13. Integrazione in uno spazio di misura.

13.1. Funzioni elementari in uno spazio misurabile.

Definizione 13.1.1. (*Funzione $\mathcal{A}$-elementare*). Sia $(\Omega, \mathcal{A})$ uno spazio misurabile. Si chiama *funzione $\mathcal{A}$-elementare* ogni funzione reale $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tale che:

e$_1$) u è una funzione $\mathcal{A}$-misurabile;

e$_2$) $u \geq 0$;

e$_3$) il codominio $u(\Omega)$ di u è un insieme finito.

La proposizione che segue è un'immediata conseguenza della Definizione 13.1.1 e dei teoremi sulle operazioni con le funzioni misurabili.

Proposizione 13.1.1. (Operazioni con le funzioni elementari). *Sia $(\Omega, \mathcal{A})$ uno spazio misurabile e siano u, v due funzioni $\mathcal{A}$-elementari. Allora anche le funzioni*

$$\alpha u \ (\alpha \in [0, +\infty[\,) \quad , \quad u + v \quad , \quad uv \quad , \quad \max\{u, v\} \quad e \quad \min\{u, v\}$$

sono $\mathcal{A}$-elementari.

Procedendo per induzione si ha che la somma, il prodotto, il minimo ed il massimo di un qualunque numero finito di funzioni $\mathcal{A}$-elementari sono ancora funzioni $\mathcal{A}$-elementari.

Una definizione equivalente di funzione $\mathcal{A}$-elementare si ottiene chiamando $\mathcal{A}$-elementari tutte le funzioni che sono combinazioni lineari, mediante coefficienti reali non negativi, di indicatori di insiemi appartenenti alla σ-algebra $\mathcal{A}$.

Per verificare questa affermazione, supponiamo che $u : \Omega \to \mathbb{R}$ sia una funzione $\mathcal{A}$-elementare e denotiamo con $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ gli elementi (distinti) del codominio $u(\Omega)$. Posto

$$A_i \ = \ u^{-1}(\{\alpha_i\}) \ , \qquad\qquad i = 1, \ldots, n \ ,$$

si ha che che gli insiemi $A_1, \ldots, A_n$ appartengono alla σ-algebra $\mathcal{A}$, in quanto controimmagini di insiemi chiusi (e quindi boreliani), e costituiscono, ovviamente, una partizione dell'insieme Ω. Vale inoltre l'uguaglianza

$$u \ = \ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i} \ ; \tag{13.1.1}$$

infatti le funzioni che figurano al primo ed al secondo membro della (13.1.1) assumono entrambe, in ciascuno degli insiemi A_r $(r = 1, \ldots, n)$, lo stesso valore α_r.

Viceversa, ogni funzione u che ammette una rappresentazione del tipo (13.1.1), dove i coefficienti α_i, $i = 1, \ldots, n$, sono elementi di $[0, +\infty[$ e gli insiemi A_i, $i = 1, \ldots, n$,

appartengono alla σ-algebra $\mathcal{A}$, è una funzione $\mathcal{A}$-elementare. Infatti, u è una funzione $\mathcal{A}$-misurabile (per la misurabilità delle costanti α_i e degli indicatori $\mathbb{1}_{A_i}$ e per i teoremi sulle operazioni con le funzioni misurabili), assume valori reali non negativi ed il suo codominio $u(\Omega)$ è finito in quanto è contenuto nell'insieme (finito) che ha come elementi lo zero e tutte le possibili somme del tipo $\alpha_{i_1} + \ldots + \alpha_{i_k}$, con $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$. Abbiamo così dimostrato la seguente proposizione.

Proposizione 13.1.2. (Caratterizzazione delle funzioni elementari). *Sia $(\Omega, \mathcal{A})$ uno spazio misurabile. Le funzioni $\mathcal{A}$-elementari sono tutte e sole le funzioni u, definite in Ω, che ammettono una rappresentazione del tipo* (13.1.1) *con $\alpha_i \in [0, +\infty[$ e $A_i \in \mathcal{A}$ per ogni $i = 1, \ldots, n$.*

Inoltre ogni funzione $\mathcal{A}$-elementare u ammette almeno una rappresentazione del tipo anzidetto verificante l'ulteriore requisito che gli insiemi $A_1, \ldots, A_n$ costituiscano una partizione di Ω.

Data una funzione $\mathcal{A}$-elementare u, ogni rappresentazione di u del tipo (13.1.1), con $\alpha_i \in [0, +\infty[$ e $A_i \in \mathcal{A}$ per ogni $i = 1, \ldots, n$, tale che gli insiemi $A_1, \ldots, A_n$ costituiscano una partizione di Ω, prende il nome di *rappresentazione normale* di u.

In generale, una funzione $\mathcal{A}$-elementare u ammette più di una rappresentazione normale.

Ad esempio, considerando come spazio misurabile $(\Omega, \mathcal{A})$ lo spazio $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_1)$, si ha che

$$3 \cdot \mathbb{1}_{[0,1]} + 5 \cdot \mathbb{1}_{]1,2]} + 5 \cdot \mathbb{1}_{]2,3]} + 0 \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus[0,3]} \quad , \quad 3 \cdot \mathbb{1}_{[0,1]} + 5 \cdot \mathbb{1}_{]1,3]} + 0 \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus[0,3]} \quad ,$$

$$0 \cdot \mathbb{1}_{]-\infty,0[} + 3 \cdot \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{2}]} + 3 \cdot \mathbb{1}_{]\frac{1}{2},1]} + 5 \cdot \mathbb{1}_{]1,3]} + 0 \cdot \mathbb{1}_{]3,+\infty[}$$

sono tutte e tre rappresentazioni normali di una medesima funzione $\mathcal{B}_1$-elementare u, mentre

$$3 \cdot \mathbb{1}_{[0,3]} + 2 \cdot \mathbb{1}_{]1,3]}$$

è ancora una rappresentazione del tipo (13.1.1) della stessa u, ma non è una rappresentazione normale.

Supponiamo che la (13.1.1) sia una rappresentazione normale di u; si dice allora che tale rappresentazione normale è *basata* sulla partizione $\{A_1, \ldots, A_n\}$ di Ω.

Proposizione 13.1.3. *Sia $(\Omega, \mathcal{A})$ uno spazio misurabile e siano u, v due qualsiasi funzioni $\mathcal{A}$-elementari. Esistono due rappresentazioni normali:*

$$u = \sum_{i=1}^{r} \gamma_i \mathbb{1}_{C_i} \quad , \quad v = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mathbb{1}_{C_i} \quad ,$$

delle funzioni u e v, basate sulla stessa partizione $\{C_1, \ldots, C_r\}$ dell'insieme Ω.

Dimostrazione. Siano

$$u \;=\; \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i} \qquad , \qquad v \;=\; \sum_{j=1}^{m} \beta_j \mathbb{1}_{B_j}$$

due qualsiasi rappresentazioni normali delle funzioni u e v. Poiché $\{B_1, \ldots, B_m\}$ è una partizione di Ω si ha

$$\mathbb{1}_{B_1}(\omega) + \ldots + \mathbb{1}_{B_m}(\omega) \;=\; 1 \qquad\qquad \forall \omega \in \Omega \;;$$

di conseguenza possiamo scrivere

$$u \;=\; \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i} \sum_{j=1}^{m} \mathbb{1}_{B_j} \;=\; \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i} \cdot \mathbb{1}_{B_j} \;=\; \sum_{(i,j) \in R} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i \cap B_j} \;,$$

avendo indicato con R l'insieme di tutte le coppie $(i,j) \in \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, m\}$ tali che $A_i \cap B_j \neq \emptyset$. Analogamente si prova che

$$v \;=\; \sum_{(i,j) \in R} \beta_j \mathbb{1}_{A_i \cap B_j} \;.$$

A questo punto, per conseguire la tesi, basta osservare che gli insiemi $A_i \cap B_j$, $(i,j) \in R$, sono a due a due disgiunti e si ha

$$\bigcup_{(i,j) \in R} (A_i \cap B_j) \;=\; \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{m} (A_i \cap B_j) \;=\; \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right) \cap \left(\bigcup_{j=1}^{m} B_j \right) \;=\; \Omega \cap \Omega \;=\; \Omega \;.$$

Una proprietà molto importante delle funzioni elementari è che ogni funzione misurabile e non negativa è il limite di una successione non decrescente di funzioni elementari.

Teorema 13.1.1. (Approssimazione di una funzione misurabile non negativa mediante funzioni elementari). *Sia $(\Omega, \mathcal{A})$ uno spazio misurabile e sia $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione $\mathcal{A}$-misurabile tale che $f \geq 0$. Esiste una successione non decrescente $\{u_n\}$ di funzioni $\mathcal{A}$-elementari tale che*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} u_n \;=\; f \;.$$

Inoltre, nell'ulteriore ipotesi che

$$\sup_{\omega \in \Omega} f(\omega) \;<\; +\infty$$

(quindi f è una funzione reale), *la successione $\{u_n\}$ può essere costruita in modo da convergere uniformemente (a f) in Ω.*

Dimostrazione. Denotato con $\mathbb{Q}_0^+$ l'insieme dei numeri razionali non negativi, dimostriamo come prima cosa che risulta

$$\sup_{q\in\mathbb{Q}_0^+} q\mathbb{1}_{\{f\geq q\}} \;=\; f \;. \tag{13.1.2}$$

Infatti, fissato $\omega \in \Omega$, si ha, ovviamente,

$$\omega \in \{f \geq q\} \iff q \leq f(\omega)$$

e da ciò segue facilmente che l'insieme

$$\Big\{q\mathbb{1}_{\{f\geq q\}}(\omega) \,:\, q \in \mathbb{Q}_0^+\Big\}$$

è uguale a

$$\mathbb{Q}_0^+ \cap [0, f(\omega)] \;;$$

di conseguenza si ha

$$\Big(\sup_{q\in\mathbb{Q}_0^+} q\mathbb{1}_{\{f\geq q\}}\Big)(\omega) \;=\; \sup_{q\in\mathbb{Q}_0^+} q\mathbb{1}_{\{f\geq q\}}(\omega) \;=\; \sup\Big(\mathbb{Q}_0^+ \cap [0, f(\omega)]\Big) \;=\; f(\omega) \;.$$

Denotata con $n \to q_n$ una bigezione tra $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}_0^+$ e posto

$$A_n \;=\; \{f \geq q_n\} \qquad\qquad \forall n \in \mathbb{N} \;,$$

la (13.1.2) si scrive

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} q_n\mathbb{1}_{A_n} \;=\; f \;.$$

Abbiamo così trovato una successione di funzioni $\mathcal{A}$-elementari (la $\{q_n\mathbb{1}_{A_n}\}$) che ha come estremo superiore la funzione f. Per ottenere una successione che, oltre ai predetti requisiti, sia anche non decrescente, poniamo

$$u_n \;=\; \max\Big\{q_1\mathbb{1}_{A_1}, \ldots, q_n\mathbb{1}_{A_n}\Big\} \qquad\qquad \forall n \in \mathbb{N} \;.$$

