine p alla funzione identicamente nulla:

$$f_n \xrightarrow{p} 0 \quad .$$

Invece non c'è convergenza quasi-ovunque; infatti, qualunque sia $\omega \in [0,1[$, risulta

(16.5.5) $$\lim_{n\to\infty}{}' f_n(\omega) \;=\; 0 \qquad , \qquad \lim_{n\to\infty}{}'' f_n(\omega) \;=\; 1 \quad .$$

Per provare le (16.5.5) basta osservare che, per ogni $h \in \mathbb{N}$, il punto ω appartiene a uno solo degli intervalli

$$\left[0, \tfrac{1}{2^h}\right[\;,\; \left[\tfrac{1}{2^h}, \tfrac{2}{2^h}\right[\;,\; \dots \;,\; \left[\tfrac{2^h-1}{2^h}, 1\right[\quad ,$$

quindi fra gli indici $n \in \mathbb{N}$ tali che $2^h \leq n < 2^{h+1}$ ve n'è uno solo per cui $f_n(\omega) = 1$, mentre per tutti gli altri si ha $f_n(\omega) = 0$; da questa osservazione seguono, ovviamente, le (16.5.5).

Mostriamo adesso due esempi di successioni convergenti quasi-ovunque che non convergono in media di ordine p per nessun valore dell'esponente $p \in]0,+\infty[$ (anzi le due successioni sono tali che nessuna loro estratta converge in media di ordine p).

Esempio 16.5.2. Nello stesso spazio di misura

$$\Big([0,1[\,,\, [0,1[\cap \mathcal{L}_1 \,,\, \mathrm{m}_{[0,1[} \Big)$$

del precedente Esempio 16.5.1 consideriamo la seguente successione $\{f_n\}$ di funzioni appartenenti a $M([0,1[\cap\mathcal{L}_1)$:

$$\{f_n\} \;=\; \Big\{ 2^n \mathbb{1}_{]0,\frac{1}{n}[} \Big\} \quad .$$

Per ogni $\omega \in [0,1[$ risulta $\omega \notin]0,\frac{1}{n}[$, e quindi $f_n(\omega) = 0$, per n sufficientemente grande; pertanto la successione $\{f_n\}$ converge puntualmente in $[0,1[$, e quindi quasi-ovunque, alla funzione identicamente nulla.

Invece, qualunque sia l'esponente $p \in]0,+\infty[$, non c'è convergenza in media di ordine p. Infatti, se la successione $\{f_n\}$ convergesse in media di ordine p, per il Corollario 16.5.1

essa dovrebbe convergere in media di ordine p alla funzione identicamente nulla, cioè dovrebbe risultare

$$\lim_{n\to\infty} \int |f_n|^p \, d\mu \;=\; 0 \quad ,$$

mentre invece si ha

$$\lim_{n\to\infty} \int |f_n|^p \, d\mu \;=\; \lim_{n\to\infty} \frac{2^{np}}{n} \;=\; +\infty \quad .$$

Per lo stesso motivo nessuna successione estratta dalla $\{f_n\}$ può convergere in media di ordine p.

Esempio 16.5.3. Nello spazio di misura $(\mathbb{R}, \mathcal{L}_1, \mathrm{m}_1)$ la successione $\{f_n\}$ di funzioni appartenenti a $M(\mathcal{L}_1)$, definita ponendo

$$f_n \;=\; \mathbb{1}_{[n-1,n[} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \ ,$$

è tale che

$$\lim_{n\to\infty} f_n(\omega) \;=\; 0 \qquad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

(infatti, fissato un qualunque $\omega \in \mathbb{R}$, per n sufficientemente grande si ha $f_n(\omega) = 0$) e quindi converge m_1-quasi-ovunque verso la funzione identicamente nulla.

Invece, fissato comunque un esponente $p \in]0, +\infty[$, si ha

$$\lim_{n\to\infty} \int |f_n|^p \, d\mu \;=\; \lim_{n\to\infty} 1 \;=\; 1$$

e pertanto né l'intera successione $\{f_n\}$ né alcuna sua estratta convergono in media di ordine p.

Completiamo il paragrafo facendo vedere come sia possibile caratterizzare la convergenza in media mediante la convergenza dominata.

Teorema 16.5.1. (Caratterizzazione della convergenza in media mediante la convergenza dominata). *Dati lo spazio di misura $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ e l'esponente $p \in]0, +\infty[$, sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni appartenenti a $M(\mathcal{A})$ e sia $f \in M(\mathcal{A})$.*

Condizione necessaria e sufficiente affinché la successione $\{f_n\}$ converga in media di ordine p verso la funzione f è che da ogni successione $\{f_{n_k}\}$, estratta da $\{f_n\}$, se ne possa estrarrre una, $\{f_{n_{k_r}}\}$, convergente μ-quasi-ovunque verso f e avente la proprietà che esista una funzione g, di classe L^p, tale da risultare, in tutto Ω,

$$\left| f_{n_{k_r}} \right| \;\le\; g \qquad \forall r \in \mathbb{N} \ . \tag{16.5.6}$$

Dimostrazione. La necessità della condizione segue subito dalla Proposizione 16.5.1, dato che, se $\{f_n\}$ è convergente in media di ordine p verso la funzione f, la stessa cosa è vera per una qualunque sua estratta $\{f_{n_k}\}$.

Proviamo che la condizione è sufficiente. Supponiamo per assurdo che $\{f_n\}$ non converga in media di ordine p verso f, cioè non sia vero che

$$\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f|^p \, d\mu \ = \ 0 \quad .$$

Esistono allora un numero $\varepsilon > 0$ e una successione $\{f_{n_k}\}$, estratta da $\{f_n\}$, tali che

$$\int |f_{n_k} - f|^p \, d\mu \ \geq \ \varepsilon \qquad \forall k \in \mathbb{N} \ . \tag{16.5.7}$$

Ma, per ipotesi, in corrispondenza della successione $\{f_{n_k}\}$ esistono una sua successione estratta, $\{f_{n_{k_r}}\}$, convergente μ-quasi-ovunque verso f, e una funzione g, di classe L^p, per le quali è verificata la (16.5.6). Possiamo allora applicare il teorema di Lebesgue alla successione $\{f_{n_{k_r}}\}$ e concludere che è

$$f_{n_{k_r}} \xrightarrow{p} f \quad ,$$

vale a dire

$$\lim_{r\to\infty} \int \left|f_{n_{k_r}} - f\right|^p d\mu \ = \ 0 \quad ,$$

ma ciò è assurdo in quanto dalla (16.5.7) segue, in particolare, che è

$$\int \left|f_{n_{k_r}} - f\right|^p d\mu \ \geq \ \varepsilon \qquad \forall r \in \mathbb{N} \ .$$

16.6. La convergenza in media al variare dell'esponente di integrabilità.

Dimostriamo come prima cosa che, in conseguenza della disuguaglianza di Hölder, la successione prodotto di due successioni convergenti l'una in media di ordine p e l'altra in media di ordine q, con p, q esponenti coniugati, è una successione convergente in media di ordine 1.

Teorema 16.6.1. *Dati lo spazio di misura $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ e la coppia di esponenenti coniugati p, q, supponiamo che $\{f_n\}$, $\{g_n\}$ siano due successioni di funzioni appartenenti a $M(\mathcal{A})$ e f, g siano due funzioni, elementi di $M(\mathcal{A})$, tali che*

$$f_n \ \to \ f \quad \text{in } \mathcal{L}^p(\mu) \qquad , \qquad g_n \ \to \ g \quad \text{in } \mathcal{L}^q(\mu) \quad .$$

Allora, considerata la successione prodotto $\{f_n g_n\}$, risulta

$$f_n g_n \ \to \ fg \quad \text{in } \mathcal{L}^1(\mu) \quad .$$

Dimostrazione. Dalla disuguaglianza di Hölder segue subito che le funzioni prodotto $f_n g_n$, $n \in \mathbb{N}$, e fg appartengono tutte a $\mathcal{L}^1(\mu)$. Proviamo che si ha pure

$$\lim_{n\to\infty} d_1(f_n g_n\,, fg) \;=\; 0 \;\;.$$

Infatti, sempre per la disuguaglianza di Hölder, per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$d_1(f_n g_n\,, fg) \;=\; \int \big|f_n g_n \,-\, fg\big|\,d\mu \;=\; \int \big|f_n g_n \,-\, f_n g \,+\, f_n g \,-\, fg\big|\,d\mu \;\leq$$

$$\leq\; \int |f_n|\big|g_n \,-\, g\big|\,d\mu \;+\; \int \big|f_n \,-\, f\big||g|\,d\mu \;\leq\; d_p(f_n\,,0)\,d_q(g_n, g) \;+\; d_p(f_n\,,f)\,d_q(g,0)$$

e da ciò segue subito la tesi, tenendo presente che è, per ipotesi,

$$\lim_{n\to\infty} d_p(f_n\,,f) \;=\; 0 \quad , \quad \lim_{n\to\infty} d_q(g_n, g) \;=\; 0$$

e che di conseguenza la successione $\big\{d_p(f_n\,,0)\big\}$ è limitata in $\mathbb{R}$ grazie alla disuguaglianza triangolare

$$d_p(f_n\,,0) \;\leq\; d_p(f_n\,,f) \;+\; d_p(f\,,0) \qquad\qquad \forall n \in \mathbb{N}\;.$$

Grazie al Teorema 16.6.1 possiamo facilmente provare il seguente teorema di permanenza dell'esponente di convergenza in media.

