15. Gli spazi L^p.

In questo capitolo, dati lo spazio di misura $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ e un esponente $p \in]0, +\infty[$, soffermiamo la nostra attenzione sulle funzioni numeriche f, $\mathcal{A}$-misurabili in Ω, per le quali l'integrale

$$\int |f|^p \, d\mu$$

assume valore finito (funzioni di classe L^p) e ne presentiamo alcune fondamentali proprietà. Considerato poi l'insieme $\mathcal{L}^p(\mu)$ costituito dalle funzioni, tra quelle sopra menzionate, che sono definite in tutto Ω e assumono valori reali, facciamo vedere che tale insieme è uno spazio vettoriale reale e può inoltre essere dotato della struttura di "spazio semimetrico" (si tratta di un'ovvia generalizzazione del concetto di spazio metrico); di conseguenza $\mathcal{L}^p(\mu)$ risulta munito anche della struttura di spazio topologico. Per ottenere uno spazio metrico vero e proprio, basta identificare le funzioni uguali μ-quasi-ovunque, cioè considerare l'insieme quoziente di $\mathcal{L}^p(\mu)$ rispetto alla relazione di equivalenza

$$f \sim g \quad \Longleftrightarrow \quad f = g \quad \mu\text{−q.o.}$$

15.1. Funzioni di classe L^p.

Osservazione 15.1.1. Sia $(\Omega, \mathcal{A})$ uno spazio misurabile. Se $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ è una funzione $\mathcal{A}$-misurabile e $p \in]0, +\infty[$, allora anche la funzione $|f|^p$ ([1]) è $\mathcal{A}$-misurabile.

Infatti, fissato un qualunque $\alpha \in \mathbb{R}$, si ha

$$\{|f|^p \geq \alpha\} \quad = \quad \begin{cases} \Omega & \text{se } \alpha \leq 0\,, \\ \{|f| \geq \alpha^{\frac{1}{p}}\} & \text{se } \alpha > 0\,, \end{cases}$$

da cui, tenendo presente che la funzione $|f|$ è $\mathcal{A}$-misurabile (Corollario 12.3.4), si deduce che l'insieme $\{|f|^p \geq \alpha\}$ appartiene, in ogni caso, alla σ-algebra $\mathcal{A}$. Ciò prova che $|f|^p$ è $\mathcal{A}$-misurabile.

Anche quando f è definita μ-q.o. in Ω, ed è $\mathcal{A}$-misurabile, è vero che $|f|^p$ è una funzione $\mathcal{A}$-misurabile. Infatti $|f|^p$ ha lo stesso insieme di definizione di f, cioè un insieme $A \in \mathcal{A}$, con $\mu(A^c) = 0$, quindi anche $|f|^p$ è definita μ-q.o. in Ω; inoltre, dato che la funzione f è $A \cap \mathcal{A}$-misurabile per ipotesi, per quanto già dimostrato si ha che pure la funzione $|f|^p$ è $A \cap \mathcal{A}$-misurabile e ciò significa, per definizione, che $|f|^p$ è $\mathcal{A}$-misurabile.

Ha quindi senso la seguente definizione.

([1]) Si conviene che $(+\infty)^p = +\infty$.

Definizione 15.1.1. (*Funzioni di classe L^p*). Dati lo spazio di misura $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ e l'esponente $p \in]0, +\infty[$, si chiama *funzione μ-integrabile con l'esponente p,* o *funzione di classe L^p (rispetto allo spazio di misura* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ o, più semplicemente, *rispetto alla misura* μ), ogni funzione numerica f definita μ-q.o. in Ω, $\mathcal{A}$-misurabile e tale che

$$\int |f|^p \, d\mu \; < \; +\infty \quad .$$

Ovviamente, le funzioni di classe L^1 sono tutte e sole le funzioni μ-integrabili.

Esempi 15.1.1. 1) Rispetto allo spazio di misura $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$, dove μ è la misura su $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ individuata dalla condizione: $\mu(\{n\}) = 1 \; \forall n \in \mathbb{N}$, la funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, definita ponendo $f(n) = \frac{1}{n} \; \forall n \in \mathbb{N}$, è di classe L^p se e solo se $p > 1$. Si ha infatti, per il Teorema 13.6.2,

$$\int |f|^p \, d\mu \; = \; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \quad .$$

2) Sia ν la misura su $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ tale che $\nu(\{n\}) = \frac{1}{n^2} \; \forall n \in \mathbb{N}$. Rispetto allo spazio di misura $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \nu)$, così ottenuto, la funzione $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, definita ponendo $g(n) = n \; \forall n \in \mathbb{N}$, è di classe L^p se e solo se $0 < p < 1$. Si ha infatti, sempre per il Teorema 13.6.2,

$$\int |g|^p \, d\mu \; = \; \sum_{n=1}^{\infty} n^p \frac{1}{n^2} \; = \; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2-p}} \quad .$$

3) Rispetto allo spazio di misura

$$\Big([0,1] \, , \, [0,1] \cap \mathcal{L}_1 \, , \, \mathrm{m}_{[0,1]} \Big) \; ,$$

dove il simbolo $\mathrm{m}_{[0,1]}$ denota la restrizione della misura di Lebesgue m_1 alla σ-algebra traccia $[0,1] \cap \mathcal{L}_1$, la funzione $\frac{1}{x}$ è di classe L^p se e solo se $0 < p < 1$. Ciò segue dal Teorema 14.1.2, ricordando che la funzione $\frac{1}{x^p}$ è (assolutamente) integrabile in senso generalizzato in $[0,1]$ se e soltanto se $0 < p < 1$.

4) Rispetto allo spazio di misura

$$\Big([1, +\infty[\, , \, [1, +\infty[\cap \mathcal{L}_1 \, , \, \mathrm{m}_{[1,+\infty[} \Big) \quad ,$$

dove $\mathrm{m}_{[1,+\infty[}$ indica la restrizione di m_1 a $[1, +\infty[\cap \mathcal{L}_1$, la funzione $\frac{1}{x}$ è di classe L^p se e solo se $p > 1$. Ciò segue dal Teorema 14.1.3, ricordando che la funzione $\frac{1}{x^p}$ è (assolutamente) integrabile in senso improprio in $[1, +\infty[$ se e soltanto se $p < 1$.

Se la misura μ è finita, la μ-integrabilità con un dato esponente p implica la μ-integrabilità con ogni esponente minore di p.

Teorema 15.1.1. *Sia* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *un qualsiasi spazio di misura con* $\mu(\Omega) < +\infty$.

Rispetto a tale spazio di misura ogni funzione f *di classe* L^p *è anche di classe* L^r*, con qualsiasi esponente* r *tale che* $0 < r < p$.

Dimostrazione. Come è facile verificare, non è restrittivo supporre che la funzione f sia definita in tutto Ω (2).

Osserviamo che, in tutto Ω, è verificata la disuguaglianza

$$|f|^r \ \leq \ \max\{1, |f|^p\} \quad ;$$

infatti, fissato $\omega \in \Omega$, si hanno le seguenti due possibilità:

— $|f(\omega)| \leq 1$; in questo caso risulta $|f(\omega)|^r \leq 1$;

— $|f(\omega)| > 1$; in questo secondo caso si ha $|f(\omega)|^r \leq |f(\omega)|^p$.

Poiché le due funzioni 1 e $|f|^p$ sono entrambe μ-integrabili (1 perché $\mu(\Omega) < +\infty$ (Proposizione 13.7.4) e $|f|^p$ perché f è di classe L^p) anche la funzione $\max\{1, |f|^p\}$ è μ-integrabile (Teorema 13.7.2). Ne segue che $|f|^r$ è μ-integrabile, cioè f è di classe L^r.