È chiaro che la successione $\{u_n\}$ così ottenuta è una successione non decrescente di funzioni $\mathcal{A}$-elementari. Verifichiamo che anche per la $\{u_n\}$ risulta

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} u_n \;=\; f \;.$$

Si ha infatti, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n \;=\; \max\Big\{q_1\mathbb{1}_{A_1}, \ldots, q_n\mathbb{1}_{A_n}\Big\} \;\leq\; \sup_{k\in\mathbb{N}} q_k\mathbb{1}_{A_k} \;=\; f$$

e quindi

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} u_n \;\le\; f \;;$$

d'altra parte, sempre per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha

$$q_n \mathbb{1}_{A_n} \;\le\; u_n \;\le\; \sup_{k\in\mathbb{N}} u_k$$

e quindi vale anche la disuguaglianza contraria

$$f \;=\; \sup_{n\in\mathbb{N}} q_n \mathbb{1}_{A_n} \;\le\; \sup_{k\in\mathbb{N}} u_k \;.$$

Supponiamo adesso che sia $\sup_\Omega f < +\infty$ e dimostriamo che $u_n \to f$ uniformemente in Ω. Fissiamo, a tale scopo, un numero $S \in \mathbb{N}$ tale da aversi $f(\omega) < S \;\; \forall \omega \in \Omega$. Assegnato un qualunque $\varepsilon > 0$, determiniamo $r \in \mathbb{N}$ tale che $\frac{S}{r} < \varepsilon$ e consideriamo i numeri razionali non negativi

$$0 \;,\; \frac{1}{r}S \;,\; \frac{2}{r}S \;,\; \ldots \;,\; \frac{r-1}{r}S \;,$$

ognuno dei quali figura (una sola volta) come termine della successione $\{q_n\}$; supponiamo che sia

$$0 = q_{n_0} \;,\; \frac{1}{r}S = q_{n_1} \;,\; \frac{2}{r}S = q_{n_2} \;,\ldots \;,\; \frac{r-1}{r}S = q_{n_{r-1}}$$

e poniamo

$$n^* \;=\; \max\{n_0 \,,\, \ldots \,,\, n_{r-1}\} \;.$$

Per completare la dimostrazione facciamo vedere che, per ogni $n \ge n^*$, risulta

$$f(\omega) - \varepsilon \;<\; u_n(\omega) \;\le\; f(\omega) \qquad\qquad \forall \omega \in \Omega \;.$$

La disuguaglianza di destra è ovviamente verificata in quanto $f = \sup_{n\in\mathbb{N}} u_n$. Per quanto riguarda la disuguaglianza di sinistra ragioniamo nel modo seguente. Essendo

$$0 \le f(\omega) < S \qquad\qquad \forall \omega \in \Omega \;,$$

si ha che ogni $\omega \in \Omega$ appartiene ad uno degli insiemi

$$\left\{0 \le f < \tfrac{1}{r}S\right\} \;,\; \left\{\tfrac{1}{r}S \le f < \tfrac{2}{r}S\right\} \;,\; \ldots \;,\; \left\{\tfrac{r-1}{r}S \le f < S\right\} \;.$$

Supponiamo che sia

$$\omega \;\in\; \left\{\tfrac{i}{r}S \le f < \tfrac{i+1}{r}S\right\}$$

$(0 \le i \le r-1)$. Allora, tenendo presente che $n \ge n^* \ge n_i$ e che $\omega \in A_{n_i}$ (dato che $\frac{i}{r}S = q_{n_i}$), risulta

$$u_n(\omega) \;\ge\; q_{n_i} \mathbb{1}_{A_{n_i}}(\omega) \;=\; q_{n_i} \;=$$

$$=\; \frac{i}{r}S \;=\; \frac{i+1}{r}S - \frac{1}{r}S \;>$$

$$>\; f(\omega) - \frac{1}{r}S \;>\; f(\omega) - \varepsilon \;.$$

13.2. L'integrale delle funzioni elementari.

Supponiamo, d'ora in avanti, che $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ sia un assegnato spazio di misura (ovviamente, in questo contesto, quando si parla di funzione $\mathcal{A}$-elementare, ci si riferisce allo spazio misurabile $(\Omega, \mathcal{A})$).

Lemma 13.2.1. *Sia u una funzione $\mathcal{A}$-elementare e siano*

$$u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i} \quad , \quad u = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \mathbb{1}_{B_j} \tag{13.2.1}$$

due qualsiasi rappresentazioni normali di u. Risulta

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \mu(B_j) \ .$$

Dimostrazione. Poiché gli insiemi $B_1, \ldots, B_m$ costituiscono una partizione di Ω, per ogni $i = 1, \ldots, n$ si ha

$$\mu(A_i) = \mu(A_i \cap \Omega) = \mu\Big(A_i \cap \Big(\bigcup_{j=1}^{m} B_j\Big)\Big) = \mu\Big(\bigcup_{j=1}^{m} (A_i \cap B_j)\Big) = \sum_{j=1}^{m} \mu(A_i \cap B_j)$$

e quindi

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \mu(A_i \cap B_j) \ .$$

Analogamente, scambiando il ruolo degli insiemi B_j con quello degli insiemi A_i, si ottiene

$$\sum_{j=1}^{m} \beta_j \mu(B_j) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \beta_j \mu(A_i \cap B_j) \ .$$

A questo punto, per dimostrare la tesi, basta provare che, per ogni $i = 1, \ldots, n$ ed ogni $j = 1, \ldots, m$, risulta

$$\alpha_i \mu(A_i \cap B_j) = \beta_j \mu(A_i \cap B_j) \ . \tag{13.2.2}$$

La (13.2.2) è ovvia nel caso in cui $\mu(A_i \cap B_j) = 0$. Supponiamo che sia $\mu(A_i \cap B_j) \neq 0$ (e quindi $A_i \cap B_j \neq \emptyset$). Fissato un punto $\overline{\omega}$ dell'insieme $A_i \cap B_j$, calcoliamo il valore $u(\overline{\omega})$. Se utilizziamo la prima delle rappresentazioni normali (13.2.1), otteniamo $u(\overline{\omega}) = \alpha_i$; se, invece, adoperiamo la seconda, troviamo $u(\overline{\omega}) = \beta_j$. Ne segue che $\alpha_i = \beta_j$ e pertanto vale la (13.2.2).

Il Lemma 13.2.1 dà significato alla seguente definizione.

Definizione 13.2.1. (*Integrale di una funzione elementare.*) Sia $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura e sia u una funzione $\mathcal{A}$-elementare. Si chiama *integrale della funzione u rispetto alla misura μ* l'elemento $\int u\, d\mu$ di $[0, +\infty]$ dato da

$$\int u\, d\mu \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i) \ ,$$

essendo $u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$ una qualsiasi rappresentazione normale di u.

Osserviamo che nel simbolo $\int u\, d\mu$ adottato per indicare l'integrale non figurano né la variabile indipendente $\omega \in \Omega$ né l'insieme di integrazione (è sottinteso che esso sia tutto Ω). Quando per qualche motivo sarà preferibile evidenziare la variabile indipendente (o variabile di integrazione) si adopererà uno dei simboli

$$\int u(\omega)\, \mu(d\omega) \qquad \text{oppure} \qquad \int u(\omega)\, d\mu$$

(naturalmente il nome dato alla variabile indipendente non ha alcuna importanza, quindi in luogo della ω si può adoperare una qualunque altra lettera). Quando invece occorrerà sottolineare che il dominio di integrazione è Ω si scriverà

$$\int_{\Omega} u\, d\mu$$

e si dirà che l'integrale è *esteso all'insieme* Ω.

Teorema 13.2.1. (Proprietà dell'integrale delle funzioni elementari). *Dato lo spazio di misura $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, supponiamo che u, v siano due funzioni $\mathcal{A}$-elementari. Valgono le seguenti proprietà:*

0) $$\int \mathbb{1}_A d\mu \ = \ \mu(A) \qquad \forall A \in \mathcal{A} \ ;$$

1) $$\int (\alpha u)\, d\mu \ = \ \alpha \int u\, d\mu \qquad \forall \alpha \in [0, +\infty[\ ;$$

2) $$\int (u + v)\, d\mu \ = \ \int u\, d\mu + \int v\, d\mu \ ;$$

3) $$u \ \leq \ v \ \Longrightarrow \ \int u\, d\mu \ \leq \ \int v\, d\mu \ .$$

Dimostrazione. 0) Segue immediatamente dalla definizione di integrale, in quanto una rappresentazione normale della funzione $\mathbb{1}_A$ è, se $A \neq \Omega$,

$$\mathbb{1}_A = 1 \cdot \mathbb{1}_A + 0 \cdot \mathbb{1}_{A^c}$$

e $\mathbb{1}_A = 1 \cdot \mathbb{1}_{\Omega}$ nel caso particolare che $A = \Omega$.

1) Supponiamo che $u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$ sia una rappresentazione normale di u; allora una rappresentazione normale di αu è $\alpha u = \sum_{i=1}^{n} (\alpha\alpha_i) \mathbb{1}_{A_i}$; pertanto

$$\int (\alpha u)\, d\mu \;=\; \sum_{i=1}^{n} (\alpha\alpha_i)\mu(A_i) \;=\; \alpha \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i) \;=\; \alpha \int u\, d\mu \;.$$

2) Per la Proposizione 13.1.3 esistono due rappresentazioni normali $u = \sum_{i=1}^{r} \gamma_i \mathbb{1}_{C_i}$, $v = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mathbb{1}_{C_i}$ delle funzioni u e v basate su una stessa partizione dell'insieme Ω. Allora una rappresentazione normale di $u + v$ è $u + v = \sum_{i=1}^{r} (\gamma_i + \lambda_i) \mathbb{1}_{C_i}$ e quindi

$$\int (u+v)\, d\mu \;=\; \sum_{i=1}^{r} (\gamma_i + \lambda_i)\mu(C_i) \;=\; \sum_{i=1}^{r} \gamma_i \mu(C_i) \;+\; \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mu(C_i) \;=\; \int u\, d\mu + \int v\, d\mu \;.$$

3) Consideriamo le stesse rappresentazioni normali di u e v utilizzate per la proprietà 2). Dall'ipotesi $u \leq v$ segue, ovviamente,

$$\gamma_i \leq \lambda_i \;, \qquad\qquad i = 1, \ldots, r \;,$$

e quindi

$$\int u\, d\mu \;=\; \sum_{i=1}^{r} \gamma_i \mu(C_i) \;\leq\; \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mu(C_i) \;=\; \int v\, d\mu \;.$$

Osservazione 13.2.1. Le proprietà 0), 1) e 2) implicano che, se

$$u \;=\; \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$$

è una qualsiasi rappresentazione della funzione $\mathcal{A}$-elementare u come combinazione lineare, mediante coefficienti reali non negativi, di indicatori di insiemi misurabili, allora risulta

$$\int u\, d\mu \;=\; \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i)$$

anche se la rappresentazione data non è una rappresentazione normale.

Osservazione 13.2.2. È utile osservare esplicitamente che, dato lo spazio di misura $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, l'applicazione

$$u \;\to\; \int u\, d\mu \;,$$

dall'insieme delle funzioni $\mathcal{A}$-elementari in $[0, +\infty]$, risulta a valori reali se e soltanto se la misura μ è finita. L'implicazione "se" è un'immediata conseguenza della definizione di integrale; l'altra implicazione segue dalla precedente proprietà 0).