Teorema 16.6.2. *Dato lo spazio di misura $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni appartenenti a $M(\mathcal{A})$ e sia f una funzione elemento di $M(\mathcal{A})$. Supponiamo che si abbia convergenza in media:*

$$f_n \;\to\; f \quad \text{in } \mathcal{L}^{p_1}(\mu) \qquad , \qquad f_n \;\to\; f \quad \text{in } \mathcal{L}^{p_2}(\mu)$$

con due esponenti $p_1, p_2 \in]0, +\infty[\,,\ p_1 < p_2$. Allora si ha pure convergenza in media con un qualunque esponente compreso tra p_1 e p_2 :

$$f_n \;\to\; f \quad \text{in } \mathcal{L}^{r}(\mu) \qquad\quad \forall r \in]p_1, p_2[\quad .$$

Dimostrazione. Dal Corollario 15.2.2 segue che le funzioni f_n, $n \in \mathbb{N}$, e f appartengono tutte a $\mathcal{L}^r(\mu)$. Fatta questa premessa, si ha che la tesi

$$f_n \;\to\; f \quad \text{in } \mathcal{L}^{r}(\mu)$$

equivale a

$$\big|f_n - f\big|^r \;\to\; 0 \quad \text{in } \mathcal{L}^{1}(\mu) \;\;.$$

Per provare ciò osserviamo che, essendo $r \in]p_1, p_2[$, possiamo scrivere

$$r = (1-t)p_1 + tp_2$$

con $t \in]0,1[$ e, di conseguenza, considerare la successione $\{|f_n - f|^r\}$ come una successione prodotto:

$$|f_n - f|^r \;=\; |f_n - f|^{(1-t)p_1} |f_n - f|^{tp_2} \qquad\qquad \forall n \in \mathbb{N} \ .$$

Poiché, grazie alle ipotesi, si ha

$$|f_n - f|^{(1-t)p_1} \;\to\; 0 \quad \text{in } \mathcal{L}^{\frac{1}{1-t}}(\mu) \qquad , \qquad |f_n - f|^{tp_2} \;\to\; 0 \quad \text{in } \mathcal{L}^{\frac{1}{t}}(\mu) \ \ ,$$

la tesi segue subito dal precedente teorema dato che $\frac{1}{1-t}$ e $\frac{1}{t}$ sono, ovviamente, esponenti coniugati.

Un altro teorema di permanenza dell'esponente di convergenza in media, valido per le misure finite, è il seguente.

Teorema 16.6.3. *Sia $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura con $\mu(\Omega) < +\infty$. Siano $\{f_n\}$ una successione di funzioni appartenenti a $M(\mathcal{A})$ e f una funzione elemento di $M(\mathcal{A})$ tali da aversi convergenza in media:*

$$f_n \;\to\; f \quad \text{in } \mathcal{L}^p(\mu)$$

per qualche esponente $p \in]0, +\infty[$. Allora si ha pure convergenza in media con un qualunque esponente minore di p:

$$f_n \;\to\; f \quad \text{in } \mathcal{L}^r(\mu) \qquad\quad \forall r \in]0,p[\quad .$$

Dimostrazione. Per il Teorema 15.1.1 le funzioni f_n, $n \in \mathbb{N}$, e f appartengono tutte a $\mathcal{L}^r(\mu)$, pertanto la tesi da provare può scriversi

$$|f_n - f|^r \;\to\; 0 \quad \text{in } \mathcal{L}^1(\mu) \ \ .$$

Utilizziamo ancora una volta il Teorema 16.6.1. Consideriamo la successione $\{|f_n - f|^r\}$ come una successione prodotto:

$$|f_n - f|^r \;= |f_n - f|^r h_n \qquad\qquad \forall n \in \mathbb{N} \ ,$$

essendo $\{h_n\}$ la successione costante, il cui termine generale h_n è la funzione h identicamente uguale a 1. Per ipotesi si ha

$$|f_n - f|^r \;\to\; 0 \quad \text{in } \mathcal{L}^{p'}(\mu)$$

con $p' = \frac{p}{r}$; d'altra parte si ha pure, ovviamente,

$$h_n \;\to\; h \quad \text{in } \mathcal{L}^s(\mu)$$

con qualunque esponente $s \in]0, +\infty[$ e, in particolare, con $s = q'$, l'esponente coniugato di p'. A questo punto, per ottenere la tesi, basta applicare il Teorema 16.6.1.

Il successivo Esercizio 16.6.1 mostra che nel teorema precedente l'ipotesi $\mu(\Omega) < +\infty$ è essenziale.

Esercizio 16.6.1. Nello spazio di misura $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$, dove $\mu(\{n\} = 1 \;\; \forall n \in \mathbb{N}$, consideriamo la successione di funzioni $\{f_n\}$ data da

$$f_n \;=\; \frac{1}{n+1}\mathbb{1}_{\{n+1\}} \;+\; \dots \;+\; \frac{1}{2n}\mathbb{1}_{\{2n\}} \qquad\qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad .$$

Provare che:

a) $\{f_n \,:\, n \in \mathbb{N}\} \;\subseteq\; \mathcal{L}^p(\mu) \;\; \forall p \in]0, +\infty[$;

b) $f_n \;\to\; 0 \;\; \mu$-q.o. ;

c) $\{f_n\}$ converge in media di ordine p se e soltanto se $p > 1$.

Concludiamo il paragrafo osservando che il Teorema 16.6.3 è un caso particolare del seguente teorema, che dimostreremo nel successivo Capitolo 19.

Teorema 16.6.4. *Sia $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura e supponiamo che per qualche coppia di esponenti $p, r \in]0, +\infty[$ valga l'inclusione insiemistica*

$$\mathcal{L}^r(\mu) \;\subseteq\; \mathcal{L}^p(\mu) \quad .$$

Allora, per ogni successione $\{f_n\}$ di funzioni appartenenti a $M(\mathcal{A})$ ed ogni funzione $f \in M(\mathcal{A})$, tali da aversi

$$f_n \;\to\; f \quad \text{in } \mathcal{L}^r(\mu) \quad ,$$

si ha pure

$$f_n \;\to\; f \quad \text{in } \mathcal{L}^p(\mu) \quad .$$

16.7. Convergenza quasi-uniforme.

Definizione 16.7.1. (*Convergenza quasi-uniforme*). Dato lo spazio di misura $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni appartenenti a $M(\mathcal{A})$ e sia $f \in M(\mathcal{A})$.

Si dice che la successione $\{f_n\}$ *converge μ-quasi-uniformemente alla funzione f* se per ogni $\eta > 0$ esiste un insieme $B_\eta \in \mathcal{A}$, con $\mu(B_\eta^{\mathrm{c}}) < \eta$, tale che la $\{f_n\}$ converga uniformemente alla f nell'insieme B_η:

$$\forall \eta > 0 \quad \exists B_\eta \in \mathcal{A} \quad : \quad \mu(B_\eta^{\mathrm{c}}) < \eta \quad \text{e} \quad f_n \;\rightrightarrows\; f \quad \text{in } B_\eta \quad . \tag{16.7.1}$$

Per indicare che la successione $\{f_n\}$ converge μ-quasi-uniformemente alla funzione f adoperiamo la notazione

$$f_n \;\to\; f \quad \mu\text{−q.unif.}$$

o anche, quando non vi è possibilità di equivoco in merito allo spazio di misura che si considera, l'altra

$$f_n \stackrel{\text{q.unif.}}{\to} f \quad ;$$

in questo caso diciamo che "$\{f_n\}$ *converge quasi-uniformemente a* f".