I precedenti Esempi 15.1.1, 1) e 4), mostrano che nel Teorema 15.1.1 l'ipotesi $\mu(\Omega) < +\infty$ è essenziale.

Sempre in relazione al Teorema 15.1.1 è anche interessante notare che nello spazio di misura $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ dell'Esempio 15.1.1, 1) si ha una situazione che è all'opposto di quella prevista dal teorema; in tale spazio di misura, infatti, la μ-integrabilità di una data funzione con un esponente p implica la μ-integrabilità della stessa funzione con ogni esponente $r > p$.

---

(2) Infatti, una volta provato il teorema in questo caso particolare, la dimostrazione relativa al caso generale (cioè f definita μ-q.o. in Ω) si consegue subito ragionando nel modo seguente: se f è una funzione di classe L^p, allora, considerata una qualunque funzione $\mathcal{A}$-misurabile $f_1 : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$, prolungamento di f, si ha (per la definizione di integrale di una funzione definita μ-q.o.)

$$\int |f_1|^p \, d\mu \ = \ \int |f|^p \, d\mu \ < \ +\infty \quad ,$$

cioè f_1 è di classe L^p rispetto a μ; per il caso particolare già esaminato ne segue che f_1 è anche di classe L^r (con $0 < r < p$), cioè risulta

$$\int |f_1|^r \, d\mu \ < \ +\infty \quad ;$$

di conseguenza si ha pure

$$\int |f|^r \, d\mu \ = \ \int |f_1|^r \, d\mu \ < \ +\infty \quad ,$$

dunque f è di classe L^r.

Esercizio 15.1.1. Provare che, rispetto allo spazio di misura $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ dell'Esempio 15.1.1, 1), ogni funzione f di classe L^p è anche di classe L^r con qualsiasi esponente $r > p$.

Si presenta allora, in modo naturale, la questione di caratterizzare gli spazi di misura $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ rispetto ai quali la μ-integrabilità con un dato esponente p implica la μ-integrabilità con altri esponenti $r \neq p$. Lo studio di questo problema sarà affrontato nel successivo Capitolo 17, dedicato alle inclusioni tra spazi L^p.

Lemma 15.1.1 *Dato lo spazio di misura $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, siano $\varphi, \psi : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ due funzioni $\mathcal{A}$-misurabili e non negative.*

Vale l'implicazione:

$$\varphi \;\leq\; \psi \quad \mu\text{–q.o.} \qquad \Longrightarrow \qquad \int \varphi \, d\mu \;\leq\; \int \psi \, d\mu \quad .$$

Esercizio 15.1.2. Dimostrare il lemma precedente.

Dimostrare poi che il lemma continua a valere, più in generale, se all'ipotesi che le funzioni siano non negative si sostituisce l'ipotesi che esse siano μ-quasi integrabili.

Proposizione 15.1.1. *Dati lo spazio di misura $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ e l'esponente $p \in]0, +\infty[$, supponiamo che f sia una funzione numerica $\mathcal{A}$-misurabile in Ω.*

Sono fatti equivalenti:

1) *f è di classe L^p;*

2) *$|f|$ è di classe L^p;*

3) *esiste g, funzione di classe L^p, tale che $|f| \leq g$ μ-q.o.*

Dimostrazione. L'equivalenza 1) $\Longleftrightarrow$ 2) segue subito dalla Definizione 15.1.1.

L'implicazione 2) $\Longrightarrow$ 3) si prova immediatamente prendendo $g = |f|$.

Dimostriamo l'implicazione 3) $\Longrightarrow$ 2) . L'ipotesi 3) implica che esiste un insieme $A \in \mathcal{A}$, con $\mu(A^{\mathrm{C}}) = 0$, che è contenuto sia nell'insieme di definizione di f che in quello di g e per il quale risulta

$$|f(\omega)| \;\leq\; g(\omega) \qquad \forall \omega \in A \; .$$

Se consideriamo due qualsiasi funzioni numeriche $\mathcal{A}$-misurabili f_1 e g_1, definite in tutto Ω, prolungamenti, rispettivamente, di f e di g, si ha

$$|f_1(\omega)| \;\leq\; |g_1(\omega)| \qquad \forall \omega \in A \; ,$$

quindi $|f_1|^p \leq |g_1|^p$ μ-q.o. e pertanto (ricordando la definizione di integrale di una funzione definita μ-q.o. e tenendo presente il precedente Lemma 15.1.1) risulta

$$\int |f|^p \, d\mu \;=\; \int |f_1|^p \, d\mu \;\leq\; \int |g_1|^p \, d\mu \;=\; \int |g|^p \, d\mu \;<\; +\infty \quad ,$$

dunque f è di classe L^p.

Teorema 15.1.2. (Operazioni con le funzioni di classe L^p). *Dati lo spazio di misura* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *e l'esponente* $p \in]0, +\infty[$ *, supponiamo che* f *e* g *siano due funzioni di classe* L^p*. Allora anche*

$$\alpha f \ (\alpha \in \mathbb{R}) \quad , \quad f + g \quad , \quad \max\{f, g\} \quad , \quad \min\{f, g\}$$

sono funzioni di classe L^p*.*

Dimostrazione. L'ipotesi "f di classe L^p" significa che f è una funzione numerica definita in un insieme $A \in \mathcal{A}$, con $\mu(A^{\mathrm{C}}) = 0$, f è $A \cap \mathcal{A}$-misurabile e risulta

$$\int |f|^p \, d\mu \ < \ +\infty \quad ,$$

cioè

$$\int |f_1|^p \, d\mu \ < \ +\infty \quad ,$$

essendo $f_1 : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ una qualunque funzione $\mathcal{A}$-misurabile prolungamento di f. Analogamente, dire che "g è di classe L^p" significa dire che g è una funzione numerica definita in un insieme $B \in \mathcal{A}$, con $\mu(B^{\mathrm{C}}) = 0$, g è $B \cap \mathcal{A}$-misurabile e risulta

$$\int |g|^p \, d\mu \ = \ \int |g_1|^p \, d\mu \ < \ +\infty \quad ,$$

essendo $g_1 : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ una qualunque funzione $\mathcal{A}$-misurabile prolungamento di g.

Dimostriamo dapprima che ciascuna delle funzioni (15.1.1) è definita μ-q.o. in Ω ed è $\mathcal{A}$ -misurabile.

Infatti, la funzione αf è definita in A ed è $A \cap \mathcal{A}$-misurabile. Le funzioni $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$ sono definite nell'insieme

$$C \ = \ A \cap B \ \in \ \mathcal{A}$$

e si ha

$$\mu(C^{\mathrm{c}}) \ = \ \mu(A^{\mathrm{c}} \cup B^{\mathrm{c}}) \ = \ 0 \ \ ;$$

inoltre, possiamo scrivere

$$\max\{f, g\} \ = \ \max\{f_C, g_C\} \quad , \quad \min\{f, g\} \ = \ \min\{f_C, g_C\} \quad ,$$

dove f_C [risp. g_C] è la restrizione di f [risp. g] all'insieme C e, dato che, per ipotesi, la funzione f [risp. g] è $A \cap \mathcal{A}$-misurabile [risp. $B \cap \mathcal{A}$-misurabile], tale restrizione f_C [risp. g_C] è $C \cap (A \cap \mathcal{A})$-misurabile [risp. $C \cap (B \cap \mathcal{A})$-misurabile], cioè (Proposizione 13.10.5) $C \cap \mathcal{A}$-misurabile; ne segue che anche le funzioni $\max\{f, g\}$ e $\min\{f, g\}$ sono $C \cap \mathcal{A}$-misurabili. Per quanto riguarda la funzione somma $f + g$, l'insieme di definizione è

$$D \ = \ C \setminus M \quad ,$$

essendo

$$M \;=\; \big(\,\{\omega\in C\;:\;f(\omega)=+\infty\}\cap\{\omega\in C\;:\;g(\omega)=-\infty\}\,\big)\cup$$

$$\cup\big(\,\{\omega\in C\;:\;f(\omega)=-\infty\}\cap\{\omega\in C\;:\;g(\omega)=+\infty\}\,\big) \;=$$

$$=\;\big(\{f_C=+\infty\}\cap\{g_C=-\infty\}\big)\,\cup\,\big(\{f_C=-\infty\}\cap\{g_C=+\infty\}\big)\;\;.$$