13.3. L'integrale delle funzioni misurabili e non negative.

Per il Teorema 13.1.1 ogni funzione $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$, $\mathcal{A}$-misurabile e non negativa, è il limite di una successione non decrescente di funzioni $\mathcal{A}$-elementari $\{u_n\}$. Ovviamente tale successione $\{u_n\}$ non è unica (a meno che f non sia la funzione identicamente nulla). Tuttavia, se si considera la corrispondente successione degli integrali

$$\left\{ \int u_n \, d\mu \right\} ,$$

si ha che (Lemma 13.3.2) il limite di tale successione ([1]) è un elemento di $[0, +\infty]$ che non dipende dalla successione di funzioni $\{u_n\}$. Questo fatto è alla base della definizione di integrale di una funzione $\mathcal{A}$-misurabile e non negativa.

Lemma 13.3.1. *Sia $\{u_n\}$ una successione non decrescente di funzioni $\mathcal{A}$-elementari e sia v una funzione $\mathcal{A}$-elementare tale che $v \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} u_n$. Allora*

$$\int v \, d\mu \;\leq\; \sup_{n\in\mathbb{N}} \int u_n \, d\mu \; .$$

Dimostrazione. Ovviamente, possiamo supporre che sia $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int u_n \, d\mu < +\infty$. Fissato un qualunque numero $\alpha \in]0, 1[$, consideriamo la successione $\{B_n\}$, di insiemi appartenenti a $\mathcal{A}$, così definita:

$$B_n \;=\; \{u_n \geq \alpha v\} \qquad\qquad \forall n \in \mathbb{N} \; .$$

Dalla non decrescenza della successione $\{u_n\}$ segue subito che $B_n \subseteq B_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Proviamo che $B_n \uparrow \Omega$. Infatti, fissato $\omega \in \Omega$, si hanno i seguenti due casi:

— se $v(\omega) = 0$, allora ω appartiene a tutti gli insiemi B_n;

— se $v(\omega) > 0$, allora si ha (ricordiamo che $v(\omega) \in \mathbb{R}$)

$$\alpha v(\omega) \;<\; v(\omega) \;\leq\; \sup_{n\in\mathbb{N}} u_n(\omega) \; ;$$

di conseguenza esiste $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\alpha v(\omega) < u_{\overline{n}}(\omega)$ e quindi $\omega \in B_{\overline{n}}$.

([1]) Per la proprietà di monotonia dell'integrale delle funzioni elementari (Teorema 13.2.1, 3)) il limite della successione $\left\{ \int u_n \, d\mu \right\}$ esiste e si ha

$$\lim_{n\to\infty} \int u_n \, d\mu \;=\; \sup_{n\in\mathbb{N}} \int u_n \, d\mu \; .$$

Osserviamo ancora che la definizione degli insiemi B_n implica che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, è verificata la disuguaglianza $\alpha v \mathbb{1}_{B_n} \leq u_n$ e pertanto si ha

$$\int \alpha v \mathbb{1}_{B_n} \, d\mu \;\leq\; \int u_n \, d\mu \;. \tag{13.3.1}$$

Calcoliamo il limite, per $n \to \infty$, dell'integrale al primo membro della (13.3.1). Consideriamo, a tale scopo, una rappresentazione

$$v \;=\; \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$$

della funzione $\mathcal{A}$-elementare v, con $\alpha_i \in [0, +\infty[$ e $A_i \in \mathcal{A}$ per ogni $i = 1, \ldots, k$. Abbiamo allora, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$\int \alpha v \mathbb{1}_{B_n} \, d\mu \;=\; \int \alpha \Big(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i} \Big) \mathbb{1}_{B_n} \, d\mu \;=\; \alpha \int \Big(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i \cap B_n} \Big) \, d\mu \;=$$

$$=\; \alpha \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mu(A_i \cap B_n) \;,$$

da cui, tenendo presente che $A_i \cap B_n \uparrow A_i$ $(i = 1, \ldots, k)$, per la proprietà di continuità verso l'alto della misura μ deduciamo che

$$\lim_{n \to \infty} \int \alpha v \mathbb{1}_{B_n} \, d\mu \;=\; \alpha \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mu(A_i) \;=\; \alpha \int v \, d\mu \;.$$

A questo punto, passando al limite per $n \to \infty$ nella (13.3.1), otteniamo

$$\alpha \int v \, d\mu \;\leq\; \sup_{n \in \mathbb{N}} \int u_n \, d\mu$$

e quindi, per l'arbitrarietà di $\alpha \in]0, 1[$, la tesi.

Lemma 13.3.2. *Siano $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ due successioni non decrescenti di funzioni $\mathcal{A}$-elementari tali che*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} u_n \;=\; \sup_{n \in \mathbb{N}} v_n \;.$$

Allora

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int u_n \, d\mu \;=\; \sup_{n \in \mathbb{N}} \int v_n \, d\mu \;.$$

Dimostrazione. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha

$$v_k \;\leq\; \sup_{n \in \mathbb{N}} v_n \;=\; \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n$$

e quindi, per il lemma precedente,

$$\int v_k \, d\mu \;\leq\; \sup_{n\in\mathbb{N}} \int u_n \, d\mu \;;$$

conseguentemente, per l'arbitrarietà di $k \in \mathbb{N}$, si ha pure

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \int v_k \, d\mu \;\leq\; \sup_{n\in\mathbb{N}} \int u_n \, d\mu \;.$$

In modo del tutto analogo si prova che vale anche la disuguaglianza contraria

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int u_n \, d\mu \;\leq\; \sup_{k\in\mathbb{N}} \int v_k \, d\mu \;.$$

Ciò completa la dimostrazione.

Definizione 13.3.1. (*Integrale di una funzione misurabile e non negativa.*) Sia $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura e sia $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione $\mathcal{A}$-misurabile e non negativa. Si chiama *integrale della funzione f rispetto alla misura μ* l'elemento $\int u \, d\mu$ di $[0, +\infty]$ dato da

$$\int u \, d\mu \;=\; \sup_{n\in\mathbb{N}} \int u_n \, d\mu \;,$$

dove $\{u_n\}$ è una qualsiasi successione non decrescente di funzioni $\mathcal{A}$-elementari tale che $\sup_{n\in\mathbb{N}} u_n \;=\; f$.

Osservazione 13.3.1. (*Coerenza*). Se f è una funzione $\mathcal{A}$-elementare, come successione non decrescente $\{u_n\}$ di funzioni $\mathcal{A}$-elementari tale che $\sup_{n\in\mathbb{N}} u_n \;=\; f$ si può assumere la successione costante $f, f, \ldots, f, \ldots$; da ciò segue che la Definizione 13.3.1 è coerente con la precedente Definizione 13.2.1.

Notazione. Nel seguito, per indicare che una successione di funzioni numeriche $\{g_n\}$ è non decrescente ed ha come limite la funzione f, adopereremo la notazione $g_n \uparrow f$.

Teorema 13.3.1. (Proprietà dell'integrale delle funzioni misurabili e non negative). *Dato lo spazio di misura $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, siano $f, g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ funzioni $\mathcal{A}$-misurabili e non negative. Valgono le seguenti proprietà:*

1) $$\int (\alpha f) \, d\mu \;=\; \alpha \int f \, d\mu \qquad \forall \alpha \in [0, +\infty[\;;$$

2) $$\int (f + g) \, d\mu \;=\; \int f \, d\mu + \int g \, d\mu \;;$$

3) $$f \;\leq\; g \;\Longrightarrow\; \int f \, d\mu \;\leq\; \int g \, d\mu \;.$$

Dimostrazione. Supponiamo che $\{u_n\}$ e $\{v_n\}$ siano due successioni di funzioni $\mathcal{A}$-elementari tali che $u_n \uparrow f$ e $v_n \uparrow g$.

1) Osserviamo che la successione $\{\alpha u_n\}$ è una successione di funzioni $\mathcal{A}$-elementari tale che $\alpha u_n \uparrow \alpha f$. Pertanto, per ottenere la tesi, basta passare al limite, per $n \to \infty$, nell'uguaglianza

$$\int (\alpha u_n)\, d\mu \;=\; \alpha \int u_n\, d\mu \qquad\qquad \forall n \in \mathbb{N}\ .$$

2) Osserviamo che la successione $\{u_n + v_n\}$ è una successione di funzioni $\mathcal{A}$-elementari tale che $u_n + v_n \uparrow f + g$. Pertanto, per ottenere la tesi, basta passare al limite, per $n \to \infty$, nell'uguaglianza

$$\int (u_n + v_n)\, d\mu \;=\; \int u_n\, d\mu \;+\; \int v_n\, d\mu \qquad\qquad \forall n \in \mathbb{N}\ .$$

3) Per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha

$$u_k \;\le\; f \;\le\; g \;=\; \sup_{n\in\mathbb{N}} v_n$$

e quindi, per il Lemma 13.3.1,

$$\int u_k\, d\mu \;\le\; \sup_{n\in\mathbb{N}} \int v_n\, d\mu \;=\; \int g\, d\mu\ ,$$

da cui, per l'arbitrarietà di k,

$$\int f\, d\mu \;=\; \sup_{k\in\mathbb{N}} \int u_k\, d\mu \;\le\; \int g\, d\mu\ .$$

Il teorema successivo mostra che per le successioni non decrescenti di funzioni $\mathcal{A}$-misurabili e non negative, è sempre lecito scambiare il simbolo di integrale con quello di estremo superiore (cioè con quello di limite), così come già accade, per definizione, nel caso particolare delle successioni non decrescenti di funzioni $\mathcal{A}$-elementari.

Teorema 13.3.2. (Teorema di Beppo Levi o della "convergenza monotòna"). *Dato lo spazio di misura $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, supponiamo che $\{f_n\}$ sia una successione non decrescente di funzioni numeriche su Ω, $\mathcal{A}$-misurabili e non negative. Si ha allora*

$$\int \Big(\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n\Big)\, d\mu \;=\; \sup_{n\in\mathbb{N}} \int f_n\, d\mu\ . \tag{13.3.2}$$

Dimostrazione. Osserviamo preliminarmente che la funzione

$$f \;=\; \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$$

è $\mathcal{A}$-misurabile e non negativa, quindi l'integrale al primo membro della (13.3.2) ha significato.