La proposizione seguente mette in relazione tra loro le due nozioni di convergenza quasi-uniforme e convergenza quasi-ovunque.

Proposizione 16.7.1. *Dato lo spazio di misura* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, *sia* $\{f_n\}$ *una successione di funzioni appartenenti a* $M(\mathcal{A})$ *e sia* $f \in M(\mathcal{A})$.

Vale l'implicazione

$$f_n \stackrel{\text{q.unif.}}{\to} f \qquad \Longrightarrow \qquad f_n \stackrel{\text{q.o.}}{\to} f \quad .$$

Dimostrazione. L'ipotesi di convergenza quasi-uniforme implica che per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste un insieme $B_{1/k} \in \mathcal{A}$, con $\mu(B^{\mathrm{c}}_{1/k}) < \frac{1}{k}$, tale che

$$f_n \;\rightrightarrows\; f \quad \text{in} \;\; B_{1/k}$$

e quindi, a maggior ragione,

$$f_n \;\to\; f \quad \text{in} \;\; B_{1/k} \quad .$$

Posto

$$A \;=\; \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{1/k} \quad ,$$

si ha $A \in \mathcal{A}$ e $\mu(A^{\mathrm{c}}) \;=\; 0$ in quanto, per ogni $k \in \mathbb{N}$, è

$$A^{\mathrm{c}} \;\subseteq\; B^{\mathrm{c}}_{1/k}$$

e quindi

$$\mu\big(A^{\mathrm{c}}\big) \;\leq\; \mu\big(B^{\mathrm{c}}_{1/k}\big) \;<\; \tfrac{1}{k} \quad .$$

È inoltre immediato verificare che risulta

$$f_n \;\to\; f \quad \text{in} \; A \quad ,$$

dunque la successione $\{f_n\}$ converge μ-quasi-ovunque alla funzione f.

Anche per la convergenza μ-quasi-uniforme, così come accade per la convergenza μ-quasi-ovunque e per quella in $\mathcal{L}^p(\mu)$, si ha che, se $f_n \to f \;\; \mu$-q.unif., allora la successione

$\{f_n\}$ converge μ-quasi-uniformemente verso tutte e sole le funzioni $g \in M(\mathcal{A})$ tali che $g = f$ μ-q.o.

Proposizione 16.7.2. (Essenziale unicità della funzione limite nella convergenza μ-quasi-uniforme). *Dato lo spazio di misura $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni appartenenti a $M(\mathcal{A})$ e siano $f, g \in M(\mathcal{A})$. Supponiamo inoltre che risulti*

$$f_n \;\rightarrow\; f \quad \mu\text{-q.unif.}$$

Si ha allora la seguente equivalenza

$$f_n \;\rightarrow\; g \quad \mu\text{-q.unif.} \quad \Longleftrightarrow \quad f = g \quad \mu\text{-q.o.}$$

Dimostrazione. Proviamo l'implicazione $\Longrightarrow$. Da $f_n \rightarrow f$ μ-q.unif. e $f_n \rightarrow g$ μ-q.unif. segue, per la precedente Proposizione 16.7.1, $f_n \rightarrow f$ μ-q.o. e $f_n \rightarrow g$ μ-q.o.; pertanto, per la Proposizione 16.2.1, risulta $f = g$ μ-q.o.

Proviamo adesso la $\Longleftarrow$. Per ipotesi vale la (16.7.1) ed esiste inoltre un insieme $A \in \mathcal{A}$, con $\mu(A^{\mathrm{c}}) = 0$, tale che $f(\omega) = g(\omega)$ $\forall \omega \in A$. Per dimostrare che $f_n \rightarrow g$ μ-q.unif. basta allora considerare, per ogni $\eta > 0$, l'insieme

$$C_\eta = A \cap B_\eta \quad ;$$

si ha infatti

$$C_\eta \in \mathcal{A} \qquad , \qquad \mu(C_\eta^{\mathrm{c}}) \;=\; \mu(A^{\mathrm{c}} \cup B_\eta^{\mathrm{c}}) \;\leq\; \mu(A^{\mathrm{c}}) \;+\; \mu(B_\eta^{\mathrm{c}}) < \;\eta$$

e inoltre, dato che $C_\eta \subseteq B_\eta$ e che le restrizioni a C_η delle due funzioni f e g coincidono,

$$f_n \rightrightarrows g \quad \text{in } C_\eta \quad .$$

Ciò completa la dimostrazione.

Nel seguito, data una successione $\{f_n\}$ di funzioni appartenenti a $M(\mathcal{A})$, diremo che la successione $\{f_n\}$ *converge μ-quasi-uniformemente*, senza fare menzione della funzione limite, per significare che esiste una funzione $f \in M(\mathcal{A})$ tale che $f_n \rightarrow f$ μ-q.unif.

Completiamo adesso il confronto tra la convergenza μ-quasi-uniforme e quella μ-quasi-ovunque mostrando con un esempio che, in generale, dalla convergenza μ-quasi-ovunque non segue quella μ-quasi-uniforme.

Esempio 16.7.1. (*Una successione di funzioni che converge μ-quasi-ovunque ma non μ-quasi-uniformemente*). Abbiamo già visto (Esempio 16.5.3) che nello spazio di misura $(\mathbb{R}, \mathcal{L}_1, \mathrm{m}_1)$ la successione $\{f_n\}$ di funzioni appartenenti a $M(\mathcal{L}_1)$, definita ponendo

$$f_n \;=\; \mathbb{1}_{[n-1,n[} \qquad\qquad \forall n \in \mathbb{N} \; ,$$

converge m_1-quasi-ovunque verso la funzione identicamente nulla .

Invece $\{f_n\}$ non converge m_1-quasi-uniformemente. Infatti, se esistesse una funzione $f \in M(\mathcal{L}_1)$ tale che $f_n \to f$ m_1-q.unif., si avrebbe pure (Proposizione 16.7.1) $f_n \to f$ m_1-q.o. e quindi (Proposizione 16.1.1) $f = 0$ m_1-q.o., da cui, per la Proposizione 16.7.2, seguirebbe che $\{f_n\}$ converge m_1-quasi-uniformemente verso la funzione identicamente nulla. Fissato allora un qualunque numero $\eta \in]0,1]$, esisterebbe un insieme B_η, con $m_1(B_\eta^c) < \eta$, tale che $f_n \rightrightarrows 0$ in B_η; pertanto, in corrispondenza di un qualsiasi $\varepsilon \in]0,1[$, dovrebbe esistere un indice $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tale da aversi

$$|f_n(\omega)| \;<\; \varepsilon \qquad\qquad \forall \omega \in B_\eta \;,\; \forall n \geq \overline{n} \;;$$

questa conclusione è però assurda perché per ogni $n \in \mathbb{N}$ (e, in particolare, per ogni $n \geq \overline{n}$) esistono sicuramente numeri ω appartenenti all'intersezione $B_\eta \cap [n-1, n[$ (ciò segue facilmente dal fatto che $m_1(B_\eta^c) < 1 = m_1([n-1,n[))$ e per tali ω la disuguaglianza $|f_n(\omega)| < \varepsilon$ è falsa dato che $f_n(\omega) = 1$.

Lo stesso ragionamento mostra che non vi è alcuna estratta di $\{f_n\}$ che converge m_1-quasi-uniformemente.

Per effettuare il confronto tra la convergenza μ-quasi-uniforme e quella in media di ordine p consideriamo i seguenti esempi.

Esempio 16.7.2. La successione di funzioni dell'Esempio 16.5.1, come sappiamo, converge in media di ordine p alla funzione identicamente nulla, qualunque sia l'esponente $p \in]0, +\infty[$, ma non converge quasi-ovunque. A maggior ragione (Proposizione 16.7.1) tale successione non converge quasi-uniformemente.