Poiché le funzioni f_C e g_C sono $C\cap\mathcal{A}$-misurabili, l'insieme M appartiene a $C\cap\mathcal{A}$ e quindi ad $\mathcal{A}$; si ha inoltre $\mu(M)=0$ in quanto

$$M\;\subseteq\;\{|f_1|=+\infty\}$$

(ricordiamo che $f_1:\Omega\to\overline{\mathbb{R}}$ è un prolungamento $\mathcal{A}$-misurabile di f) e, essendo

$$\int|f_1|^p\,d\mu\;<\;+\infty\;\;,$$

si ha (Teorema 13.8.2) $|f_1|^p<+\infty$ μ-q.o., cioè $|f_1|<+\infty$ μ-q.o., vale a dire

$$\mu\big(\,\{|f_1|=+\infty\}\,\big)\;\;=\;\;0\;\;.$$

Ne segue che l'insieme D appartiene ad $\mathcal{A}$ e risulta

$$\mu(D^{\mathrm{c}})\;=\;\mu\big((C\cap M^{\mathrm{c}})^{\mathrm{c}}\big)\;=\;\mu(C^{\mathrm{c}}\cup M)\;=\;0\;\;.$$

Inoltre, dato che possiamo scrivere

$$f+g\;=\;f_D+g_D$$

(dove f_D [risp. g_D] è la restrizione di f [risp. g] a D) e che le funzioni f_D, g_D sono entrambe $D\cap\mathcal{A}$-misurabili, anche $f+g$ è $D\cap\mathcal{A}$-misurabile.

Proviamo infine che le funzioni (15.1.1) sono di classe L^p. Per la αf abbiamo

$$\int|\alpha f|^p\,d\mu\;=\;\int|\alpha f_1|^p\,d\mu\;=\;|\alpha|^p\int|f_1|^p\,d\mu\;=\;|\alpha|^p\int|f|^p\,d\mu\;<\;+\infty\;\;.$$

Per le altre tre funzioni osserviamo che μ-quasi-ovunque in Ω (e precisamente nell'insieme D per $f+g$ e nell'insieme C per $\max\{f,g\}$ e $\min\{f,g\}$) si ha

$$|f+g|\;\;\le\;\;|f|+|g|\;\;,$$

$$|\max\{f,g\}|\;\;\le\;\;|f|+|g|\;\;\;,\;\;\;|\min\{f,g\}|\;\;\le\;\;|f|+|g|\;\;,$$

per cui, per la Proposizione 15.1.1, basta provare che $|f| + |g|$ è di classe L^p. Ovviamente $|f| + |g|$ è definita in C ed è $C \cap \mathcal{A}$-misurabile; inoltre, tenendo presente la disuguaglianza

$$(a+b)^p \;\le\; 2^p(a^p + b^p) \qquad \forall a, b \in [0, +\infty] \quad (^3)\ , \tag{15.1.2}$$

si ha

$$\int (|f| + |g|)^p \, d\mu \;=\; \int (|f_1| + |g_1|)^p \, d\mu \;\le$$

$$\le\; 2^p \int |f_1|^p \, d\mu \;+\; 2^p \int |g_1|^p \, d\mu \;=\; 2^p \int |f|^p \, d\mu \;+\; 2^p \int |g|^p \, d\mu \;<\; +\infty \quad .$$

Corollario 15.1.1. *Dati lo spazio di misura $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ e l'esponente $p \in]0, +\infty[$, supponiamo che f sia una funzione numerica definita μ-q.o. in Ω.*

La funzione f è di classe L^p se e soltanto se entrambe le funzioni f^+ e f^- sono di classe L^p.

Definizione 15.1.2. (*Lo spazio vettoriale $\mathcal{L}^p(\mu)$*). Dati lo spazio di misura $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ e l'esponente $p \in]0, +\infty[$, indichiamo con $\mathcal{L}^p(\mu)$ l'insieme di tutte le funzioni $f : \Omega \to \mathbb{R}$ (funzioni reali definite in tutto Ω) che sono di classe L^p rispetto a μ. Per il Teorema 15.1.2 l'insieme $\mathcal{L}^p(\mu)$, munito delle abituali operazioni di moltiplicazione di uno scalare per una funzione e di addizione di due funzioni, è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

15.2. Le disuguaglianze di Hölder e di Minkowski.

Definizione 15.2.1. (*Esponenti coniugati*). Dati due esponenti $p, q \in]0, +\infty[$, si dice che p e q sono *coniugati* se

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad . \tag{15.2.1}$$

Ad esempio, una coppia notevole coppia di esponenti coniugati è $p = q = 2$.

Dalla (15.2.1) segue subito che, se p e q sono esponenti coniugati, allora p e q sono entrambi numeri maggiori di uno; inoltre, fissato un qualunque esponente $p > 1$, il suo esponente coniugato q esiste ed è dato da

$$q \;=\; \frac{p}{p-1} \quad .$$

(^{3}) Per provare la (15.1.2) basta osservare che

— se $a \le b$, allora $(a+b)^p \le (2b)^p \le 2^p(a^p + b^p)$;

— se $a \ge b$, allora $(a+b)^p \le (2a)^p \le 2^p(a^p + b^p)$.

Lemma 15.2.1. *Siano p, q esponenti coniugati. Si ha*

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \qquad \forall a, b \in [0, +\infty[\ . \tag{15.2.2}$$

Dimostrazione. La (15.2.2) è ovviamente verificata se $a = 0$ oppure $b = 0$.

Se $a, b > 0$ ragioniamo nel modo seguente. Consideriamo la funzione $\varphi : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definita ponendo

$$\varphi(t) = \frac{t^p}{p} + \frac{b^q}{q} - bt \qquad \forall t \in [0, +\infty[$$

e studiamo la monotonia di tale funzione. Si ha

$$\varphi'(t) = t^{p-1} - b \qquad \forall t \in [0, +\infty[\ ,$$

quindi φ è decrescente nell'intervallo $\left[0, b^{\frac{1}{p-1}}\right]$ e crescente in $\left[b^{\frac{1}{p-1}}, +\infty\right[$. Ne segue che è

$$\varphi(t) \ge \varphi\left(b^{\frac{1}{p-1}}\right) \qquad \forall t \in [0, +\infty[\ .$$

D'altra parte si ha

$$\varphi\left(b^{\frac{1}{p-1}}\right) = \frac{b^{\frac{p}{p-1}}}{p} + \frac{b^q}{q} - b^{1+\frac{1}{p-1}} =$$

(ricordando che $q = \frac{p}{p-1}$)

$$= b^q\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) - b^{\frac{p}{p-1}} = b^q - b^q = 0 \ ,$$

quindi

$$\varphi(t) \ge 0 \qquad \forall t \in [0, +\infty[$$

e, in particolare,

$$\varphi(a) \ge 0 \ ,$$

cioè vale la (15.2.2).

Osservazione 15.2.1. Notiamo che nella (15.2.2) vale l'uguaglianza se e solo se $a^p = b^q$. Ciò è ovvio se $a = 0$ oppure $b = 0$. Se $a, b > 0$ la dimostrazione del lemma implica che la (15.2.2) è verificata con il segno $=$ se e solo se

$$a = b^{\frac{1}{p-1}} \ ,$$

cioè (innalzando all'esponente p) se e solo se $a^p = b^q$.