Per la monotonia dell'integrale (Teorema 13.3.1, 3)) si ha, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$\int f_n \, d\mu \;\leq\; \int f \, d\mu$$

e quindi

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int f_n \, d\mu \;\leq\; \int f \, d\mu \;.$$

Per dimostrare che vale pure la disuguaglianza contraria basta provare che esiste una successione $\{v_n\}$ di funzioni $\mathcal{A}$-elementari avente i seguenti due requisiti:

$$v_n \uparrow f \qquad ; \qquad v_n \leq f_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \;.$$

Infatti, una volta acquisita l'esistenza di $\{v_n\}$, per la definizione di integrale e la proprietà di monotonia si ha:

$$\int f \, d\mu \;=\; \sup_{n\in\mathbb{N}} \int v_n \, d\mu \;\leq\; \sup_{n\in\mathbb{N}} \int f_n \, d\mu \;.$$

Proviamo l'esistenza di $\{v_n\}$. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ fissiamo, in corrispondenza della funzione f_k, una successione $\{u_{kn}\}_{n\in\mathbb{N}}$ di funzioni $\mathcal{A}$-elementari tale che $u_{kn} \uparrow f_k$. Consideriamo quindi la successione di funzioni $\{v_n\}$ definita ponendo, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n \;=\; \max\{u_{1n},\, u_{2n},\, \ldots,\, u_{nn}\}$$

(u_{1n} è il termine n-mo della successione $\{u_{1n}\}$ tale che $u_{1n} \uparrow f_1$, u_{2n} è il termine n-mo della successione $\{u_{2n}\}$ tale che $u_{2n} \uparrow f_2$, ecc. ecc.). Verifichiamo che la successione $\{v_n\}$ ha i requisiti richiesti. Per la Proposizione 13.1.1 ogni funzione v_n è $\mathcal{A}$-elementare. Inoltre, per ogni $n \in \mathbb{N}$, considerati i due insiemi di funzioni

$$\{u_{1n},\, u_{2n},\, \ldots,\, u_{nn}\} \quad , \quad \{u_{1\,n+1},\, u_{2\,n+1},\, \ldots,\, u_{n\,n+1},\, u_{n+1\,n+1}\} \;,$$

si ha che ogni elemento u_{in} del primo insieme è minore o uguale del corrispondente elemento $u_{i\,n+1}$ del secondo insieme (si tratta di due termini consecutivi della stessa successione $\{u_{in}\}$) e quindi del massimo del secondo insieme, cioè di v_{n+1}; di conseguenza si ha pure

$$v_n \;=\; \max\{u_{1n},\, u_{2n},\, \ldots,\, u_{nn}\} \;\leq\; v_{n+1} \;.$$

Osserviamo ancora che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha

$$u_{1n} \leq f_1 \leq f_n \quad , \quad u_{2n} \leq f_2 \leq f_n \quad , \quad \ldots \quad , \quad u_{nn} \leq f_n \;,$$

pertanto risulta

$$v_n \;=\; \max\{u_{1n},\, u_{2n},\, \ldots,\, u_{nn}\} \;\leq\; f_n \;.$$

Proviamo infine che

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} v_n \;=\; f \;.$$

Dato che

$$v_n \;\le\; f_n \;\le\; f \qquad\qquad \forall n \in \mathbb{N} \;,$$

si ha

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} v_n \;\le\; f \;.$$

Viceversa, fissata una qualunque funzione f_k, dato che

$$f_k \;=\; \sup_{n\in\mathbb{N}} u_{kn}$$

e che, per la definizione di v_n, si ha

$$u_{kn} \;\le\; v_n \qquad\qquad \forall n \ge k \;,$$

passando al limite per $n \to \infty$ nella precedente disuguaglianza si ottiene

$$f_k \;\le\; \sup_{n\in\mathbb{N}} v_n \;,$$

da cui, per l'arbitrarietà della funzione f_k, si deduce che

$$f \;=\; \sup_{k\in\mathbb{N}} f_k \;\le\; \sup_{n\in\mathbb{N}} v_n \;.$$

Ciò completa la dimostrazione.

Osservazione 13.3.2. Notiamo che, per la monotonia dell'integrale, la (13.3.2) può scriversi

$$\int \Big(\lim_{n\to\infty} f_n \Big)\, d\mu \;=\; \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu \;,$$

dunque il teorema di Beppo Levi è un teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale.

Un'importante ed immediata conseguenza del teorema di Beppo Levi è il seguente teorema di integrazione per serie, secondo il quale è sempre lecito, nel caso di una serie di funzioni $\mathcal{A}$-misurabili e non negative, scambiare il simbolo di integrale con quello di serie.

Teorema 13.3.3. (Teorema di integrazione per serie). *Dato lo spazio di misura* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, *supponiamo che* $\{f_n\}$ *sia una qualunque successione di funzioni numeriche su* Ω, $\mathcal{A}$-*misurabili e non negative. Risulta allora*

$$\int \Big(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \Big)\, d\mu \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n \, d\mu \;. \tag{13.3.3}$$

Dimostrazione. Osserviamo che nella (13.3.3) sia il primo membro (è l'integrale di una funzione numerica $\mathcal{A}$-misurabile e non negativa) che il secondo membro (è la somma di una serie a termini non negativi) hanno perfettamente significato.

Per dimostrare la validità della (13.3.3) osserviamo che, considerata la successione $\{s_n\}$ delle somme parziali della serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, cioè

$$s_n \;=\; f_1 + \ldots + f_n \qquad\qquad \forall n \in \mathbb{N} \;,$$

ed indicando con f la funzione somma di tale serie, si ha

$$s_n \uparrow f \;,$$

quindi, per il teorema di Beppo Levi ed il Teorema 13.3.1, 2), risulta

$$\int \Big(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \Big) \, d\mu \;=\; \int f \, d\mu \;=\; \sup_{n \in \mathbb{N}} \int s_n \, d\mu \;=$$

$$= \; \sup_{n \in \mathbb{N}} \Big(\int f_1 \, d\mu \,+\, \ldots \,+\, \int f_n \, d\mu \Big) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n \, d\mu \;\; .$$

Osservazione 13.3.3. Un'altra conseguenza del teorema di Beppo Levi che conviene segnalare esplicitamente è che la proprietà 1) del Teorema 13.3.1 vale anche nel caso $\alpha = +\infty$. Infatti, per $\alpha = +\infty$, fissata la funzione f, $\mathcal{A}$-misurabile e non negativa, e considerata la successione di funzioni $\{nf\}$, si ha

$$nf \uparrow (+\infty) f$$

e quindi, per il teorema di Beppo Levi, tenendo presente che la proprietà è già vera per $\alpha < +\infty$, si ha

$$\int (+\infty) f \, d\mu \;=\; \sup_{n \in \mathbb{N}} \int nf \, d\mu \;=\; \sup_{n \in \mathbb{N}} n \int f \, d\mu \;=\; (+\infty) \int f \, d\mu \;\; .$$

13.4. Alcuni esempi.

Esempio 13.4.1. Consideriamo lo spazio di misura $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \delta_{\overline{\omega}})$, dove $\overline{\omega}$ è un elemento di Ω e $\delta_{\overline{\omega}}$ è la delta di Dirac concentrata nel punto $\overline{\omega}$. Se f è una qualunque funzione numerica definita in Ω, a valori non negativi, si ha

$$\int f \, d\delta_{\overline{\omega}} \;=\; f(\overline{\omega}) \;\; . \tag{13.4.1}$$

(il calcolo dell'integrale ha senso perché rispetto allo spazio misurabile $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ una qualunque funzione numerica $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ è misurabile).

Proviamo la (13.4.1). Esaminiamo dapprima il caso di una funzione $\mathcal{P}(\Omega)$-elementare u. Se

$$u \;=\; \sum_{i=1}^{h} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$$

è una qualunque rappresentazione normale di u, il punto $\overline{\omega}$ appartiene ad uno solo degli insiemi A_i. Si ha allora, supponendo che $\overline{\omega} \in A_{i^*}$ (e quindi $u(\overline{\omega}) = \alpha_{i^*}$),

$$\int u \, d\delta_{\overline{\omega}} \;=\; \sum_{i=1}^{h} \alpha_i \delta_{\overline{\omega}}(A_i) \;=\; \alpha_{i^*} \, \delta_{\overline{\omega}}(A_{i^*}) \;=\; u(\overline{\omega}) \; .$$

Per dimostrare la (13.4.1) in generale basta considerare una qualunque successione $\{u_n\}$ di funzioni $\mathcal{P}(\Omega)$-elementari tale che $u_n \uparrow f$ e passare al limite, per $n \to \infty$, nell'uguaglianza

$$\int u_n d\delta_{\overline{\omega}} \;=\; u_n(\overline{\omega}) \quad .$$

Esempio 13.4.2. Consideriamo lo spazio di misura $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ottenuto nel modo seguente: Ω è un insieme infinito non numerabile; $\mathcal{A}$ è la σ-algebra

$$\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{P}(\Omega) \; : \; A \text{ è numerabile oppure } A^{\mathrm{c}} \text{ è numerabile}\}$$

(cfr. l'Esempio 5.1.1, c)) e μ è la misura su $\mathcal{A}$ definita ponendo

$$\mu(A) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{se } A \text{ è numerabile,} \\ 1 & \text{se } A^{\mathrm{c}} \text{ è numerabile} \end{cases}$$

(cfr. l'Esempio 5.3.4).

Prima di occuparci del calcolo degli integrali in questo spazio di misura, osserviamo che, considerato il corrispondente spazio misurabile $(\Omega, \mathcal{A})$, la $\mathcal{A}$-misurabilità di una funzione numerica $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ equivale (cfr. la successiva Proposizione 13.4.1) all'esistenza di una costante $k \in \overline{\mathbb{R}}$ tale che $\{f = k\}^{\mathrm{c}}$ sia un insieme numerabile.

Osserviamo ancora che la costante k è univocamente individuata dalla funzione f; infatti, se $k_1, k_2 \in \overline{\mathbb{R}}$ sono tali che $\{f = k_1\}^{\mathrm{c}}$ e $\{f = k_2\}^{\mathrm{c}}$ siano entrambi insiemi numerabili, allora anche

$$(\{f = k_1\} \cap \{f = k_2\})^{\mathrm{c}} \;=\; \{f = k_1\}^{\mathrm{c}} \cup \{f = k_2\}^{\mathrm{c}}$$

è un insieme numerabile, quindi il suo complementare $\{f = k_1\} \cap \{f = k_2\}$ non è vuoto e pertanto $k_1 = k_2$.

Consideriamo adesso una qualunque funzione $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$, $\mathcal{A}$-misurabile e non negativa, e dimostriamo che risulta

$$\int f \, d\mu \;=\; k \; ,$$

dove k è la costante individuata dalla funzione f, cioè tale che l'insieme $A = \{f = k\}$ sia il complementare di un insieme numerabile. Risulta infatti

$$k\mathbb{1}_A \;\leq\; f \;\leq\; k\mathbb{1}_A + (+\infty)\mathbb{1}_{A^c} \;,$$

quindi, passando agli integrali, per il Teorema 13.3.1 e l'Osservazione 13.3.3 si ha

$$k\mu(A) \;\leq\; \int f\,d\mu \;\leq\; k\mu(A) + (+\infty)\mu(A^c) \;=\; k\mu(A) \;,$$

pertanto

$$\int f\,d\mu \;=\; k\mu(A) \;=\; k \;.$$

Proposizione 13.4.1. *Sia $(\Omega, \mathcal{A})$ il seguente spazio misurabile: Ω è un insieme infinito non numerabile e $\mathcal{A}$ è la σ-algebra*

$$\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{P}(\Omega) \,:\, A \text{ è numerabile oppure } A^c \text{ è numerabile}\} \;.$$

Una funzione numerica $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ è $\mathcal{A}$-misurabile se e solo se esiste una costante $k \in \overline{\mathbb{R}}$ tale che $\{f = k\}^c$ sia un insieme numerabile.