Esempio 16.7.3. La successione di funzioni dell'Esempio 16.5.2, che, come sappiamo, non converge in media di ordine p per nessun esponente $p \in]0, +\infty[$, converge quasi-uniformemente verso la funzione identicamente nulla. Per provare questa affermazione basta prendere, per ogni $\eta > 0$, come insieme B_η un qualunque intervallo $[0, \sigma] \subseteq [0, 1[$ con $\sigma < \eta$.

Osserviamo che la convergenza quasi-uniforme può anche dimostrarsi applicando il successivo teorema di Severini-Egorov (Teorema 16.7.2).

Esempio 16.7.4. Nello spazio di misura $(\mathbb{R}, \mathcal{L}_1, m_1)$ consideriamo la seguente successione di funzioni appartenenti a $M(\mathcal{L}_1)$:

$$\{f_n\} \;=\; \left\{ \frac{1}{n} \mathbb{1}_{[0,2^n]} \right\} \;.$$

Poiché

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\mathbb{R}} |f_n| \;=\; \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \;=\; 0 \;\;,$$

si ha

$$f_n \rightrightarrows 0 \;\text{ in } \mathbb{R}$$

e quindi (prendendo come insieme B_η l'insieme vuoto) possiamo concludere che la successione $\{f_n\}$ converge quasi-uniformemente verso la funzione identicamente nulla.

Invece la successione $\{f_n\}$ non converge in media di ordine p per nessun valore di $p \in]0, +\infty[$. Infatti, dato che $\{f_n\}$ converge quasi-ovunque verso la funzione identicamente nulla, se vi fosse convergenza in media, per il Corollario 16.5.1 vi sarebbe convergenza in media verso la funzione identicamente nulla, ma ciò è impossibile dal momento che

$$\lim_{n\to\infty} \int |f_n|^p \, d\mu \; = \; \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n^p} \; = \; +\infty$$

(lo stesso ragionamento mostra che nessuna successione $\{f_{n_k}\}$, estratta dalla $\{f_n\}$, può convergere in media di ordine p).

In conclusione non vi è alcuna relazione di implicazione tra le due proprietà di convergenza quasi-uniforme e convergenza in media di ordine p. Vedremo più avanti (Proposizione 16.8.3 e Corollario 16.8.1) che da ogni successione convergente in media di ordine p se ne può estrarre una convergente quasi-uniformemente.

La convergenza quasi-uniforme si caratterizza nel modo seguente.

Teorema 16.7.1. (Caratterizzazione della convergenza μ-quasi-uniforme). *Dato lo spazio di misura* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$*, supponiamo che* $\{f_n\}$ *sia una successione di funzioni appartenenti a* $M(\mathcal{A})$ *e che* f *sia una funzione elemento di* $M(\mathcal{A})$ *.*

La seguente condizione (QU) *è necessaria e sufficiente affinché la successione* $\{f_n\}$ *converga* μ*-quasi-uniformemente alla funzione* f *:*

$$\text{(QU)} \qquad \forall \varepsilon > 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \mu\left(\left\{\sup_{k\geq n} |f_k - f| \geq \varepsilon\right\}\right) \; = \; 0$$

(notiamo subito che gli insiemi

$$\left\{\sup_{k\geq n} |f_k - f| \geq \varepsilon\right\} \; , \qquad\qquad n \in \mathbb{N}, \, \varepsilon > 0 \; ,$$

che figurano nella condizione (QU), appartengono alla σ-algebra $\mathcal{A}$, ed è quindi lecito considerarne la misura, dal momento che le funzioni $f, f_1, f_2, \ldots$ sono tutte $\mathcal{A}$-misurabili per ipotesi).

Dimostrazione. Poniamo, per ogni $n \in \mathbb{N}$ ed ogni $\varepsilon > 0$,

$$\text{(16.7.2)} \qquad E_{n,\varepsilon} \; = \; \left\{\sup_{k\geq n} |f_k - f| \geq \varepsilon\right\}$$

ed osserviamo che, come è facile verificare, l'insieme $E_{n,\varepsilon}$ è "non crescente" rispetto a ciascuno dei parametri n e ε, cioè si ha:

$$\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N} \; : \; n_1 < n_2 \;\; , \;\; \forall \varepsilon > 0 \qquad \Longrightarrow \qquad E_{n_1,\varepsilon} \; \supseteq \; E_{n_2,\varepsilon} \;\; ,$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \;\; , \;\; \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0 \; : \; \varepsilon_1 < \varepsilon_2 \qquad \Longrightarrow \qquad E_{n,\varepsilon_1} \; \supseteq \; E_{n,\varepsilon_2} \;\; .$$

Dimostriamo che la condizione è necessaria. Dobbiamo provare che:

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} \mu(E_{n,\varepsilon}) \;=\; 0 \;,$$

vale a dire

$$\forall \varepsilon > 0 \;,\; \forall \eta > 0 \qquad \exists \overline{n} \in \mathbb{N} \quad : \quad \mu(E_{n,\varepsilon}) \;<\; \eta \qquad \forall n \geq \overline{n} \;,$$

ovverossia, per la non crescenza di $E_{n,\varepsilon}$ rispetto a n,

$$\forall \varepsilon > 0 \;,\; \forall \eta > 0 \qquad \exists \overline{n} \in \mathbb{N} \quad : \quad \mu(E_{\overline{n},\varepsilon}) \;<\; \eta \;.$$

Per ipotesi, in corrispondenza di $\eta > 0$, esiste $B_\eta \in \mathcal{A}$, con $\mu(B_\eta^{\mathrm{c}}) < \eta$, tale che

$$f_n \;\rightrightarrows\; f \quad \text{in} \;\; B_\eta \;;$$

pertanto, in corrispondenza di $\varepsilon > 0$, esiste $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$|f_n(\omega) - f(\omega)| \;<\; \frac{\varepsilon}{2} \qquad\qquad \forall \omega \in B_\eta \;,\; \forall n \geq \overline{n}$$

e quindi

$$\sup_{n \geq \overline{n}} |f_n(\omega) - f(\omega)| \;\leq\; \frac{\varepsilon}{2} \;<\; \varepsilon \qquad\qquad \forall \omega \in B_\eta \;.$$

La precedente disuguaglianza dice che vale l'inclusione insiemistica

$$B_\eta \;\;\subseteq\;\; \left\{ \sup_{n \geq \overline{n}} |f_n - f| < \varepsilon \right\} \;,$$

cioè

$$B_\eta \;\;\subseteq\;\; E^{\mathrm{c}}_{\overline{n},\varepsilon} \;;$$

di conseguenza si ha pure

$$E_{\overline{n},\varepsilon} \;\;\subseteq\;\; B_\eta^{\mathrm{c}} \;,$$

da cui

$$\mu(E_{\overline{n},\varepsilon}) \;\;\leq\;\; \mu(B_\eta^{\mathrm{c}}) \;\;<\;\; \eta \;,$$

come dovevamo dimostrare.

Proviamo che la condizione è sufficiente. Fissato un qualunque $\eta > 0$, osserviamo che, per ipotesi, per ogni $r \in \mathbb{N}$ risulta

$$\lim_{n\to\infty} \mu\big(E_{n,\frac{1}{r}}\big) \;\;=\;\; 0$$

e pertanto, in corrispondenza del numero positivo $\eta 2^{-r}$, esiste un indice $n_r \in \mathbb{N}$ tale che

$$\mu\big(E_{n_r,\frac{1}{r}}\big) \;\;<\;\; \eta 2^{-r} \;.$$

Consideriamo la successione di insiemi

$$E_{n_1,1} \ , \ E_{n_2,\frac{1}{2}} \ , \ \dots \ , \ E_{n_r,\frac{1}{r}} \ , \ \dots$$

e poniamo

$$B_\eta \ = \ \bigcap_{r=1}^{\infty} E^{\mathrm{c}}_{n_r,\frac{1}{r}} \quad .$$

Ovviamente si ha $B_\eta \in \mathcal{A}$. Risulta inoltre

$$\mu(B^{\mathrm{c}}_\eta) \ = \ \mu\left(\bigcup_{r=1}^{\infty} E_{n_r,\frac{1}{r}}\right) \ < \ \eta 2^{-1} + \eta 2^{-2} + \ldots + \eta 2^{-r} + \ldots \ = \ \eta \ .$$

Verifichiamo infine, per completare la dimostrazione, che si ha

$$f_n \rightrightarrows f \quad \text{in } B_\eta \quad .$$

Infatti, fissato comunque $\overline{\varepsilon} > 0$, se si considera un numero $r^* \in \mathbb{N}$ tale che $\frac{1}{r^*} \leq \overline{\varepsilon}$, si ha, per la definizione di B_η e la non crescenza di $E_{n,\varepsilon}$ rispetto a ε,

$$B_\eta \ \subseteq \ E^{\mathrm{c}}_{n_{r^*},\frac{1}{r^*}} \ \subseteq \ E^{\mathrm{c}}_{n_{r^*},\overline{\varepsilon}} \quad .$$

La precedente inclusione insiemistica implica che è

$$\sup_{k \geq n_{r^*}} |f_k(\omega) - f(\omega)| \ < \ \overline{\varepsilon} \qquad\qquad \forall \omega \in B_\eta$$

e quindi

$$|f_k(\omega) - f(\omega)| \ < \ \overline{\varepsilon} \qquad\qquad \forall \omega \in B_\eta \ , \ \forall k \geq n_{r^*} \ ,$$

dunque $\{f_n\}$ converge uniformemente a f in B_η.