Teorema 15.2.1. (Disuguaglianza di Hölder). *Dato lo spazio di misura* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *, supponiamo che* f, g *siano due funzioni numeriche* $\mathcal{A}$*-misurabili in* Ω*. Siano, inoltre,* p, q *due esponenti coniugati. Si ha allora*

$$\int |fg| d\mu \quad \leq \quad \left(\int |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |g|^q \, d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \quad . \tag{15.2.3}$$

Dimostrazione. Non è restrittivo supporre che entrambe le funzioni f e g siano definite in tutto l'insieme Ω (in caso contrario basta riferirsi a due loro prolungamenti $\mathcal{A}$-misurabili definiti in tutto Ω).

Poniamo

$$A \;=\; \left(\int |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \quad , \quad B \;=\; \left(\int |g|^q \, d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \quad .$$

Osserviamo che, se è $A = 0$ oppure $B = 0$, la (15.2.3) è verificata con il segno $=$. Infatti, se è, ad esempio, $A = 0$, cioè $\int |f|^p \, d\mu = 0$, allora, per la Proposizione 13.8.1, si ha $|f|^p = 0$ μ-q.o., cioè $f = 0$ μ-q.o.; conseguentemente si ha pure $fg = 0$ μ-q.o. e pertanto $\int |fg| \, d\mu = 0$.

Supponiamo allora $A, B > 0$ e osserviamo ancora che la (15.2.3) è certamente verificata se $A = +\infty$ oppure $B = +\infty$.

Supponiamo quindi che sia $0 < A, B < +\infty$.

Dal Lemma 15.2.1 segue che in tutto Ω è verificata la disuguaglianza

$$\frac{|fg|}{AB} \quad \leq \quad \frac{|f|^p}{pA^p} \; + \; \frac{|g|^q}{qB^q} \tag{15.2.4}$$

(la (15.2.4) si ottiene applicando il Lemma 15.2.1 con $a = \frac{f(\omega)}{A}$, $b = \frac{g(\omega)}{B}$ nei punti $\omega \in \Omega$ tali che $|f(\omega)|, |g(\omega)| < +\infty$; invece, nei punti $\omega \in \Omega$ tali che $|f(\omega)| = +\infty$ oppure $|g(\omega)| = +\infty$ la (15.2.4) è ovviamente soddisfatta). Dalla (15.2.4), passando agli integrali e ricordando la definizione di A e B, si ottiene

$$\frac{1}{AB} \int |fg| \, d\mu \quad \leq \quad \frac{1}{pA^p} \int |f|^p \, d\mu \; + \; \frac{1}{qB^q} \int |g|^q \, d\mu \quad = \quad \frac{1}{p} \; + \; \frac{1}{q} \quad = \quad 1$$

e quindi, moltiplicando per AB, si ha la tesi.

Corollario 15.2.1. *Dato lo spazio di misura* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *, supponiamo che* f *sia una funzione di classe* L^p *e* g *sia una due funzione di classe* L^q*, con* p *e* q *esponenti coniugati. Allora* fg *è di classe* L^1*.*

Corollario 15.2.2. *Dato lo spazio di misura* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *, supponiamo che la funzione* f *sia, nel contempo, di classe* L^{p_1} *e di classe* L^{p_2}*, con* $p_1 < p_2$ *.*

Allora f *è di classe* L^r*, qualunque sia* $r \in [p_1, p_2]$ *.*

Dimostrazione. Se $r \in]p_1, p_2[$, possiamo scrivere $r = (1-t)p_1 + tp_2$ con $t \in]0,1[$. Ne segue che la funzione

$$|f|^r \;=\; |f|^{(1-t)p_1} |f|^{tp_2}$$

è di classe L^1 (cioè f è di classe L^r) in virtù del precedente corollario; infatti la funzione $|f|^{(1-t)p_1}$ è di classe $L^{\frac{1}{1-t}}$ e la funzione $|f|^{tp_2}$ è di classe $L^{\frac{1}{t}}$; inoltre $\frac{1}{1-t}$ e $\frac{1}{t}$ sono, ovviamente, esponenti coniugati.

Dal Corollario 15.2.2 segue che, in un qualsiasi spazio di misura $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, per ogni funzione numerica f, $\mathcal{A}$-misurabile in Ω, si ha che l'insieme $\sigma(f)$, costituito dagli esponenti $p \in]0, +\infty[$ tali che la funzione f risulti di classe L^p, è un sottointervallo (eventualmente degenere) di $]0, +\infty[$. Sappiamo anche, però, che vi sono degli spazi di misura nei quali $\sigma(f)$ non può essere un qualunque sottointervallo di $]0, +\infty[$. Ad esempio, se $\mu(\Omega) < +\infty$, allora, per il Teorema 15.1.1, l'intervallo $\sigma(f)$, se non vuoto, è tale che $\inf \sigma(f) = 0$. Invece, nel caso dello spazio di misura dell'Esempio 15.1.1, 1), quando è $\sigma(f) \neq \emptyset$, risulta sempre $\sup \sigma(f) = +\infty$ (cfr. l'Esercizio 15.1.1).

L'esempio successivo mostra che esistono spazi di misura per i quali l'insieme $\sigma(f)$ può effettivamente essere un qualsiasi sottointervallo di $]0, +\infty[$.

Esempio 15.2.1. Mostriamo che, nello spazio di misura $(\mathbb{R}, \mathcal{L}_1, \mathrm{m}_1)$, assegnato un qualunque intervallo $I \subseteq]0, +\infty[$, esiste sempre una funzione f, misurabile secondo Lebesgue in $\mathbb{R}$, tale che l'insieme

$$\sigma(f) \;=\; \big\{ p \in]0, +\infty[\;:\; f \text{ è di classe } L^p \big\}$$

coincida con l'intervallo I.

Consideriamo, a tale scopo, le due funzioni $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ così definite:

$$g(x) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0\,, \\ \dfrac{1}{x} & \text{se } x > 0\,, \end{cases} \qquad h(x) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0\,, \\ \dfrac{1}{x(1+\log^2 x)} & \text{se } x > 0\,. \end{cases}$$

Entrambe le funzioni sono generalmente continue in $\mathbb{R}$ (0 è l'unico punto di discontinuità per ciascuna di esse) e perciò misurabili secondo Lebesgue in $\mathbb{R}$ (Proposizione 14.1.3).

Ricordiamo che la funzione $\frac{1}{x^p}$ ($p \in]0, +\infty[$) è (assolutamente) integrabile in senso generalizzato nell'intervallo $[0, c]$ ($c > 0$) se e solo se $0 < p < 1$ e (assolutamente) integrabile in senso improprio in $[c, +\infty[$ se e solo $p > 1$. Ne segue che, posto

$$g_0 \;=\; g\,\mathbb{1}_{[0,c]} \qquad , \qquad g_\infty \;=\; g\,\mathbb{1}_{[c,+\infty[} \quad ,$$

risulta

$$\sigma(g_0) \;=\;]0,1[\qquad , \qquad \sigma(g_\infty) \;=\;]1,+\infty[\quad .$$

Consideriamo adesso la funzione

$$\frac{1}{x^p(1+\log^2 x)^p} \qquad (p \in]0, +\infty[\,)$$

e proviamo che tale funzione è (assolutamente) integrabile in senso generalizzato in $[0, c]$ se e solo se $0 < p \leq 1$. Infatti, per $p = 1$ si ha