Dimostrazione. Dimostriamo dapprima che l'esistenza di $k \in \overline{\mathbb{R}}$ tale che $\{f = k\}^c$ sia un insieme numerabile implica la $\mathcal{A}$-misurabilità di f. Infatti, fissato un qualunque $a \in \mathbb{R}$ e considerato l'insieme $\{f \geq a\}$, si hanno i seguenti due casi:

— se $a > k$, allora $\{f \geq a\} \subseteq \{f = k\}^c$, quindi $\{f \geq a\}$ è un insieme numerabile;

— se $a \leq k$, allora $\{f \geq a\} \supseteq \{f = k\}$, quindi $\{f \geq a\}^c \subseteq \{f = k\}^c$, pertanto $\{f \geq a\}^c$ è un insieme numerabile.

In conclusione, l'insieme $\{f \geq a\}$ appartiene, in ogni caso, alla σ-algebra $\mathcal{A}$, dunque la funzione f è $\mathcal{A}$-misurabile.

Viceversa, proviamo che la $\mathcal{A}$-misurabilità della funzione f implica l'esistenza della costante k.

Se la funzione f è $\mathcal{A}$-elementare, allora, considerata una sua rappresentazione normale:

$$f \;=\; \sum_{i=1}^{h} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i} \;,$$

si ha che almeno uno degli insiemi A_i è non numerabile; supponiamo che tale insieme sia A_{i^*}; ne segue che $A_{i^*}^c$ è un insieme numerabile e, a maggior ragione, è numerabile l'insieme $\{f = \alpha_{i^*}\}^c \subseteq A_{i^*}^c$, pertanto la tesi è verifcata con $k = \alpha_{i^*}$.

Supponiamo adesso che f sia una qualunque funzione numerica $\mathcal{A}$-misurabile. Allora, considerata una qualunque successione $\{u_n\}$ di funzioni $\mathcal{A}$-elementari tale che $u_n \uparrow |f|$,

esiste, per quanto già dimostrato, una successione $\{h_n\}$ di elementi di $\overline{\mathbb{R}}$ tale che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, l'insieme $\{u_n = h_n\}^{\mathrm{c}}$ è numerabile. Ne segue che anche l'insieme

$$\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty}\{u_n = h_n\}\Big)^{\mathrm{c}} \;=\; \bigcup_{n=1}^{\infty}\{u_n = h_n\}^{\mathrm{c}}$$

è numerabile, quindi l'insieme

$$A \;=\; \bigcap_{n=1}^{\infty}\{u_n = h_n\}$$

non è vuoto. Dato che per ogni $\omega \in A$ risulta

$$|f(\omega)| \;=\; \lim_{n\to\infty} u_n(\omega) \;=\; \lim_{n\to\infty} h_n$$

ne deduciamo che la successione $\{h_n\}$ è convergente in $\overline{\mathbb{R}}$; inoltre, posto

$$h \;=\; \lim_{n\to\infty} h_n \;,$$

l'insieme $\{|f| = h\}^{\mathrm{c}} \subseteq A^{\mathrm{c}}$ è numerabile. A questo punto, se $h = 0$, abbiamo che $\{f = 0\}^{\mathrm{c}} = \{|f| = 0\}^{\mathrm{c}}$ è un insieme numerabile e la tesi è provata. Se, invece, $h \neq 0$, allora, essendo $\{|f| = h\}$ un insieme non numerabile e risultando $\{|f| = h\} = \{f = h\} \cup \{f = -h\}$, abbiamo che almeno uno degli insiemi $\{f = h\}$ e $\{f = -h\}$ è non numerabile e quindi ha complementare numerabile (dato che si tratta di un insieme appartenente a $\mathcal{A}$); ciò completa la dimostrazione.

13.5. La proprietà distributiva dell'integrale rispetto alla misura.

Osserviamo che, date in $\overline{\mathbb{R}}$ le serie a termini non negativi

$$\sum_{s=1}^{\infty} a_{1s} \;,\; \sum_{s=1}^{\infty} a_{2s} \;,\; \ldots \;,\; \sum_{s=1}^{\infty} a_{hs}$$

e considerata la serie somma

$$\sum_{s=1}^{\infty}\big(a_{1s} + a_{2s} + \ldots + a_{hs}\big) \;,$$

risulta

$$\sum_{s=1}^{\infty}\big(a_{1s} + a_{2s} + \ldots + a_{hs}\big) \;=\; \sum_{s=1}^{\infty} a_{1s} \;+\; \sum_{s=1}^{\infty} a_{2s} \;+ \ldots +\; \sum_{s=1}^{\infty} a_{hs} \;. \tag{13.5.1}$$

Infatti, la (13.5.1) è ovviamente verificata quando qualcuno dei termini a_{rs} è uguale a $+\infty$; in caso contrario l'asserto segue subito dal teorema di Analisi 2 sulla serie somma di due serie a termini reali.

Osserviamo ancora che la (13.5.1) può scriversi

$$\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{h} a_{rs} \;=\; \sum_{r=1}^{h}\sum_{s=1}^{\infty} a_{rs} \;,$$

quindi il risultato appena evidenziato può essere enunciato, sotto forma di lemma, nel modo seguente.

Lemma 13.5.1. *Dato $h \in \mathbb{N}$, sia*

$$(r,s) \;\to\; a_{rs}$$

una qualunque applicazione di $\{1,\ldots,h\} \times \mathbb{N}$ in $[0,+\infty]$. Risulta

$$\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{h} a_{rs} \;=\sum_{r=1}^{h}\sum_{s=1}^{\infty} a_{rs} \;.$$

Mediante il Lemma 13.5.1 possiamo facilmente dimostrare il seguente teorema.

Teorema 13.5.1. (Invertibilità dell'ordine di sommazione per le serie doppie a termini non negativi). *Sia*

$$(n,k) \;\to\; a_{nk}$$

una qualunque applicazione di $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ in $[0,+\infty]$. Risulta

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \;=\; \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{nk} \;. \tag{13.5.2}$$

Dimostrazione. Per ogni $\overline{n} \in \mathbb{N}$ si ha, per il Lemma 13.5.1,

$$\sum_{n=1}^{\overline{n}}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \;=\; \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\overline{n}} a_{nk} \;;$$

pertanto, dato che per ogni $k \in \mathbb{N}$ vale, ovviamente, la maggiorazione

$$\sum_{n=1}^{\overline{n}} a_{nk} \;\le\; \sum_{n=1}^{\infty} a_{nk} \;,$$

si ha pure

$$\sum_{n=1}^{\overline{n}}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \;\le\; \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{nk} \;;$$

per l'arbitrarietà di $\overline{n} \in \mathbb{N}$ concludiamo che anche per la somma

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \;=\; \sup_{\overline{n}\in\mathbb{N}} \sum_{n=1}^{\overline{n}}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}$$

è verificata la disuguaglianza

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \;\leq\; \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{nk}\ . \tag{13.5.3}$$

Per completare la dimostrazione basta far vedere che oltre alla (13.5.3) è verificata anche la disuguaglianza contraria. Infatti, considerata l'applicazione

$$(n,k) \;\to\; a'_{nk}$$

definita ponendo

$$a'_{nk} \;=\; a_{kn} \qquad\qquad \forall (n,k) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}\ ,$$

per la (13.5.3) si ha

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{nk} \;=\; \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{kn} \;=\; \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a'_{nk} \;\leq\; \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a'_{nk} \;=\; \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{kn} \;=\; \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}$$

(la prima e l'ultima uguaglianza si ottengono scambiando i nomi degli indici di sommazione).

Il Teorema 13.5.1 può interpretarsi nel seguente modo: se gli elementi della matrice (con infinite righe ed infinite colonne)

$$\begin{array}{ccccc}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\
a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} & \dots \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

sono tutti non negativi, allora, se si calcola la somma di tali elementi "per righe" (cioè si sommano dapprima tutti gli elementi di ciascuna riga e, successivamente, tutti i risultati così ottenuti) oppure "per colonne", si ottiene lo stesso risultato.

Osserviamo che tale affermazione non è più vera se si elimina l'ipotesi sul segno dei termini a_{nk} (si vedano in proposito i controesempi riportati nell'appendice al paragrafo).

Segnaliamo inoltre che un altro caso di validità della (13.5.2) è dato dal Teorema 13.5.3, esposto nell'appendice al paragrafo.

Proposizione 13.5.1. *Sia* $(\Omega, \mathcal{A})$ *uno spazio misurabile e sia* $\{\mu_n\}$ *una successione di misure su* $\mathcal{A}$*. Allora anche la funzione di insieme*

$$\mu \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n$$

è una misura su $\mathcal{A}$*.*

Dimostrazione. Osserviamo che la funzione μ è definita in $\mathcal{A}$ in quanto somma di una serie di funzioni non negative, tutte definite in $\mathcal{A}$. La μ verifica inoltre, ovviamente, i postulati M_1) e M_2) delle premisure. Proviamo che è verificato anche M_4). Infatti, grazie al Teorema 13.5.1, per ogni successione $\{A_k\}$ di insiemi appartenenti ad $\mathcal{A}$, a due a due disgiunti, si ha

$$\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \mu_n(A_k) \;=$$

$$=\; \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(A_k) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)\;.$$

Corollario 13.5.1. *Sia* $(\Omega, \mathcal{A})$ *uno spazio misurabile e siano* $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_h$ *misure su* $\mathcal{A}$*. Allora anche la somma* $\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_h$ *è una misura su* $\mathcal{A}$*.*

Dimostrazione. Basta porre, per ogni $n > h$, $\mu_n = \mu_0$, la misura identicamente nulla su $\mathcal{A}$, e applicare la Proposizione 13.5.1.

Proposizione 13.5.2. (Integrazione rispetto alla somma di due misure). *Sia* $(\Omega, \mathcal{A})$ *uno spazio misurabile e siano* μ_1*,* μ_2 *misure su* $\mathcal{A}$*. Allora, per ogni funzione* $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$*,* $\mathcal{A}$*-misurabile e tale che* $f \geq 0$*, risulta*

$$\int f d(\mu_1 + \mu_2) \;=\; \int f\, d\mu_1 \;+\; \int f\, d\mu_2\;. \tag{13.5.4}$$

Dimostrazione. La (13.5.4) vale per ogni funzione $\mathcal{A}$-elementare

$$u \;=\; \sum_{i=1}^{h} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}\;;$$

si ha infatti:

$$\int u\, d(\mu_1 + \mu_2) \;=\; \sum_{i=1}^{h} \alpha_i\, (\mu_1 + \mu_2)(A_i) \;=$$

$$=\; \sum_{i=1}^{h} \alpha_i\, \mu_1(A_i) \;+\; \sum_{i=1}^{h} \alpha_i\, \mu_2(A_i) \;=\; \int u\, d\mu_1 \;+\; \int u\, d\mu_2\;.$$

Proviamo che la (13.5.4) vale in generale. Detta $\{u_k\}$ una successione di funzioni $\mathcal{A}$-elementari tale che $u_k \uparrow f$, si ha, per ogni $k \in \mathbb{N}$,

$$\int u_k \, d(\mu_1 + \mu_2) \;=\; \int u_k \, d\mu_1 \;+\; \int u_k \, d\mu_2 \;;$$

passando al limite per $k \to \infty$ si ottiene la tesi.