Siamo ora in grado di provare tramite la precedente caratterizzazione che, se la misura μ è finita, allora convergenza quasi-ovunque e convergenza quasi-uniforme sono proprietà equivalenti.

Teorema 16.7.2. (Teorema di Severini-Egorov). *Supponiamo che $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ sia uno spazio di misura con $\mu(\Omega) < +\infty$, e siano $\{f_n\}$ e f, rispettivamente, una successione di funzioni appartenenti a $M(\mathcal{A})$ ed una una funzione elemento di $M(\mathcal{A})$.*

Se la successione $\{f_n\}$ converge μ-quasi-ovunque alla funzione f, allora $\{f_n\}$ converge pure μ-quasi-uniformemente a f.

Dimostrazione. Continuiamo ad adoperare la notazione (16.7.2).

Per ipotesi esiste un insieme $A \in \mathcal{A}$, con $\mu(A^c) = 0$, tale che

$$f_n \;\to\; f \quad \text{in } A\ .$$

Fissato un qualunque $\varepsilon > 0$, possiamo allora affermare che per ogni $\omega \in A$ esiste un indice $\overline{n}$ (dipendente da ω) tale che $|f_k(\omega) - f(\omega)| < \frac{\varepsilon}{2}$ per ogni $k \geq \overline{n}$ e quindi

$$\sup_{k \geq \overline{n}} |f_k(\omega) - f(\omega)| \;\leq\; \frac{\varepsilon}{2} \;<\; \varepsilon\ \ ,$$

cioè $\omega \in E^c_{\overline{n},\varepsilon}$. Abbiamo così verificato che, per ogni $\varepsilon > 0$ vale l'inclusione

$$A \;\subseteq\; \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E^c_{n,\varepsilon}\ \ ,$$

da cui, considerando gli insiemi complementari, si ottiene

$$A^c \;\supseteq\; \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_{n,\varepsilon}\ \ ,$$

e quindi si ha

$$\mu\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_{n,\varepsilon}\Big) \;=\; 0\ \ .$$

Ma, dato che la misura μ è finita e che la successione di insiemi $\{E_{n,\varepsilon}\}$ è non crescente, per la proprietà di continuità verso il basso si ha pure

$$\mu\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_{n,\varepsilon}\Big) \;=\; \lim_{n \to \infty} \mu\big(E_{n,\varepsilon}\big)\ \ ,$$

dunque è verificata la condizione (QU). Ciò completa la dimostrazione.

Osservazione 16.7.1. Non bisogna commettere l'errore di ritenere, per analogia con la definizione di convergenza μ-quasi-ovunque, che la convergenza μ-quasi-uniforme di una successione $\{f_n\}$ ad una funzione f equivalga al verificarsi della seguente condizione:

$$\exists A \in \mathcal{A} \quad : \quad \mu(A^c) \;=\; 0 \quad \text{e} \quad f_n \rightrightarrows f \quad \text{in } A\ \ . \tag{16.7.3}$$

Infatti, mentre è immediato verificare che (16.7.3) è condizione sufficiente affinché $\{f_n\}$ converga μ-quasi-uniformemente a f (per ottenere la validità della (16.7.1) basta prendere $B_\eta = A$ per ogni $\eta > 0$), il successivo esempio mostra che, in generale, dalla convergenza μ-quasi-uniforme di $\{f_n\}$ a f non segue la (16.7.3).

Esempio 16.7.5. Consideriamo, come spazio di misura $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, la "restrizione" (già considerata in precedenti esempi) dello spazio di misura $(\mathbb{R}, \mathcal{L}_1, \mathrm{m}_1)$ all'intervallo $[0,1[$, cioè

$$\Omega \;=\; [0,1[\quad , \quad \mathcal{A} \;=\; [0,1[\cap \mathcal{L}_1 \quad , \quad \mu \;=\; \mathrm{m}_1\big|_{[0,1[\,\cap\,\mathcal{L}_1}\ \ ,$$

e, come successione di funzioni $\{f_n\}$, elementi di $M(\mathcal{A})$, la successione di funzioni $\{x^n\}$ (osserviamo che la $\mathcal{A}$-misurabilità della funzione x^n segue dalla sua continuità).

Poiché è

$$\lim_{n\to\infty} x^n \;=\; 0 \qquad\qquad \forall x \in [0,1[\ ,$$

si ha $f_n \to 0$ μ-q.o. e quindi, per il teorema di Severini-Egorov, $f_n \to 0$ μ-q.unif.

Proviamo che, invece, non vale la (16.7.3). Infatti, se fosse verificata la (16.7.3), per ogni $\varepsilon \in]0,1[$ esisterebbe un indice $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tale da aversi, per ogni $n \geq \overline{n}$,

$$|f_n(x)| \;<\; \varepsilon \qquad\qquad \forall x \in A\ ,$$

cioè

$$A \;\subseteq\; \{|f_n| < \varepsilon\}\ \ ,$$

da cui, considerando gli insiemi complementari, segue che è

$$A^{\mathrm{c}} \;\supseteq\; \{|f_n| \geq \varepsilon\}$$

e quindi

$$\mu\big(\{|f_n| \geq \varepsilon\}\big) \;=\; 0\ \ ,$$

ma ciò è falso, in quanto, per ogni $n \in \mathbb{N}$, l'insieme

$$\{|f_n| \geq \varepsilon\} \;=\; \{x \in [0,1[\ :\ x^n \geq \varepsilon\} \;=\; \big[\varepsilon^{\frac{1}{n}}, 1\big[$$

ha misura positiva.

16.8. Convergenza in misura.

L'ultimo modo di convergenza delle successioni di funzioni reali misurabili che prenderemo in esame si ottiene attenuando la condizione (QU), che caratterizza la convergenza quasi-uniforme. Precisamente, anziché richiedere che sia infinitesima, al divergere di n, la misura dell'insieme

$$\Big\{\sup_{k\geq n} |f_k - f| \geq \varepsilon\Big\}\ \ ,$$

ci si limita ad imporre che lo sia quella del sottoinsieme

$$\big\{|f_n - f| \geq \varepsilon\big\}\ \ .$$

Definizione 16.8.1. (*Convergenza in misura*). Dato lo spazio di misura $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni appartenenti a $M(\mathcal{A})$ e sia $f \in M(\mathcal{A})$.

Si dice che la successione di funzioni $\{f_n\}$ *converge in misura rispetto a* μ (oppure *in* μ*-misura*) *alla funzione* f se è verificata la seguente condizione:

$$\text{(M)} \qquad \forall \varepsilon > 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \mu\big(\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}\big) \ = \ 0 \ .$$

Per indicare che la successione $\{f_n\}$ converge in misura rispetto a μ alla funzione f adoperiamo la notazione

$$f_n \ \to \ f \quad \text{in } \mu\text{-misura}$$

o l'altra

$$f_n \stackrel{\mu}{\to} f \ ,$$

ovvero ancora, quando non vi è possibilità di equivoco in merito allo spazio di misura che si considera, l'altra

$$f_n \ \to \ f \quad \text{in misura} \ .$$

Anche per la convergenza in misura vale, a proposito dell'unicità del limite, un risultato analogo a quelli relativi agli altri tipi di convergenza, cioè si ha la seguente proposizione.