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{\varepsilon}^{c} \frac{1}{x(1 + \log^2 x)}\, dx \quad = \quad \lim_{\varepsilon \to 0+} \Big[\text{arctg} \, \log x \Big]_{\varepsilon}^{c} \quad = \quad \text{arctg} \, \log c + \frac{\pi}{2} \quad ;$$

per $0 < p < 1$ l'integrabilità segue dalla disuguaglianza

$$\frac{1}{x^p (1 + \log^2 x)^p} \;\leq\; \frac{1}{x^p} \qquad\qquad \forall x \in [0, c]$$

e dall'integrabilità di $\frac{1}{x^p}$; infine, per $p > 1$, si ragiona nel modo seguente: fissato un esponente r tale che $1 < r < p$, si osserva che è

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\dfrac{1}{x^r}}{\dfrac{1}{x^p (1 + \log^2 x)^p}} \quad = \quad \lim_{x \to 0+} x^{p-r} (1 + \log^2 x)^p \quad = \quad 0 \quad ,$$

pertanto la funzione continua

$$\frac{\dfrac{1}{x^r}}{\dfrac{1}{x^p (1 + \log^2 x)^p}}$$

è limitata superiormente nell'intervallo $]0, c]$; denotato con M un maggiorante di tale funzione, si ha

$$\frac{1}{x^r} \;\leq\; M \frac{1}{x^p (1 + \log^2 x)^p} \qquad\qquad \forall x \in]0, c] \;;$$

conseguentemente, dato che $\frac{1}{x^r}$ non è integrabile in $[0, c]$, non lo è neanche $\frac{1}{x^p (1 + \log^2 x)^p}$.

Con considerazioni perfettamente analoghe si prova che $\frac{1}{x^p (1 + \log^2 x)^p}$ è (assolutamente) integrabile in senso improprio in $[c, +\infty[$ se e solo se $p \geq 1$.

Da quanto precede segue ovviamente che, posto

$$h_0 \;=\; h \, \mathbb{1}_{[0,c]} \qquad , \qquad h_\infty \;=\; h \, \mathbb{1}_{[c,+\infty[} \quad ,$$

risulta

$$\sigma(h_0) \;=\;]0, 1] \qquad , \qquad \sigma(h_\infty) \;=\; [1, +\infty[\quad .$$

A questo punto è facile provare che, fissato un qualunque intervallo $I \subseteq]0, +\infty[$, esiste, in corrispondenza, una funzione f, misurabile secondo Lebesgue in $\mathbb{R}$, tale che $\sigma(f) = I$.

Fatti salvi i casi $I = \mathbb{R}$ e $I = \emptyset$, nei quali basta considerare, rispettivamente, le funzioni costanti 0 e 1, osserviamo che, quando è $\inf I = 0$ oppure $\sup I = +\infty$, basta scegliere, opportunamente, una delle quattro funzioni g_0, h_0, g_∞ e h_∞, prima definite, e considerare una opportuna potenza di tale funzione; ad esempio, per far sì che risulti $\sigma(f) =]0,s]$ $(s>0)$, basta prendere $f = h_0^{\frac{1}{s}}$.

Esaminiamo, infine, il caso di un intervallo I tale che $\inf I > 0$ e $\sup I < +\infty$ e supponiamo, per fissare le idee, che sia $I = [r,s[$ $(0<r<s)$. Posto

$$f \;=\; g_0^{\frac{1}{s}} \;+\; h_\infty^{\frac{1}{r}} \quad ,$$

dal momento che $g_0^{\frac{1}{s}}$ è di classe L^p se e solo se $p \in]0,s[$ e $h_\infty^{\frac{1}{r}}$ è di classe L^p se e solo se $p \in [r,+\infty[$, per il Teorema 15.1.2 si ha che f è di classe L^p per ogni $p \in [r,s[$; d'altra parte, dato che in tutto $\mathbb{R}$ valgono le disuguaglianze

$$0 \;\le\; h_\infty^{\frac{1}{r}} \;\le\; f \qquad , \qquad 0 \;\le\; g_0^{\frac{1}{s}} \;\le\; f \quad ,$$

per la Proposizione 15.1.1 la funzione f non può essere di classe L^p né per $p<r$ (per via della prima disuguaglianza) né per $p \ge s$ (per via della seconda); pertanto si ha

$$\sigma(f) \;=\; [r,s[\quad .$$

Gli altri casi di intervalli I tali che $\inf I > 0$ e $\sup I < +\infty$ si trattano in maniera analoga. In particolare, se si vuole che sia $\sigma(f) = \{r\}$, basta prendere

$$f \;=\; h_0^{\frac{1}{r}} \;+\; h_\infty^{\frac{1}{r}}$$

o, più semplicemente,

$$f \;=\; h^{\frac{1}{r}} \quad .$$

Esercizio 15.2.1. Provare che la funzione

$$\frac{1}{x^p(1+\log^2 x)^p}$$

è integrabile secondo Lebesgue in $[c,+\infty[$ $(c>0)$ se e soltanto se $p \ge 1$.

Proposizione 15.2.1. (Il caso dell'uguaglianza nella disuguaglianza di Hölder). *Dato lo spazio di misura $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, supponiamo che f sia una funzione di classe L^p e g sia una funzione di classe L^q, con p e q esponenti coniugati.*

Nella disuguaglianza di Hölder (15.2.3) *vale il segno $=$ se e soltanto se esistono due costanti reali α, β, non entrambe nulle, tali che*

$$\alpha|f|^p \;=\; \beta|g|^q \qquad \mu\text{−q.o.} \tag{15.2.5}$$

Dimostrazione. Se vale la (15.2.5) ed è, per esempio, $\alpha \neq 0$, allora si ha

$$|f|^p \;=\; \gamma|g|^q \qquad \mu\text{−q.o.} \tag{15.2.6}$$

con γ costante reale. Dalla (15.2.6) segue

$$|f| \;=\; \gamma^{\frac{1}{p}} |g|^{\frac{q}{p}} \;=\; \gamma^{\frac{1}{p}} |g|^{\frac{1}{p-1}} \qquad \mu\text{−q.o.}$$

e quindi

$$\int |fg|\, d\mu \;=\; \gamma^{\frac{1}{p}} \int |g|^{\frac{1}{p-1}+1}\, d\mu \;=\; \gamma^{\frac{1}{p}} \int |g|^q\, d\mu \;\; ;$$

d'altra parte, sempre per la (15.2.6), si ha

$$\Big(\int |f|^p\, d\mu\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int |g|^q\, d\mu\Big)^{\frac{1}{q}} \;=\; \gamma^{\frac{1}{p}} \Big(\int |g|^q\, d\mu\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int |g|^q\, d\mu\Big)^{\frac{1}{q}} \;=\; \gamma^{\frac{1}{p}} \int |g|^q\, d\mu \;\; ,$$

pertanto la (15.2.3) è verificata con il segno $=$.