La precedente proposizione si estende subito, ragionando per induzione, al caso di una qualunque somma finita di misure.

Proposizione 13.5.2′. (Integrazione rispetto ad una somma finita di misure). *Sia* $(\Omega, \mathcal{A})$ *uno spazio misurabile e siano* $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_h$ *misure su* $\mathcal{A}$. *Allora, per ogni funzione* $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$, $\mathcal{A}$*-misurabile e non negativa, risulta*

$$\int f \, d(\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_h) \;=\; \int f \, d\mu_1 \;+\; \int f \, d\mu_2 \;+ \ldots + \int f \, d\mu_h \;.$$

Proposizione 13.5.3. (Monotonia dell'integrale rispetto alla misura). *Sia* $(\Omega, \mathcal{A})$ *uno spazio misurabile e siano* μ_1, μ_2 *misure su* $\mathcal{A}$, *verificanti la disuguaglianza* $\mu_1 \leq \mu_2$ (cioè $\mu_1(A) \leq \mu_2(A) \quad \forall A \in \mathcal{A}$). *Allora, per ogni funzione* $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$, $\mathcal{A}$*-misurabile e non negativa, risulta*

$$\int f d\mu_1 \;\leq\; \int f \, d\mu_2 \;. \tag{13.5.5}$$

Dimostrazione. La (13.5.5) vale per le funzioni $\mathcal{A}$-elementari. Si ha infatti, per ogni funzione $\mathcal{A}$-elementare $u = \sum_{i=1}^{h} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$,

$$\int u \, d\mu_1 \;=\; \sum_{i=h}^{n} \alpha_i \, \mu_1(A_i) \;\leq\; \sum_{i=1}^{h} \alpha_i \mu_2(A_i) \;=\; \int u \, d\mu_2 \;.$$

Proviamo che la (13.5.5) vale in generale. Detta $\{u_k\}$ una successione di funzioni $\mathcal{A}$-elementari tale che $u_k \uparrow f$, si ha, per ogni $k \in \mathbb{N}$,

$$\int u_k \, d\mu_1 \;\leq\; \int u_k \, d\mu_2 \;;$$

per ottenere la tesi basta passare al limite per $k \to \infty$ nella precedente disuguaglianza.

Proposizione 13.5.4. (Integrazione rispetto alla somma di una serie di misure). *Sia* $(\Omega, \mathcal{A})$ *uno spazio misurabile e sia* $\{\mu_n\}$ *una successione di misure su* $\mathcal{A}$. *Allora, per ogni funzione* $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$, $\mathcal{A}$*-misurabile e non negativa, risulta*

$$\int f \, d(\textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n) \;=\; \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \int f \, d\mu_n \;. \tag{13.5.6}$$

Dimostrazione. La (13.5.6) vale per ogni funzione $\mathcal{A}$-elementare

$$u \;=\; \sum_{i=1}^{h} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i} \;;$$

si ha infatti, per il Lemma 13.5.1,

$$\int u \, d(\textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n) \;=\; \displaystyle\sum_{i=1}^{h} \alpha_i \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(A_i) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{h} \alpha_i \, \mu_n(A_i) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \int u \, d\mu_n \;.$$

Per dimostrare la validità della (13.5.6) in generale consideriamo una successione $\{u_k\}$ di funzioni $\mathcal{A}$-elementari tale che $u_k \uparrow f$. Per la monotonia dell'integrale (rispetto alla funzione integranda) si ha, per ogni $k \in \mathbb{N}$,

$$\int u_k \, d(\textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n) \;=\; \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \int u_k \, d\mu_n \;\leq\; \sum_{n=1}^{\infty} \int f \, d\mu_n$$

e quindi

$$\int f \, d(\textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n) \;=\; \displaystyle\sup_{k \in \mathbb{N}} \int u_k \, d(\textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n) \;\leq\; \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \int f \, d\mu_n \;.$$

D'altra parte, per le Proposizioni 13.5.2′ e 13.5.3, si ha, per ogni $\overline{n} \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=1}^{\overline{n}} \int f \, d\mu_n \;=\; \int f \, d(\textstyle\sum_{n=1}^{\overline{n}} \mu_n) \;\leq\; \displaystyle\int f \, d(\textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n)$$

e quindi, per l'arbitrarietà di $\overline{n} \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int f \, d\mu_n \;=\; \sup_{\overline{n} \in \mathbb{N}} \sum_{n=1}^{\overline{n}} \int f \, d\mu_n \;\leq\; \int f \, d(\textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n) \;.$$

Ciò completa la dimostrazione.

Proposizione 13.5.5. *Sia $(\Omega, \mathcal{A})$ uno spazio misurabile. Siano, inoltre, μ una misura su $\mathcal{A}$ e c un elemento di $[0, +\infty]$. Allora anche $c\mu$ è una misura su $\mathcal{A}$.*

Proposizione 13.5.6. *Sia $(\Omega, \mathcal{A})$ uno spazio misurabile. Siano, inoltre, μ una misura su $\mathcal{A}$ e c un elemento di $[0, +\infty]$. Allora, per ogni funzione $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$, $\mathcal{A}$-misurabile e non negativa, risulta*

$$\int f \, d(c\mu) \;=\; c \int f \, d\mu \;.$$

Esercizio 13.5.1. Provare le Proposizioni 13.5.5 e 13.5.6.

Ovviamente, le Proposizioni 13.5.1 e 13.5.5 implicano la successiva Proposizione 13.5.7 della quale esse stesse sono, a loro volta, casi particolari.

Proposizione 13.5.7. *Sia* $(\Omega, \mathcal{A})$ *uno spazio misurabile. Siano, inoltre,* $\{\mu_n\}$ *una successione di misure su* $\mathcal{A}$ *e* $\{c_n\}$ *una successione di elementi di* $[0, +\infty]$*. Allora anche la funzione*

$$\mu = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \mu_n \tag{13.5.7}$$

è una misura su $\mathcal{A}$*.*

Corollario 13.5.2. *Sia* $(\Omega, \mathcal{A})$ *uno spazio misurabile. Siano, inoltre,* $\mu_1, \ldots, \mu_h$ *misure su* $\mathcal{A}$ *e* $c_1, \ldots, c_h$ *elementi di* $[0, +\infty]$*. Allora anche* $c_1\mu_1 + \ldots + c_n\mu_n$ *è una misura su* $\mathcal{A}$*.*

Per quanto riguarda l'integrazione rispetto ad una misura del tipo (13.5.7), dalle Proposizioni 13.5.4 e 13.5.6 si deduce subito il seguente teorema, che, a sua volta, comprende come casi particolari le Proposizioni 13.5.2′, 13.5.4 e 13.5.6.

Teorema 13.5.2. (Proprietà distributiva dell'integrale rispetto alla misura). *Sia* $(\Omega, \mathcal{A})$ *uno spazio misurabile. Siano, inoltre,* $\{\mu_n\}$ *una successione di misure su* $\mathcal{A}$ *e* $\{c_n\}$ *una successione di elementi di* $[0, +\infty]$*. Allora, per ogni funzione* $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$*,* $\mathcal{A}$*-misurabile e non negativa, risulta*

$$\int f \, d(\textstyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n \mu_n) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n \int f \, d\mu_n \ . \tag{13.5.8}$$

In particolare si ha il seguente corollario.

Corollario 13.5.3. *Sia* $(\Omega, \mathcal{A})$ *uno spazio misurabile. Siano, inoltre,* $\mu_1, \ldots, \mu_h$ *misure su* $\mathcal{A}$ *e* $c_1, \ldots, c_h$ *elementi di* $[0, +\infty]$*. Allora, per ogni funzione* $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$*,* $\mathcal{A}$*-misurabile e non negativa, risulta*

$$\int f \, d(\textstyle\sum_{n=1}^{h} c_n \mu_n) = \displaystyle\sum_{n=1}^{h} c_n \int f \, d\mu_n \ .$$

Appendice al n. 13.5.

Abbiamo già accennato al fatto che, in generale, data una serie doppia, non è necessariamente vero che valga la (13.5.2), cioè non è necessariamente vero che le due somme della serie (per righe e per colonne) esistano entrambe e siano uguali. Lasciando allo studente il facile compito di produrre qualche esempio in cui nessuna delle due somme esiste, facciamo vedere con i successivi esempi che l'esistenza di una delle due somme (per righe o per colonne) non implica necessariamente l'esistenza dell'altra (Esempi 13.5.1) e che, anche quando le due somme esistono entrambe, non necessariamente si verifica la loro uguaglianza (Esempi 13.5.2).

Esempi 13.5.1. 1) Sia $(n,k) \to a_{nk}$ l'applicazione da $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ in $\mathbb{R}$ definita nel modo seguente:

$$a_{nk} = \begin{cases} (-1)^{k-1} & \text{se } n = 1 \ , \\ (-1)^k & \text{se } n \geq 2 \text{ e } k = n \ , \\ 0 & \text{se } n \geq 2 \text{ e } k \neq n \ . \end{cases}$$

In questo caso la somma per righe non esiste per il semplice motivo che non esiste la somma degli elementi della prima riga

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{1k} = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + (-1)^{k-1} + \ldots \quad .$$

Invece la somma per colonne esiste ed è uguale a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{nk} = 1 + 0 + 0 + \ldots + 0 + \ldots = 0 \ .$$

2) Sia

$$a_{nk} = \begin{cases} 1 & \text{se } k = 2n - 1 \ , \\ -1 & \text{se } k = 2n \ , \\ 0 & \text{se } k \neq 2n - 1, 2n \ . \end{cases}$$

In questo caso la somma per righe esiste ed è uguale a zero, dato che la somma degli elementi di ciascuna riga è uguale a zero. Invece, per quanto riguarda la somma per colonne, si ha

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{nk} = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + (-1)^{k-1} + \ldots \quad ,$$

quindi tale somma non esiste.

3) Sia

$$a_{nk} = \begin{cases} n & \text{se } k = n \ , \ n \text{ dispari} \ , \\ n+1 & \text{se } k = n \ , \ n \text{ pari} \ , \\ -(n+1) & \text{se } k = n+1 \ , \ n \text{ dispari} \ , \\ -n & \text{se } k = n+1 \ , \ n \text{ pari} \ , \\ 0 & \text{se } k \neq n, n+1 \ . \end{cases}$$

In questo caso la somma per righe non esiste, mentre la somma per colonne è uguale a $+\infty$.