Proposizione 16.8.1. (Essenziale unicità della funzione limite nella convergenza in misura). *Dato lo spazio di misura* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, *sia* $\{f_n\}$ *una successione di funzioni appartenenti a* $M(\mathcal{A})$ *e siano* $f, g \in M(\mathcal{A})$. *Supponiamo inoltre che risulti*

$$f_n \stackrel{\mu}{\to} f \ .$$

Si ha allora la seguente equivalenza

$$f_n \stackrel{\mu}{\to} g \quad \Longleftrightarrow \quad f = g \quad \mu\text{-q.o.}$$

Dimostrazione. Proviamo l'implicazione $\Longrightarrow$. La tesi da dimostrare è

$$\text{(16.8.1)} \qquad \mu\big(\{f \neq g\}\big) \ = \ 0 \ ;$$

pertanto, dato che è

$$\{f \neq g\} \ = \ \bigcup_{k=1}^{\infty} \Big\{|f-g| \ \geq \ \tfrac{1}{k}\Big\} \ ,$$

basta dimostrare che risulta

$$\mu\big(\{|f-g| \geq \alpha\}\big) \ = \ 0 \qquad \forall \alpha > 0 \ .$$

Osserviamo a tale scopo che, per ogni $\alpha > 0$ ed ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha

$$\{|f-g| \geq \alpha\} \;\subseteq\; \{|f-f_n| \geq \tfrac{\alpha}{2}\} \;\cup\; \{|f_n - g| \geq \tfrac{\alpha}{2}\} \quad ; \tag{16.8.2}$$

infatti, se ω è un elemento di Ω che non appartiene all'unione

$$\{|f-f_n| \geq \tfrac{\alpha}{2}\} \;\cup\; \{|f_n - g| \geq \tfrac{\alpha}{2}\} \quad ,$$

allora valgono entrambe le disuguaglianze

$$|f(\omega) - f_n(\omega)| \;<\; \tfrac{\alpha}{2} \qquad , \qquad |f_n(\omega) - g(\omega)| \;<\; \tfrac{\alpha}{2}$$

e quindi si ha

$$|f(\omega) - g(\omega)| \;\leq\; |f(\omega) - f_n(\omega)| \;+\; |f_n(\omega) - g(\omega)| \;<\; \tfrac{\alpha}{2} + \tfrac{\alpha}{2} \;=\; \alpha \quad ,$$

cioè ω non appartiene neanche all'insieme $\{|f-g| \geq \alpha\}$; conseguentemente è vera l'inclusione (16.8.2).

Dalla (16.8.2) segue

$$\mu\big(\{|f-g| \geq \alpha\}\big) \;\;\leq\;\; \mu\big(\{|f-f_n| \geq \tfrac{\alpha}{2}\}\big) \;+\; \mu\big(\{|f_n - g| \geq \tfrac{\alpha}{2}\}\big) \quad . \tag{16.8.3}$$

Poiché, per ipotesi, $f_n \overset{\mu}{\to} f$ e $f_n \overset{\mu}{\to} g$, si ha

$$\lim_{n\to\infty} \mu\big(\{|f-f_n| \geq \tfrac{\alpha}{2}\}\big) \;=\; 0 \quad , \quad \lim_{n\to\infty} \mu\big(\{|f_n - g| \geq \tfrac{\alpha}{2}\}\big) \;=\; 0 \quad ,$$

pertanto, passando al limite per $n \to \infty$ nella disuguaglianza (16.8.3) si ottiene

$$\mu\big(\{|f-g| \geq \alpha\}\big) \;=\; 0 \quad ,$$

come dovevamo dimostrare.

Proviamo adesso l'implicazione $\Longleftarrow$. Per ipotesi valgono la (M) e la (16.8.1). Per dimostrare che $f_n \overset{\mu}{\to} g$, basta allora osservare che, per ogni $\varepsilon > 0$ ed ogni $n \in \mathbb{N}$, risulta

$$\{|f_n - g| \geq \varepsilon\} \;\subseteq\; \{|f_n - f| \geq \varepsilon\} \cup \{f \neq g\} \quad ,$$

e quindi

$$\mu\big(\{|f_n - g| \geq \varepsilon\}\big) \;\leq\; \mu\big(\{|f_n - g| \geq \varepsilon\}\big) \quad ,$$

e passare al limite per $n \to \infty$ nella precedente disuguaglianza.

Nel seguito, data una successione $\{f_n\}$ di funzioni appartenenti a $M(\mathcal{A})$, diremo che la successione $\{f_n\}$ *converge in misura rispetto a* μ se esiste una funzione $f \in M(\mathcal{A})$ tale che $f_n \overset{\mu}{\to} f$.

Evidentemente, come è già stato accennato all'inizio del paragrafo, la condizione (QU) implica la (M). Si ha pertanto la seguente proposizione.

Proposizione 16.8.2. *Dato lo spazio di misura* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$*, sia* $\{f_n\}$ *sia una successione di funzioni appartenenti a* $M(\mathcal{A})$ *e sia* $f \in M(\mathcal{A})$*.*

Vale l'implicazione

$$f_n \overset{\text{q.unif.}}{\to} f \qquad \Longrightarrow \qquad f_n \overset{\mu}{\to} f \quad .$$

Passiamo ora ad occuparci del confronto tra la convergenza in media di ordine p e la convergenza in misura. Anche questo si effettua abbastanza facilmente grazie alla disuguaglianza di Čebičev.

Proposizione 16.8.3. *Dato lo spazio di misura* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$*, sia* $\{f_n\}$ *sia una successione di funzioni appartenenti a* $M(\mathcal{A})$ *e sia* $f \in M(\mathcal{A})$*.*

Per ogni esponente $p \in]0, +\infty[$ *vale l'implicazione*

$$f_n \overset{p}{\to} f \qquad \Longrightarrow \qquad f_n \overset{\mu}{\to} f \quad .$$

Dimostrazione. Per ipotesi si ha

$$\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f|^p \, d\mu \; = \; 0 \quad .$$

Inoltre, per ogni $\varepsilon > 0$ ed ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha, per la disuguaglianza di Čebičev (Teorema 15.4.1)

$$\mu\big(\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}\big) \quad \leq \quad \frac{1}{\varepsilon^p} \int |f_n - f|^p \, d\mu \quad ,$$

da cui, passando al limite per $n \to \infty$, si ottiene che è verificata la (M).

Relativamente alle due proposizioni precedenti si hanno i seguenti controesempi.

Esempio 16.8.1. La successione di funzioni dell'Esempio 16.5.1 converge in misura (poiché converge in media), ma non converge quasi-ovunque e quindi neanche quasi-uniformemente.

Esempio 16.8.2. Le successioni di funzioni degli Esempi 16.5.2 e 16.7.4 convergono in misura (poiché convergono quasi-uniformemente), ma non convergono in media per nessun esponente $p \in]0, +\infty[$, né hanno estratte convergenti in media.

Esempio 16.8.3. Sia $\{g_n\}$ la successione di funzioni che si ottiene da quella dell'Esempio 16.5.1 ponendo

$$g_n \; = \; 2^n f_n \qquad\qquad \forall n \in \mathbb{N} \; .$$

La successione $\{g_n\}$ converge in misura alla funzione identicamente nulla; infatti, fissato un qualunque $\varepsilon > 0$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$\{|g_n| \geq \varepsilon\} = \begin{cases} \emptyset & \text{se } \varepsilon > 1 \\ \\ \left[\frac{k(n)}{2^{h(n)}}, \frac{k(n)+1}{2^{h(n)}}\right[& \text{se } 0 < \varepsilon \leq 1 \end{cases}$$

e quindi, in ogni caso,

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{m}_{[0,1[}\big(\{|g_n| \geq \varepsilon\}\big) = 0 .$$

Invece la $\{g_n\}$ non converge né quasi-ovunque né in media.

Dimostriamo che $\{g_n\}$ non converge quasi-ovunque. Infatti, con considerazioni analoghe a quelle svolte per provare le (16.5.5), si ha che

$$\lim_{n\to\infty}{}' g_n(\omega) = 0 \qquad , \qquad \lim_{n\to\infty}{}'' g_n(\omega) = +\infty \ .$$

Proviamo che $\{g_n\}$ non converge in media per nessun esponente $p \in]0, +\infty[$. Infatti, se la successione $\{g_n\}$ convergesse in media di ordine p, allora, come conseguenza delle Proposizioni 16.8.3, 16.8.1 e 16.2.2, essa dovrebbe convergere in media di ordine p alla funzione identicamente nulla, ma ciò è impossibile poiché

$$\lim_{n\to\infty} \int |g_n|^p \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{np}}{2^{h(n)}} = +\infty$$

(si tenga presente che è $2^{h(n)} \leq n$). Il ragionamento svolto mostra anche che nessuna successione estratta dalla $\{g_n\}$ può convergere in media.