Viceversa, supponiamo che nella (15.2.3) valga il segno $=$. Supponiamo inoltre (è facile rendersi conto del fatto che ciò non è restrittivo) che le funzioni f e g siano definite in tutto Ω ed assumano valori reali. Posto, come nella dimostrazione del Teorema 15.2.1,

$$A \;=\; \Big(\int |f|^p\, d\mu\Big)^{\frac{1}{p}} \quad , \quad B \;=\; \Big(\int |g|^q\, d\mu\Big)^{\frac{1}{q}} \quad ,$$

osserviamo subito che, se $A = 0$ [risp. $B = 0$] (nel qual caso, come sappiamo, la (15.2.3) è verificata con il segno $=$), allora la (15.2.5) è soddisfatta con $\alpha = 1$, $\beta = 0$ [risp. $\alpha = 0$, $\beta = 1$]. Se, invece, $A, B > 0$, allora la dimostrazione del Teorema 15.2.1 implica che nella (15.2.3) vale il segno $=$ se e solo se è

$$\frac{|fg|}{AB} \;=\; \frac{|f|^p}{pA^p} + \frac{|g|^q}{qB^q} \qquad \mu\text{−q.o.} \;\; ; \tag{15.2.7}$$

infatti, ricordando i passaggi eseguiti per la dimostrazione della (15.2.3), si ha che l'uguaglianza

$$\int |fg| d\mu \;=\; \Big(\int |f|^p\, d\mu\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int |g|^q\, d\mu\Big)^{\frac{1}{q}}$$

può scriversi

$$\int \frac{|fg|}{AB}\, d\mu \;=\; \int \Big[\frac{|f|^p}{pA^p} + \frac{|g|^q}{qB^q}\Big]\, d\mu \;\; ,$$

cioè

$$\int \Big[\frac{|f|^p}{pA^p} + \frac{|g|^q}{qB^q} - \frac{|fg|}{AB}\Big]\, d\mu \;=\; 0$$

e quest'ultima, tenuto conto della (15.2.4), si verifica, per la Proposizione 13.8.1, se e solo se vale la (15.2.7). D'altra parte, per l'Osservazione 15.2.1, la (15.2.7) equivale a

$$\frac{|f|^p}{A^p} \;=\; \frac{|g|^q}{B^q} \qquad \mu\text{−q.o.}$$

Ciò completa la dimostrazione.

Osservazione 15.2.2. Osserviamo che, nella precedente proposizione, l'ipotesi che le funzioni f e g siano, rispettivamente, di classe L^p e di classe L^q viene utilizzata solo per provare che dal sussistere dell'uguaglianza nella (15.2.3) segue la (15.2.5). Osserviamo ancora che, al fine di garantire tale implicazione, la suddetta ipotesi è essenziale. Ciò è mostrato dal successivo esempio.

Esempio 15.2.2. Sia $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ il seguente spazio di misura:

$$\Omega \;=\; \{a,b\} \quad ; \quad \mathcal{A} \;=\; \mathcal{P}(\Omega) \quad ; \quad \mu(\{a\}) \;=\; \mu(\{b\}) \;=\; 1 \ .$$

Consideriamo le seguenti due funzioni da Ω in $\overline{\mathbb{R}}$:

$$f(\omega) \;=\; 1 \quad \forall \omega \in \Omega \qquad ; \qquad g(\omega) \;=\; \begin{cases} 1 & \text{se } \ \omega = a \ , \\ +\infty & \text{se } \ \omega = b \ . \end{cases}$$

Si ha allora

$$\left(\int |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \;=\; 2^{\frac{1}{p}} \qquad , \qquad \left(\int |g|^q \, d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \;=\; +\infty \ ,$$

$$\int |fg| d\mu \;=\; +\infty \ ,$$

quindi nella disuguaglianza di Hölder vale il segno $=$. Tuttavia, come è evidente, non esiste alcuna coppia di costanti reali, non entrambe nulle, per cui è verificata la (15.2.5).

Teorema 15.2.2. (Disuguaglianza di Minkowski). *Dato lo spazio di misura $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, supponiamo che f, g siano due funzioni numeriche $\mathcal{A}$-misurabili in Ω e che la funzione somma $f + g$ sia definita μ-q.o. in Ω. Sia, inoltre, $p \in [1, +\infty[$. Si ha allora*

$$\left(\int |f+g|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \;\leq\; \left(\int |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int |g|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \ . \tag{15.2.8}$$

Dimostrazione. Non è restrittivo supporre che tutte e tre le funzioni f, g e $f+g$ siano definite in tutto Ω ([3]) e che sia $\int |f+g|^p \, d\mu \;>\; 0$.

([3]) Infatti, una volta trattato questo caso particolare, la validità della (15.2.8) in generale si acquisisce nel modo seguente. Denotate con f_1 e g_1 due qualsiasi funzioni numeriche $\mathcal{A}$-misurabili definite in tutto Ω, prolungamenti, rispettivamente, di f e di g ed indicato con C l'insieme di definizione di $f+g$, consideriamo le due funzioni $\mathcal{A}$-misurabili (definite in tutto Ω)

$$f_2 \;=\; f_1 \mathbb{1}_C \quad , \quad g_2 \;=\; g_1 \mathbb{1}_C \ .$$

Si ha $f_2 = f_1$ μ-q.o., $g_2 = g_1$ μ-q.o. Inoltre la funzione $f_2 + g_2$ è definita in tutto Ω ed è un prolungamento di $f+g$. Per il caso particolare già studiato si ha

$$\left(\int |f_2+g_2|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \;\leq\; \left(\int |f_2|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int |g_2|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \ ,$$

ma, per quanto osservato sulle funzioni f_2 e g_2, questa disuguaglianza non è altro che la (15.2.8).

Se $p = 1$ la tesi segue dalla disuguaglianza triangolare $|f + g| \leq |f| + |g|$.

Se $p > 1$, si ha, in tutto Ω,

$$|f+g|^p \;=\; |f+g|^{p-1}|f+g| \;\leq\; |f+g|^{p-1}|f| \;+\; |f+g|^{p-1}|g| \quad ,$$

da cui, integrando ed applicando la disuguaglianza di Hölder a ciascuno dei due addendi al secondo membro (con l'esponente $q = \frac{p}{p-1}$ per il fattore $|f + g|^{p-1}$ e l'esponente p per i fattori $|f|$ e $|g|$), si ricava

$$\int |f+g|^p \, d\mu \;\;\leq\;\; \left(\int |f+g|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \left[\left(\int |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int |g|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\right] \quad ;$$

per ottenere la tesi basta allora dividere per

$$\left(\int |f+g|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \quad .$$

Osservazione 15.2.3. Per $0 < p < 1$ la disuguaglianza di Minkowski può essere falsa. Consideriamo in proposito il seguente esempio.

Esempio 15.2.3. Sia $(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \,=\, (\mathbb{R}, \mathcal{L}_1, \mathrm{m}_1)$ e siano

$$f \;=\; \mathbb{1}_{[0,1[} \quad , \quad g \;=\; \mathbb{1}_{[1,2[} \quad .$$

Per ogni $p \in \,]0, +\infty[\,$, dato che $f + g = \mathbb{1}_{[0,2[}$, si ha

$$\left(\int |f+g|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \;=\; 2^{\frac{1}{p}} \quad ;$$

si ha inoltre

$$\left(\int |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \;=\; \left(\int |g|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \;=\; 1 \quad ,$$

quindi la (15.2.8) diviene

$$2^{\frac{1}{p}} \;\leq\; 2 \quad ,$$

disuguaglianza falsa per $p < 1$.

Nel caso $p < 1$ la disuguaglianza di Minkowski è rimpiazzata dalla successiva disuguaglianza (15.2.9).

Teorema 15.2.3. *Dato lo spazio di misura* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *, supponiamo che* f, g *siano due funzioni numeriche* $\mathcal{A}$*-misurabili in* Ω *e che la funzione somma* $f + g$ *sia definita* μ*-q.o. in* Ω*. Sia, inoltre,* $p \in]0, 1[$ *. Si ha allora*

$$\int |f + g|^p \, d\mu \quad \leq \quad \int |f|^p \, d\mu + \int |g|^p \, d\mu \quad . \tag{15.2.9}$$

Dimostrazione. Non è restrittivo supporre che le funzioni f, g e $f + g$ siano definite in tutto Ω (ci si convince di ciò con un ragionamento analogo a quello svolto nella nota [3]).

La (15.2.9) è un'immediata conseguenza della disuguaglianza (verificata in tutto Ω)

$$|f + g|^p \ \leq \ |f|^p + |g|^p \quad ,$$

che, a sua volta, discende dal lemma successivo.