Esempi 13.5.2. 1) Sia $(n,k) \to a_{nk}$ l'applicazione da $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ in $\mathbb{R}$ definita nel modo seguente:

$$a_{nk} = \begin{cases} 1 & \text{se } k = n \ , \\ -1 & \text{se } k = n+1 \ , \\ 0 & \text{se } k \neq n, n+1 \ . \end{cases}$$

In questo caso sommando per righe si ottiene

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \;=\; 0+0+\ldots+0+\ldots \;=\; 0 \;,$$

mentre la somma per colonne è uguale a

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{nk} \;=\; 1+0+\ldots+0+\ldots \;=\; 1 \;.$$

2) Supponiamo adesso che

$$a_{nk} \;=\; \begin{cases} -n & \text{se } \; k=n \;, \\ n+1 & \text{se } \; k=n+1 \;, \\ 0 & \text{se } \; k\neq n,\, n+1 \;. \end{cases}$$

In questo caso si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \;=\; +\infty \qquad , \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{nk} \;=\; -1 \;.$$

3) Sia

$$a_{nk} \;=\; \begin{cases} -(2n-1) & \text{se } \; k=n \;, \\ 2n & \text{se } \; k=n+1 \;, \\ 0 & \text{se } \; k\neq n,\, n+1 \;. \end{cases}$$

Allora

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \;=\; +\infty \qquad , \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{nk} \;=\; -\infty \;.$$

Terminiamo il paragrafo mostrando che un'altra condizione sufficiente per la validità della (13.5.2), oltre a quella fornita dal Teorema 13.5.1, è che la serie doppia considerata sia assolutamente convergente in $\mathbb{R}$.

Teorema 13.5.3. (Invertibilità dell'ordine di sommazione per le serie doppie assolutamente convergenti in $\mathbb{R}$). *Sia*

$$(n,k) \;\to\; a_{nk}$$

un'applicazione di $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ *in* $\mathbb{R}$ *tale che*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| \;<\; +\infty \qquad (^2) \;. \tag{13.5.9}$$

Allora vale la (13.5.2).

Dimostrazione. L'ipotesi (13.5.9) implica in particolare che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, risulta

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| \ < \ +\infty \quad ,$$

cioè la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}$$

è assolutamente convergente in $\mathbb{R}$, quindi la somma di tale serie esiste finita e vale la maggiorazione

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \right| \ \leq \ \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| \quad ;$$

da questa, sempre per l'ipotesi (13.5.9), segue che anche la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \right)$$

è assolutamente convergente in $\mathbb{R}$, quindi la somma per righe della serie doppia, cioè

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \ = \ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \right) \quad ,$$

esiste finita. Analogamente, tenendo presente quanto osservato nella nota ([2]), si ha che anche la somma per colonne esiste finita.

Per dimostrare che vale la (13.5.2), poniamo, per ogni $(n, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$,

$$a_{nk}^{+} \ = \ \frac{|a_{nk}| + a_{nk}}{2} \qquad , \qquad a_{nk}^{-} \ = \ \frac{|a_{nk}| - a_{nk}}{2}$$

ed osserviamo che risulta

$$0 \ \leq \ a_{nk}^{+} \, , \, a_{nk}^{-} \ \leq \ |a_{nk}| \quad , \tag{13.5.10}$$

nonché

$$a_{nk} \ = \ a_{nk}^{+} \ - \ a_{nk}^{-} \quad .$$

Dalla (13.5.10) e dall'ipotesi (13.5.9), tenuto conto del Teorema 13.5.1, segue che è

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{+} \ = \ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{nk}^{+} \ < \ +\infty \qquad , \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{-} \ = \ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{nk}^{-} \ < \ +\infty$$

([2]) Per il Teorema 13.5.1 questa ipotesi è equivalente a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |a_{nk}| \ < \ +\infty \quad .$$

e quindi, in particolare,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{+} \ < \ +\infty \qquad , \qquad \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{-} \ < \ +\infty \qquad\qquad \forall n \in \mathbb{N} \ ,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{nk}^{+} \ < \ +\infty \qquad , \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_{nk}^{-} \ < \ +\infty \qquad\qquad \forall k \in \mathbb{N} \ .$$

Tenuto conto di quanto precede, grazie al teorema di Analisi 2 sulla somma della serie differenza di due serie convergenti in $\mathbb{R}$, abbiamo allora, applicando il Teorema 13.5.1 alle due serie doppie di termini generali a_{nk}^{+} e a_{nk}^{-},

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \ = \ \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_{nk}^{+} - a_{nk}^{-}\right] \ = \ \sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{+} - \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{-}\right] \ =$$

$$= \ \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{+} - \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{-} \ = \ \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{nk}^{+} - \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{nk}^{-} \ =$$

$$= \ \sum_{k=1}^{\infty}\left[\sum_{n=1}^{\infty} a_{nk}^{+} - \sum_{n=1}^{\infty} a_{nk}^{-}\right] \ = \ \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_{nk}^{+} - a_{nk}^{-}\right] \ = \ \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{nk} \ .$$

13.6. Misure sulla σ-algebra di tutti i sottoinsiemi di un insieme numerabile.

Se $M \neq \emptyset$ è un insieme numerabile, la precedente Proposizione 13.5.7 (ovvero il Corollario 13.5.2 nel caso che l'insieme M sia finito) ci consente di caratterizzare le misure definite sulla σ-algebra $\mathcal{P}(M)$ di tutti i sottoinsiemi di M. Tale proposizione, infatti, implica che, se

$$m \to c_m$$

è una qualunque applicazione da M in $[0, +\infty]$, allora la funzione di insieme

$$\mu \ = \ \sum_{m \in M} c_m \delta_m \tag{13.6.1}$$

(dove δ_m è la delta di Dirac concentrata nel punto m) è una misura su $\mathcal{P}(M)$ ([3]).

([3]) Se M è un insieme infinito il significato dell'espressione che figura al secondo membro della (13.6.1) è il seguente : si fissa una qualunque bigezione $n \to m_n$, tra $\mathbb{N}$ e M, e si pone

$$\sum_{m \in M} c_m \delta_m \ = \ \sum_{n=1}^{\infty} c_{m_n} \delta_{m_n} \ ;$$

il risultato ottenuto non dipende dalla bigezione $n \to m_n$ poiché in $\overline{\mathbb{R}}$ le serie a termini non negativi hanno la proprietà commutativa.

È allora facile provare il seguente teorema.

Teorema 13.6.1. (Misure su $\mathcal{P}(M)$, M insieme numerabile). *Sia $M \neq \emptyset$ un insieme numerabile. Siano, inoltre, $\mathbf{C}$ l'insieme di tutte le applicazioni da M in $[0, +\infty]$ e $\mathbf{M}$ l'insieme di tutte le misure definite su $\mathcal{P}(M)$.*

La funzione che ad ogni applicazione

$$m \to c_m \ ,$$

elemento di $\mathbf{C}$, associa l'elemento μ di $\mathbf{M}$ definito tramite la (13.6.1) *è una bigezione tra $\mathbf{C}$ e $\mathbf{M}$.*

Dimostrazione. Occorre provare che, dato un qualunque elemento $\mu \in \mathbf{M}$, esiste una ed una sola applicazione

$$m \to c_m \ ,$$

elemento di $\mathbf{C}$, tale che risulti verificata la (13.6.1).

Infatti, se è verificata la (13.6.1), allora per ogni elemento $\overline{m}$ dell'insieme M si ha

$$\mu(\{\overline{m}\}) \ = \ \sum_{m \in M} c_m \delta_m(\{\overline{m}\}) \ = \ c_{\overline{m}} \delta_{\overline{m}}(\{\overline{m}\}) \ = \ c_{\overline{m}} \ ,$$

quindi l'unica applicazione $m \to c_m$ per la quale può valere la (13.6.1) è quella che si ottiene ponendo

$$c_m \ = \ \mu(\{m\}) \qquad \forall m \in M \ . \tag{13.6.2}$$

D'altra parte, se i valori c_m, $m \in M$, sono fissati secondo la (13.6.2), allora per ogni insieme $A \subseteq M$, $A \neq \emptyset$, per la σ-additività della misura μ (ovvero per la finita additività, se l'insieme A è finito) risulta

$$\mu(A) \ = \ \mu\Big(\bigcup_{m \in A} \{m\} \Big) \ = \ \sum_{m \in A} \mu(\{m\}) \ = \ \sum_{m \in A} c_m \ = \ \sum_{m \in A} c_m \delta_m(A) \ = \ \sum_{m \in M} c_m \delta_m(A) \ ,$$

dunque vale la (13.6.1). Ciò completa la dimostrazione.

Osservazione 13.6.1. In base all'enunciato del Teorema 13.6.1 possiamo asserire che assegnare una misura μ sulla σ-algebra $\mathcal{P}(M)$ (M insieme numerabile) equivale ad assegnare un'applicazione $m \to c_m$, da M in $[0, +\infty]$ e che, una volta fissata l'applicazione $m \to c_m$, la misura μ resta individuata tramite la (13.6.1). Dalla dimostrazione del teorema segue inoltre che, se μ è una misura su $\mathcal{P}(M)$, l'unica applicazione $m \to c_m$, da M in $[0, +\infty]$, per la quale risulta verificata la (13.6.1) è quella che associa ad ogni elemento m di M la misura $\mu(\{m\})$ dell'insieme unitario $\{m\}$. Possiamo quindi concludere che *una misura μ sulla σ-algebra $\mathcal{P}(M)$ (M insieme numerabile) è individuata dai valori che essa assume sugli insiemi unitari* (ciò, d'altra parte è facilmente intuibile dato che le misure hanno la proprietà di σ-addtitività).

Alla luce di quanto osservato hanno perfettamente senso (supponendo, per fissare le idee, che sia $M = \mathbb{N}$) frasi del tipo "sia μ la misura su $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ tale che $\mu(\{n\}) = \frac{1}{2^n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$" oppure "tale che $\mu(\{n\}) = \frac{1}{3^n}$ se n è dispari e $\mu(\{n\}) = 1$ se n è pari" oppure ancora "tale che $\mu(\{1\}) = +\infty$ e $\mu(\{n\}) = 1$ $\forall n \geq 2$", ecc. ecc.

Teorema 13.6.2. (Integrazione rispetto ad una misura definita su $\mathcal{P}(M)$). *Dato lo spazio di misura $(M, \mathcal{P}(M), \mu)$, dove M è un insieme numerabile, supponiamo che f sia una funzione numerica non negativa definita in M.*

Si ha allora

$$\int f\, d\mu \;=\; \sum_{m \in M} f(m)\mu(\{m\}) \quad . \tag{13.6.3}$$

Dimostrazione. Osserviamo preliminarmente che l'integrale $\int f\, d\mu$ ha significato poiché la funzione f è certamente $\mathcal{P}(M)$-misurabile; inoltre, per quanto riguarda il significato della somma al secondo membro della (13.6.3), rinviamo alla nota ([3]).