Vogliamo adesso presentare una caratterizzazione della convergenza in misura che prescinde dalla conoscenza della funzione limite f (così come accade nel criterio di convergenza di Cauchy).

La condizione che dimostreremo essere necessaria e sufficiente per la convergenza in misura di una successione $\{f_n\}$ di funzioni appartenenti a $M(\mathcal{A})$ è la seguente *condizione di Weyl-Riesz:*

$$\text{(W-R)} \qquad \forall \varepsilon, \eta > 0 \quad \exists \overline{n} \in \mathbb{N} \ : \quad \mu\big(\{|f_n - f_m| \geq \varepsilon\}\big) < \eta \qquad \forall n, m \geq \overline{n} \ .$$

Premettiamo un lemma.

Lemma 16.8.1. *Dato lo spazio di misura $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, sia $\{f_n\}$ sia una successione di funzioni appartenenti a $M(\mathcal{A})$ verificante la condizione* (W-R).

Esiste allora una successione $\{f_{n_k}\}$, estratta dalla $\{f_n\}$, che converge μ-quasi-uniformemente.

Dimostrazione. Fissiamo una qualunque successione $\{a_k\}$ di numeri reali positivi tale che $\sum_{k=1}^{\infty} a_k < +\infty$. Poi, per ogni $k \in \mathbb{N}$, applichiamo l'ipotesi (W-R) con $\varepsilon = \eta = a_k$. In questo modo otteniamo l'esistenza di una successione $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ di numeri interi positivi tale da risultare, per ogni $k \in \mathbb{N}$,

$$\mu\big(\{|f_n - f_m| \geq a_k\}\big) \ < \ a_k \qquad \forall n, m \geq n_k \ .$$

Ovviamente si può supporre che la successione $\{n_k\}$ sia crescente. Pertanto, posto

$$E_k \ = \ \big\{\big|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\big| \geq a_k\big\} \qquad \forall k \in \mathbb{N} \ ,$$

dato che entrambi gli indici n_k e n_{k+1} sono maggiori o uguali a n_k si ha

$$\mu(E_k) \ < \ a_k \qquad \forall k \in \mathbb{N} \ .$$

Dimostriamo che la successione $\{f_{n_k}\}$ converge μ-quasi-uniformemente. A tale scopo è sufficiente provare che per ogni $\eta > 0$ è possibile trovare un insieme $B_\eta \in \mathcal{A}$, con $\mu(B_\eta^{\mathrm{c}}) < \eta$, tale che la successione di funzioni $\{f_{n_k}\}$ verifichi in B_η la condizione di Cauchy per la convergenza uniforme ([8]).

Fissato un qualunque $\eta > 0$, scegliamo, in corrispondenza, un indice $k^* \in \mathbb{N}$ tale da aversi

$$\mu(E_{k^*}) \ + \ \mu(E_{k^*+1}) \ + \ \mu(E_{k^*+2}) \ + \ \ldots \ < \ \eta$$

(ciò è possibile poiché $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k < +\infty$) e poniamo

$$B_\eta \ = \ \Big(\bigcup_{k=k^*}^{\infty} E_k\Big)^{\mathrm{c}} \ ,$$

di modo che si ha $B_\eta \in \mathcal{A}$ e $\mu(B_\eta^{\mathrm{c}}) < \eta$. Proviamo che la successione $\{f_{n_k}\}$ verifica in B_η la condizione di Cauchy per la convergenza uniforme. Fissato un qualunque $\varepsilon > 0$, determiniamo un indice $\overline{k} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\sum_{k=\overline{k}}^{\infty} a_k \ < \ \varepsilon \ .$$

([8]) Infatti, una volta provato ciò, considerata la funzione $f \in M(\mathcal{A})$ definita ponendo

$$f \ = \ \big(\lim_{n\to\infty}{}' f_n\big) \mathbb{1}_A \ ,$$

essendo

$$A \ = \ \big\{ -\infty < \lim_{n\to\infty}{}' f_n < +\infty \big\} \ ,$$

si ha che, per ogni $\eta > 0$, la successione $\{f_{n_k}\}$ converge uniformemente a f in B_η, dunque $\{f_{n_k}\}$ converge μ-quasi-uniformemente a f.

Allora, per ogni coppia di indici $r, s \in \mathbb{N}$ tali che $r > s \geq \max\{k^*, \overline{k}\}$ ed ogni $\omega \in B_\eta$, si ha

$$\left|f_{n_s}(\omega) - f_{n_r}(\omega)\right| \ \leq$$

$$\leq \ \left|f_{n_s}(\omega) - f_{n_{s+1}}(\omega)\right| \ + \ \left|f_{n_{s+1}}(\omega) - f_{n_{s+2}}(\omega)\right| \ + \ \ldots \ + \ \left|f_{n_{r-1}}(\omega) - f_{n_r}(\omega)\right| \ <$$

(poiché ω non appartiene a nessuno degli insiemi $E_s, \ E_{s+1}, \ \ldots, \ E_{r-1}$, dal momento che $\omega \in B_\eta$ e $s \geq k^*$)

$$< \ a_s + \ldots + a_{r-1} \ \leq$$

(poiché $s \geq \overline{k}$)

$$\leq \ a_{\overline{k}} + \ldots + a_{r-1} \ < \ a_{\overline{k}} + a_{\overline{k}+1} + a_{\overline{k}+2} + \ldots \ < \ \varepsilon \ .$$

Ne segue che la successione $\{f_{n_k}\}$ verifica in B_η la condizione di Cauchy per la convergenza uniforme.

Teorema 16.8.1. (Criterio di Weyl-Riesz per la convergenza in misura). *Dato lo spazio di misura $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, supponiamo che $\{f_n\}$ sia una successione di funzioni appartenenti a $M(\mathcal{A})$.*

Condizione necessaria e sufficiente affinché $\{f_n\}$ converga in misura rispetto a μ è che $\{f_n\}$ verifichi la condizione di Weyl-Riesz (W-R).

Dimostrazione. La condizione è necessaria. Supponiamo che $\{f_n\}$ converga in misura rispetto a μ e sia $f \in M(\mathcal{A})$ una funzione tale che $f_n \xrightarrow{\mu} f$. Assegnati comunque $\varepsilon, \eta > 0$, per ipotesi si ha

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\{|f_n - f| \geq \tfrac{\varepsilon}{2}\}) \ = \ 0 \ ,$$

pertanto esiste un indice $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\mu(\{|f_n - f| \geq \tfrac{\varepsilon}{2}\}) \ < \ \tfrac{\eta}{2} \qquad\qquad \forall n \geq \overline{n} \ .$$

Allora, per ogni coppia di indici $n, m \geq \overline{n}$, osservando che è

$$\{|f_n - f| \geq \varepsilon\} \ \subseteq \ \{|f_n - f| \geq \tfrac{\varepsilon}{2}\} \cup \{|f - f_m| \geq \tfrac{\varepsilon}{2}\}$$

(ciò si prova ragionando come per la (16.8.2)), si ha

$$\mu(\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) \ \leq \ \mu(\{|f_n - f| \geq \tfrac{\varepsilon}{2}\}) + \mu(\{|f - f_m| \geq \tfrac{\varepsilon}{2}\}) \ < \ \tfrac{\eta}{2} + \tfrac{\eta}{2} \ = \ \eta \ ,$$

dunque vale la (W-R).