Lemma 15.2.2. *Siano* $p \in]0, 1[$ *. Si ha allora*

$$(a + b)^p \ \leq \ a^p \, + \, b^p \qquad \forall a, b \in [0, +\infty[\ . \tag{15.2.10}$$

Dimostrazione. La (15.2.10) è verificata con il segno $=$ se $a = 0$ oppure $b = 0$.

Se $a, b > 0$, studiando la funzione $\varphi : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definita ponendo

$$\varphi(t) \ = \ (t + b)^p - t^p - b^p \qquad \forall t \in [0, +\infty[\ ,$$

si trova che φ è decrescente in $[0, +\infty[$ e che $\varphi(0) = 0$. Ne segue che

$$\varphi(t) \leq 0 \qquad \forall t \in [0, +\infty[$$

e, in particolare, $\varphi(a) \leq 0$, che è la tesi.

15.3. Spazi semimetrici.

Definizione 15.3.1. (*Semimetrica*). Sia S un insieme non vuoto. Si chiama *semimetrica* su S ogni funzione

$$d \, : \, S \times S \to \mathbb{R}$$

tale che

1) $d(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y \in S$;
2) $d(x, x) = 0 \quad \forall x \in S$;
3) $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in S$;
4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad \forall x, y, z \in S$.

In altre parole una semimetrica è un'applicazione $d : S \times S \to \mathbb{R}$ che verifica tutti i postulati che debbono essere soddisfatti da una metrica, fatta eccezione, eventualmente, per

$$d(x,y) = 0 \implies x = y \ .$$

Un facile esempio di semimetrica che non è una metrica si ottiene considerando $S = \mathbb{R}^2$ e ponendo

$$d(x,y) = |x_1 - y_1|$$

per ogni coppia $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ di elementi di $\mathbb{R}^2$.

Definizione 15.3.2. (*Spazio semimetrico*). Si chiama spazio semimetrico ogni coppia (S,d), dove S è un insieme non vuoto e d è una semimetrica su S.

Ogni spazio semimetrico (S,d) è dotato, in modo naturale, della struttura di spazio topologico nella maniera di seguito descritta (si tratta di un'ovvia generalizzazione di ciò che si fa nel caso degli spazi metrici). Si definisce, per ogni $x \in S$ ed ogni $r > 0$, il *semidisco aperto* $B(x,r)$, di centro x e raggio r, ponendo

$$B(x,r) = \{y \in S \, : \, d(y,x) < r\} \ ;$$

si definisce poi, per ogni $x \in S$, la famiglia $\mathcal{U}(x)$ degli intorni di x ponendo:

$$U \in \mathcal{U}(x) \iff U \subseteq S \text{ e } U \supseteq B(x,r) \text{ per qualche } r > 0 \, . \tag{15.3.1}$$

È facile provare (generalizzando i ragionamenti adottati nel caso degli spazi metrici) che in questo modo sono verificati tutti i postulati che, in uno spazio topologico, debbono essre soddisfatti dalle famiglie degli intorni.

Si verifica inoltre che lo spazio topologico risultante è di Hausdorff se e solo se d è una metrica e che, in tale spazio topologico, una successione $\{x_n\}$ converge ad un elemento x se e solo se $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$.

Se d non è una metrica, per le successioni $\{x_n\}$ non vale, in generale, il teorema di unicità del limite; si prova infatti, adoperando la precedente caratterizzazione della convergenza, che, se una successione $\{x_n\}$ converge in S ad un elemento x, allora la stessa successione $\{x_n\}$ converge verso tutti e soli gli elementi $y \in S$ tali che $d(y,x) = 0$.

La definizione di successione di Cauchy in uno spazio semimetrico (S,d) si dà in modo ovvio: $\{x_n\}$ si dice di Cauchy se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \overline{n} \in \mathbb{N} \, : \quad d(x_n, x_m) < \varepsilon \quad \forall n, m \geq \overline{n} \ .$$

Vale ancora il teorema: "Ogni successione convergente è di Cauchy", mentre, in generale, non è detto che una successione di Cauchy sia convergente.

Si dice che uno spazio semimetrico (S,d) è *completo* se ogni successione di Cauchy in (S,d) è convergente a qualche elemento di S.

Infine, dato un qualunque spazio semimetrico (S,d), resta individuato uno spazio metrico (S^*,d^*) (che viene detto lo spazio metrico *associato* a (S,d)) nel seguente modo. Si introduce in S la relazione binaria $\sim$:

$$x \sim y \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} d(x,y) = 0 \ ,$$

che, come immediatamente si verifica, è una relazione di equivalenza. Denotato con S^* l'insieme quoziente $S/\sim$, si definisce un'applicazione $d^* : S^* \times S^* \to \mathbb{R}$ ponendo, per ogni $x^*, y^* \in S^*$,

$$d^*(x^*,y^*) = d(x,y) \ ,$$

dove x [risp. y] è un qualunque elemento della classe di equivalenza x^* [risp. y^*]. Si prova facilmente che l'applicazione d^* è ben definita ed è una metrica su S^*.

Dalla definizione di d^* segue, ovviamente, che la convergenza in (S^*,d^*) di una successione $\{x_n^*\}$ ad un elemento x^* equivale alla convergenza in (S,d) di una qualsiasi delle successioni $\{x_n\}$, che si ottengono prendendo, per ogni $n \in \mathbb{N}$, un qualunque elemento x_n della classe di equivalenza x_n^*, ad un qualunque elemento x appartenente alla classe di equivalenza x^*. Di conseguenza si ha pure l'equivalenza

$$(S,d) \ \text{completo} \quad \Longleftrightarrow \quad (S^*,d^*) \ \text{completo} \quad .$$

15.4. Lo spazio semimetrico $\mathcal{L}^p(\mu)$.

Dati lo spazio di misura $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ e l'esponente $p \in]0,+\infty[$, consideriamo lo spazio vettoriale $\mathcal{L}^p(\mu)$ (Definizione 15.1.2) ed osserviamo che ponendo, per ogni $f,g \in \mathcal{L}^p(\mu)$,

$$d_p(f,g) = \Big(\int |f-g|^p \, d\mu\Big)^{\frac{1}{p}} \qquad \text{se } \ p \geq 1 \ ,$$

$$d_p(f,g) = \int |f-g|^p \, d\mu \qquad \text{se } \ 0 < p < 1 \ ,$$

si ottiene una semimetrica d_p sull'insieme $\mathcal{L}^p(\mu)$. La verifica dei postulati 1) – 4) è abbastanza facile; osserviamo soltanto che, per provare la disuguaglianza triangolare

$$d_p(f,g) \leq d_p(f,h) + d_p(h,g) \qquad \forall f,g,h \in \mathcal{L}^p(\mu) \ ,$$

basta applicare opportunamente la disuguaglianza di Minkowski nel caso $p \geq 1$ e la (15.2.9) nel caso $0 < p < 1$.

D'ora in avanti l'insieme $\mathcal{L}^p(\mu)$ sarà da noi considerato, oltre che spazio vettoriale, anche spazio semimetrico con la semimetrica d_p.

Osserviamo che nello spazio semimetrico $(\mathcal{L}^p(\mu), d_p)$ si ha (per la Proposizione 13.8.1)

$$d_p(f,g) \ = \ 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f = g \ \ \mu\text{−q.o.} \quad ;$$

pertanto sussiste la seguente proposizione.

Proposizione 15.4.1. *La semimetrica d_p è una metrica se e soltanto se l'insieme vuoto è l'unico insieme $M \in \mathcal{A}$ tale che $\mu(M) = 0$.*

Lo spazio metrico associato a $(\mathcal{L}^p(\mu), d_p)$ si indica con $(L^p(\mu), d_p^*)$.

L'insieme $L^p(\mu)$ è quindi l'insieme quoziente di $\mathcal{L}^p(\mu)$ rispetto alla relazione di equivalenza

$$f \ \sim \ g \quad \Longleftrightarrow \quad f = g \ \ \mu\text{−q.o.}$$

Spesso, in letteratura, data una funzione $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$, con abuso di linguaggio, facendo volutamente confusione tra funzioni e classi di equivalenza di funzioni, si dice che "f appartiene a $L^p(\mu)$" ([4]); è inoltre frequente l'uso dello stesso simbolo d_p, invece di d_p^*, per indicare la metrica associata alla semimetrica d_p.

Ritornando alla relazione di equivalenza $\sim$, osserviamo che l'insieme $\mathcal{N}$ costituito da tutte le funzioni $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$, $\mathcal{A}$-misurabili e tali che $\varphi = 0$ μ-q.o., è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{L}^p(\mu)$, qualunque sia $p \in]0, +\infty[$, e si ha

$$d_p(f,g) \ = \ 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f - g \ \in \ \mathcal{N} \quad .$$

Ne segue che l'insieme $L^p(\mu)$ è uguale al quoziente

$$\mathcal{L}^p(\mu)/_{\mathcal{N}} \quad ,$$

quindi anche $L^p(\mu)$ è uno spazio vettoriale (lo spazio vettoriale quoziente).

Proposizione 15.4.2. *$L^p(\mu)$ contiene elementi diversi da zero se e solo se esiste almeno un insieme $A \in \mathcal{A}$ con $0 < \mu(A) < +\infty$.*

Dimostrazione. $L^p(\mu)$ contiene elementi diversi da zero se e solo se

$$\mathcal{L}^p(\mu) \ \setminus \ \mathcal{N} \ \neq \ \emptyset \quad .$$

Se esiste $A \in \mathcal{A}$, con $0 < \mu(A) < +\infty$, è immediato verificare che risulta

$$\mathbb{1}_A \ \in \ \mathcal{L}^p(\mu) \ \setminus \ \mathcal{N} \quad .$$

Viceversa, se h è una funzione appartenente a $\mathcal{L}^p(\mu) \setminus \mathcal{N}$, l'insieme $\{h \neq 0\}$ ha misura positiva; di conseguenza, posto

$$A_n \ = \ \left\{|h| \geq \tfrac{1}{n}\right\} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \ ,$$

([4]) Tale locuzione viene talvolta adoperata anche per le funzioni di classe L^p (quindi anche per funzioni che non sono necessariamente elementi di $\mathcal{L}^p(\mu)$).

dato che $A_n \uparrow \{|h| > 0\} = \{h \neq 0\}$, anche A_n ha misura positiva per n sufficientemente grande. D'altra parte, essendo $h \in \mathcal{L}^p(\mu)$, si ha pure, in virtù del successivo teorema,

$$\mu(A_n) \;\leq\; n^p \int |f|^p \, d\mu \;<\; +\infty \qquad\qquad \forall n \in \mathbb{N} \ ,$$

dunque è $0 < \mu(A_n) < +\infty$ per n sufficientemente grande.

Teorema 15.4.1. (Disuguaglianza di Čebičev). *Sia* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *uno spazio di misura e sia* $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ *una qualunque funzione* $\mathcal{A}$*-misurabile.*

Per ogni numero reale $\alpha > 0$ *ed ogni esponente* $p \in]0, +\infty[$ *si ha*

$$\mu\big(\{|f| \geq \alpha\}\big) \quad \leq \quad \frac{1}{\alpha^p} \int |f|^p \, d\mu \quad .$$

Dimostrazione. Sia $A = \{|f| \geq \alpha\}$. Si ha

$$|f|^p \;\geq\; \alpha^p \mathbb{1}_A \quad .$$

Integrando e dividendo per α^p si ottiene la tesi.

Completiamo questo paragrafo osservando che per $p \geq 1$ lo spazio $L^p(\mu)$ è uno spazio normato.

Definizione 15.4.1. (*Norma*). Sia S uno spazio vettoriale su Φ ($\Phi = \mathbb{R}$ o $\Phi = \mathbb{C}$). Si chiama *norma* su S ogni applicazione

$$x \;\;\to\;\; \|x\| \ ,$$

da S in $\mathbb{R}$, tale che

N$_1$) $\|x\| \;\geq\; 0 \quad \forall x \in S$;

N$_2$) $\|x\| \;=\; 0 \quad \iff \quad x = 0$;

N$_3$) $\|\alpha x\| \;=\; |\alpha| \|x\| \quad \forall x \in S \ , \ \forall \alpha \in \Phi$;

N$_4$) $\|x + y\| \;\leq\; \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in S$.

Definizione 15.4.2. (*Spazio normato*). Uno *spazio normato* è una coppia $(S, \| \ \|)$, dove S è uno spazio vettoriale, reale o complesso, e $\| \ \|$ è una norma su S.

Ogni spazio normato $(S, \| \ \|)$ diviene uno spazio metrico se si definisce la metrica d nel modo seguente:

$$d(x, y) \quad = \quad \|x - y\| \qquad\qquad \forall x, y \in S$$

(la verifica dei postulati della metrica è abbastanza facile).

Esempi 15.4.1. Alcuni esempi di spazi normati sono:

1) $\mathbb{R}$ con la norma

$$\|x\| = |x| \qquad \forall x \in \mathbb{R} \;;$$

2) $\mathbb{R}^h$ con la norma

$$\|x\| = \Big(\sum_{i=1}^{h} x_i^2\Big)^{\frac{1}{2}} \qquad \forall x = (x_1, \dots, x_h) \in \mathbb{R}^h \;;$$

3) $C^0([a,b])$ con la norma

$$\|f\| = \max_{[a,b]} |f(x)| \qquad \forall f \in C^0([a,b]) \;;$$

4) $C^0([a,b])$ con la norma

$$\|f\| = \int_{[a,b]} |f(x)|\, dx \qquad \forall f \in C^0([a,b]) \;.$$

Uno spazio normato che, munito della metrica determinata dalla norma, risulta completo si chiama *spazio di Banach.*

Gli spazi dei precedenti esempi 1), 2) e 3) sono di Banach. Lo spazio dell'esempio 4) è uno spazio normato non completo.

Sia $p \geq 1$. Osserviamo che ponendo, per ogni $f^* \in L^p(\mu)$,

$$\|f^*\|_{L^p(\mu)} = \Big(\int |f|^p\, d\mu\Big)^{\frac{1}{p}} \;,$$

essendo f una qualsiasi funzione appartenente alla classe di equivalenza f^*, si ottiene un'applicazione

$$f \;\to\; \|f^*\|_{L^p(\mu)} \;,$$

da $L^p(\mu)$ in $\mathbb{R}$, la quale è ben definita, è una norma su $L^p(\mu)$ e determina su $L^p(\mu)$ la metrica d_p.

Spesso, con abuso di linguaggio, se $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$, si scrive

$$\|f\|_{L^p(\mu)}$$

invece di

$$\|f^*\|_{L^p(\mu)} \;.$$

È anche frequente l'uso del simbolo $\|\;\|_p$ invece di $\|\;\|_{L^p(\mu)}$. Tale simbolo $\|\;\|_p$ viene inoltre adoperato spesso anche quando il suo argomento f è soltanto una funzione numerica $\mathcal{A}$-misurabile, non necessariamente un elemento di $\mathcal{L}^p(\mu)$ (e quindi può essere anche $\|f\|_p = +\infty$); questa notazione, anche se non è del tutto ortodossa, permette però, in talune circostanze, di semplificare alquanto la scrittura; ad esempio, in questo modo, la disuguaglianza di Minkowski (15.2.8) assume la forma:

$$\|fg\|_1 \;\leq \|f\|_p \|g\|_q \;.$$

Dimostreremo in seguito (n. 16.4) che lo spazio $L^p(\mu)$ è uno spazio di Banach.