La condizione è sufficiente. Se è verificata la (W-R), allora, per il Lemma 16.8.1 e la Proposizione 16.8.2, esistono una successione $\left\{f_{n_k}\right\}$, estratta dalla $\{f_n\}$, ed una funzione f, elemento di $M(\mathcal{A})$, tali che

$$f_{n_k} \ \xrightarrow{\mu} \ f \ .$$

Proviamo che l'intera successione $\{f_n\}$ converge in μ-misura verso f. Assegnati ad arbitrio $\varepsilon, \eta > 0$, per la (W-R) esiste un indice $\tilde{n} \in \mathbb{N}$ tale da risultare

$$\mu\big(\{|f_n - f_m| \geq \tfrac{\varepsilon}{2}\}\big) \ < \ \tfrac{\eta}{2} \qquad \forall n, m \geq \tilde{n} \ . \tag{16.8.4}$$

D'altra parte, dato che $f_{n_k} \xrightarrow{\mu} f$, esiste un indice $\overline{k} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\mu\big(\{|f_{n_k} - f| \geq \tfrac{\varepsilon}{2}\}\big) \ < \ \tfrac{\eta}{2} \qquad \forall k \geq \overline{k} \ . \tag{16.8.5}$$

Fissiamo un indice $k^* \geq \overline{k}$ in modo che sia anche $n_{k^*} \geq \tilde{n}$; risulta allora, per ogni $n \geq \tilde{n}$,

$$\mu(\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) \ \leq$$

(ragionando come per la (16.8.3))

$$\leq \ \mu\big(\{|f_n - f_{n_{k^*}}| \geq \tfrac{\varepsilon}{2}\}\big) \ + \ \mu\big(\{|f_{n_{k^*}} - f| \geq \tfrac{\varepsilon}{2}\}\big) \ <$$

(per la (16.8.4) e la (16.8.5), dato che è $n, n_{k^*} \geq \tilde{n}$ e $k^* \geq \overline{k}$)

$$< \ \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{2} \ = \ \eta \ \ ,$$

quindi, per l'arbitrarietà di $\varepsilon, \eta > 0$, possiamo concludere che

$$f_n \xrightarrow{\mu} f \quad .$$

Dal Teorema 16.8.1 e dal Lemma 16.8.1, tenuto conto delle Proposizioni 16.8.2, 16.8.1 e 16.7.2, discende il

Corollario 16.8.1. *Dato lo spazio di misura $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, supponiamo che $\{f_n\}$ sia una successione di funzioni appartenenti a $M(\mathcal{A})$ convergente in μ-misura verso una funzione $f \in M(\mathcal{A})$.*

Esiste allora una successione $\{f_{n_k}\}$, estratta dalla $\{f_n\}$, tale che $f_{n_k} \ \to \ f$ μ-q.unif.

Esempio 16.8.4. La successione di funzioni considerata nell'Esempio 16.7.1 converge quasi-ovunque e non ha successioni estratte convergenti quasi-uniformemente; per il Corollario 16.8.1 non vi sono neanche estratte convergenti in misura.

Teorema 16.8.2. (Caratterizzazione della convergenza in misura mediante la convergenza quasi-uniforme). *Dato lo spazio di misura $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni appartenenti a $M(\mathcal{A})$ e sia $f \in M(\mathcal{A})$.*

Condizione necessaria e sufficiente affinché la sucessione $\{f_n\}$ converga in μ-misura verso la funzione f è che da ogni successione $\{f_{n_k}\}$, estratta dalla $\{f_n\}$, se ne possa estrarre una, $\{f_{n_{k_r}}\}$, convergente μ-quasi-uniformemente a f.

Dimostrazione. La necessità della condizione segue subito dal Corollario 16.8.1 e dalla ovvia osservazione che, se la successione $\{f_n\}$ converge in μ-misura verso la funzione f, la stessa cosa è vera per ogni sua successione estratta.

Dimostriamo che la condizione è sufficiente. Supponiamo, per assurdo, che la successione $\{f_n\}$ non converga in μ-misura verso la funzione f. Esiste allora un numero $\varepsilon > 0$ per il quale la successione

$$\left\{\mu(\{|f_n - f| \geq \varepsilon\})\right\}$$

non è infinitesima; conseguentemente esistono un altro numero $\eta > 0$ ed una successione $\left\{f_{n_k}\right\}$, estratta dalla $\{f_n\}$, tali da risultare

$$\mu\left(\left\{\left|f_{n_k} - f\right| \geq \varepsilon\right\}\right) \ \geq \ \eta \qquad\qquad \forall k \in \mathbb{N} \ ;$$

ne segue, ovviamente, che nessuna estratta dalla $\left\{f_{n_k}\right\}$ può convergere in μ-misura, e quindi (Proposizione 16.8.2) neanche μ-quasi-uniformemente, alla funzione f, ma ciò è in contraddizione con l'ipotesi.

16.9. Riepilogo delle relazioni esistenti tra i vari modi di convergenza.

Le relazioni che intercorrono tra i quattro tipi di convergenza esaminati nel corso del capitolo possono essere sintetizzate nello schema che segue. I simboli p, q.unif., q.o. e μ indicano, rispettivamente, la convergenza in media di ordine p, quella quasi-uniforme, quella quasi-ovunque e quella in misura; la freccia a tratto continuo $\Longrightarrow$ denota, com'è d'abitudine, l'implicazione, mentre quella a tratto discontinuo $=\!=\!\Rightarrow$ ha il significato di "implicazione per un'opportuna successione estratta", cioè: la proprietà di convergenza indicata dalla coda della freccia comporta che vi è un'estratta della successione considerata che converge nel modo indicato dalla punta della freccia.

$$\begin{array}{cccc}
 & & & p \\
 & & & \Downarrow \\
 & \text{q.unif.} & \begin{array}{c}\Longrightarrow \\ \Leftarrow\!=\!=\end{array} & \mu \\
\left[\Uparrow {\scriptstyle \mu<+\infty}\right] & \Downarrow & & \\
 & \text{q.o.} & &
\end{array}$$

Ovviamente, oltre alle implicazioni che si deducono dallo schema immediatamente (cioè con un solo passaggio), valgono anche quelle che si ottengono "per transitività", quale, ad esempio, la

$$\mu \ =\!=\!\Rightarrow \ \text{q.o.} \ ,$$

che si ricava dalle

$$\mu \implies \text{q.unif.} \qquad , \qquad \text{q.unif.} \implies \text{q.o.}$$

Le implicazioni che non sono deducibili dallo schema sono false.

Per comodità del lettore riportiamo di seguito un elenco dettagliato delle implicazioni e dei controesempi.

Implicazioni.

$p \implies \mu$	Proposizione 16.8.3
$p \implies$ q.unif.	[Proposizione 16.8.3 e Corollario 16.8.1]
$p \implies$ q.o.	Proposizione 16.5.1 oppure [Proposizione 16.8.3, Corollario 16.8.1 e Proposizione 16.7.1]
q.unif. $\implies \mu$	Proposizione 16.8.2
q.unif. $\implies$ q.o.	Proposizione 16.7.1
q.o. $\implies$ q.unif. (se $\mu < +\infty$)	Teorema 16.7.2
$\mu \implies$ q.unif.	Corollario 16.8.1
$\mu \implies$ q.o.	[Corollario 16.8.1 e Proposizione 16.7.1]

Controesempi.

q.unif.	$\not\Longrightarrow$	p	Esempi 16.7.3 e 16.7.4
q.o.	$\not\Longrightarrow$	p	Esempi 16.5.2, 16.5.3 e 16.7.4
μ	$\not\Longrightarrow$	p	Esempi 16.8.2 e 16.8.3
p	$\not\Longrightarrow$	q.unif.	Esempio 16.7.2
μ	$\not\Longrightarrow$	q.unif	Esempi 16.8.1 e 16.8.3
q.o.	$\not\Longrightarrow$	q.unif.	Esempio 16.7.1
p	$\not\Longrightarrow$	q.o.	Esempio 16.5.1
μ	$\not\Longrightarrow$	q.o.	Esempi 16.8.1 e 16.8.3
q.o.	$\not\Longrightarrow$	μ	Esempio 16.8.4

Terminiamo il capitolo con un'osservazione che si rivela spesso utile.

Osservazione 16.9.1. Supponiamo che una successione $\{f_n\}$ di funzioni appartenenti a $M(\mathcal{A})$ converga verso una funzione $f \in M(\mathcal{A})$ secondo uno dei quattro modi di convergenza studiati e verso un'altra funzione $g \in M(\mathcal{A})$ secondo un altro di tali modi. Allora, con ragionamenti simili a quelli adottati per il Corollario 16.5.1, è facile provare che risulta

$$f = g \quad \mu\text{-q.o.}$$

e pertanto, per l'essenziale unicità della funzione limite, la successione $\{f_n\}$ converge secondo ciascuno dei due modi di convergenza sia verso la f che verso la g.