Per dimostrare la (13.6.3) basta tenere presente che è (cfr. la precedente Osservazione 13.6.1)

$$\mu \;=\; \sum_{m \in M} \mu(\{m\})\delta_m \;;$$

di conseguenza, usando il Teorema 13.5.2 (ovvero il Corollario 13.5.3 nel caso che l'insieme M sia finito) e ricordando l'Esempio 13.4.1, si ottiene

$$\int f\, d\mu \;=\; \sum_{m \in M} \mu(\{m\}) \int f\, d\delta_m \;=\; \sum_{m \in M} f(m)\mu(\{m\}) \quad .$$

Osservazione 13.6.2. La (13.6.3) può anche dimostrarsi osservando che è

$$f \;=\; \sum_{m \in M} f(m)\mathbb{1}_{\{m\}} \tag{13.6.4}$$

(infatti le funzioni che figurano al primo ed al secondo membro della (13.6.4) assumono entrambe in ogni punto $\overline{m} \in M$ lo stesso valore $f(\overline{m})$) e pertanto, per il teorema di integrazione per serie (ovvero per il Teorema 13.3.1, 2), nel caso che l'insieme M sia finito), si ha

$$\int f\, d\mu \;=\; \sum_{m \in M} \int f(m)\mathbb{1}_{\{m\}}\, d\mu \;=$$

(per il Teorema 13.3.1, 1), tenuto conto anche dell'Osservazione 13.3.3, se occorre)

$$= \sum_{m \in M} f(m) \int \mathbb{1}_{\{m\}}\, d\mu \;=\; \sum_{m \in M} f(m)\mu(\{m\}) \;.$$

13.7. Funzioni numeriche μ-quasi-integrabili e loro integrale.

Definizione 13.7.1. (*Parte positiva e parte negativa di una funzione numerica*). Sia $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione numerica definita in un insieme Ω.

Le due funzioni numeriche $f^+, f^- : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$, definite ponendo

$$f^+ \;=\; \max\{f, 0\} \quad , \quad f^- \;=\; -\min\{f, 0\} \quad ,$$

si chiamano, rispettivamente, la *parte positiva* e la *parte negativa* della funzione f.

Proposizione 13.7.1. (Proprietà di f^+ e f^-). *La parte positiva e la parte negativa di una funzione numerica $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ hanno le seguenti proprietà:*

a) $f^+ \geq 0 \quad , \quad f^- \geq 0 \quad ;$

b) $f^+ - f^- \;=\; f$ ([4]) ;

c) $f^+ + f^- \;=\; |f| \quad ;$

d) *se la funzione f è reale, allora*

$$f^+ \;=\; \frac{|f| + f}{2} \quad , \quad f^- \;=\; \frac{|f| - f}{2} \quad .$$

Dimostrazione. La proprietà a) è ovvia.

Per verificare la b) consideriamo un qualsiasi punto $\omega \in \Omega$ e distinguiamo i due casi $f(\omega) \geq 0$ e $f(\omega) < 0$.

Se $f(\omega) \geq 0$, allora $f^+(\omega) = f(\omega)$ e $f^-(\omega) = 0$, quindi la differenza $f^+(\omega) - f^-(\omega)$ ha senso e si ha $f^+(\omega) - f^-(\omega) = f(\omega)$.

Se $f(\omega) < 0$, allora $f^+(\omega) = 0$ e $f^-(\omega) = -f(\omega)$, quindi, anche in questo caso, la differenza $f^+(\omega) - f^-(\omega)$ ha senso ed è uguale a $f(\omega)$.

In maniera analoga, distinguendo i due casi $f(\omega) \geq 0$ e $f(\omega) < 0$, si verificano le proprietà c) e d).

Proposizione 13.7.2. (Misurabilità di f^+ e f^-). *Sia $(\Omega, \mathcal{A})$ uno spazio misurabile e sia $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione numerica su Ω.*

La funzione f è $\mathcal{A}$-misurabile se e solo se le funzioni f^+ e f^- sono entrambe $\mathcal{A}$-misurabili.

Dimostrazione. La misurabilità di f implica quella di f^+ e f^- poiché il massimo ed il minimo di due funzioni $\mathcal{A}$-misurabili (in questo caso la funzione f e la costante 0) sono funzioni $\mathcal{A}$-misurabili (Corollario 12.3.3) e inoltre l'opposta di una funzione $\mathcal{A}$-misurabile

([4]) Ciò significa che la funzione differenza $f^+ - f^-$ è definita in tutto l'insieme Ω ed è uguale alla funzione f.

è una funzione $\mathcal{A}$-misurabile (Teorema 12.3.1). Viceversa, se f^+ e f^- sono $\mathcal{A}$-misurabili, allora anche $f = f^+ - f^-$ è $\mathcal{A}$-misurabile per il Teorema 12.3.1.

Definizione 13.7.2. (*Funzioni μ-quasi-integrabili e loro integrale*). Sia $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura e sia $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione numerica $\mathcal{A}$-misurabile.

Si dice che la funzione f è *μ-quasi-integrabile* se almeno uno dei due integrali

$$\int f^+ d\mu \quad , \quad \int f^- d\mu \quad (^5) \tag{13.7.1}$$

è diverso da $+\infty$ ([6]).

Se f è μ-quasi-integrabile, l'*integrale di f rispetto a μ* è l'elemento $\int f\, d\mu$ di $\overline{\mathbb{R}}$ definito nel modo seguente:

$$\int f\, d\mu \;=\; \int f^+ d\mu \;-\; \int f^- d\mu \quad .$$

Se f è μ-quasi-integrabile ed è $\int f\, d\mu \in \mathbb{R}$ (cioè gli integrali (13.7.1) sono entrambi finiti), si dice che f è *μ-integrabile.*

Osservazione 13.7.1. (*Coerenza*). Se $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ è una funzione numerica $\mathcal{A}$-misurabile e non negativa, allora, essendo $f^+ = f$, $f^- = 0$, la funzione f risulta μ-quasi-integrabile secondo la Definizione 13.7.2 ed il suo integrale secondo tale definizione coincide con l'integrale già definito in precedenza (Definizione 13.3.1). Inoltre, in questo caso, la funzione f è μ-integrabile se e solo se $\int f\, d\mu < +\infty$.

Nel seguito abbrevieremo spesso la locuzione "la funzione f è $\mathcal{A}$-misurabile e μ-[quasi]-integrabile" dicendo, più concisamente, "la funzione f è μ-[quasi]-integrabile".

Esempio 13.7.1. Consideriamo lo spazio di misura $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \delta_{\overline{\omega}})$, già preso in esame nell'Esempio 13.4.1. Se f è una qualunque funzione numerica su Ω si ha, per il risultato dell'Esempio 13.4.1,

$$\int f^+\, d\delta_{\overline{\omega}} \;=\; f^+(\overline{\omega}) \quad , \quad \int f^-\, d\delta_{\overline{\omega}} \;=\; f^-(\overline{\omega}) \quad ;$$

ne segue che f è $\delta_{\overline{\omega}}$-quasi-integrabile e risulta

$$\int f\, d\delta_{\overline{\omega}} \;=\; f(\overline{\omega}) \quad .$$

Conseguentemente, la funzione f è $\delta_{\overline{\omega}}$-integrabile se e solo se $f(\overline{\omega}) \in \mathbb{R}$.

([5]) Poiché le funzioni f^+ e f^- sono $\mathcal{A}$-misurabili e non negative, gli integrali (13.7.1) hanno senso ed il loro significato è quello che deriva dalla Definizione 13.3.1.

([6]) Per specificare che è $\int f^+ d\mu < +\infty$ [risp. $\int f^- d\mu < +\infty$] si dice che f è *μ-quasi-integrabile superiormente* [risp. *μ-quasi-integrabile inferiormente*].

Esempio 13.7.2. Riprendiamo in esame lo spazio di misura $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ dell'Esempio 13.4.2. Se f è una qualunque funzione numerica $\mathcal{A}$-misurabile, allora, denotata con k l'unica costante numerica tale che $\{f = k\}^{\mathrm{c}}$ sia un insieme numerabile (Proposizione 13.4.1), essendo

$$\{f = k\} \subseteq \{f^+ = k^+\} \quad , \quad \{f = k\} \subseteq \{f^- = k^-\} \quad ,$$

anche gli insiemi

$$\{f^+ = k^+\}^{\mathrm{c}} \qquad \text{e} \qquad \{f^- = k^-\}^{\mathrm{c}}$$

sono numerabili, pertanto si ha (Esempio 13.4.2)

$$\int f^+ d\mu \;=\; k^+ \qquad , \qquad \int f^- d\mu \;=\; k^- \quad .$$

Poiché almeno una delle due costanti k^+ e k^- è uguale a zero, concludiamo che f è μ-quasi-integrabile e risulta

$$\int f \, d\mu \;=\; k \quad .$$

Di conseguenza f è μ-integrabile se e solo se $k \in \mathbb{R}$.

Esempi 13.7.3. Consideriamo lo spazio di misura $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$, dove μ è la misura su $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ tale che $\mu(\{n\}) = 1 \;\; \forall n \in \mathbb{N}$ (in altre parole, μ è la misura che conta i punti).

a) Sia $f : \mathbb{N} \to \overline{\mathbb{R}}$ la funzione definita nel modo seguente:

$$f(n) \;=\; (-1)^n 2^{(-1)^n n} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \; .$$

Si ha

$$f^+(n) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è dispari}\,, \\ 2^n & \text{se } n \text{ è pari}\,, \end{cases}$$

$$f^-(n) \;=\; \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^n & \text{se } n \text{ è dispari}\,, \\ 0 & \text{se } n \text{ è pari}\,, \end{cases}$$

pertanto (Teorema 13.6.2)

$$f^+ d\mu \;=\; \sum_{n \in \mathbb{N}} f^+(n) \overset{(7)}{=} \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \text{ pari}}} 2^n \;=\; \sum_{h=1}^{\infty} 2^{2h} \;=\; +\infty \quad ,$$

(7) In $\overline{\mathbb{R}}$ una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ha lo stesso carattere e, in caso di convergenza, la stessa somma di ogni altra serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ottenuta da essa eliminando (in tutto o in parte) i termini a_n che sono uguali a zero.

$$f^- d\mu \;=\; \sum_{n\in\mathbb{N}} f^-(n) \;=\; \sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n \text{ dispari}}} \left(\tfrac{1}{2}\right)^n \;=\; \sum_{h=1}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2}\right)^{2h-1} \;=\; \tfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \left(\tfrac{1}{4}\right)^k \;=\; \tfrac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{4}} \;=\; \tfrac{2}{3} \;.$$

Ne concludiamo che f è μ-quasi-integrabile ed è

$$\int f\, d\mu \;=\; +\infty \;.$$

b) Sia $g : \mathbb{N} \to \overline{\mathbb{R}}$ la funzione così definita:

$$g(n) \;=\; 3^{-n} + (-2)^{-n} \qquad\qquad \forall n \in \mathbb{N} \;,$$

cioè

$$g(n) \;=\; \begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n & \text{se } n \text{ è dispari}\,, \\ \left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n & \text{se } n \text{ è pari}\,, \end{cases}$$

quindi

$$g^+(n) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è dispari}\,, \\ \left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n & \text{se } n \text{ è pari}\,, \end{cases}$$

$$g^-(n) \;=\; \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n & \text{se } n \text{ è dispari}\,, \\ 0 & \text{se } n \text{ è pari}\,. \end{cases}$$

Si ha

$$\int g^+ d\mu \;=\; \sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n \text{ pari}}} \left[\left(\tfrac{1}{3}\right)^n + \left(\tfrac{1}{2}\right)^n\right] \;=\; \sum_{h=1}^{\infty} \left[\left(\tfrac{1}{3}\right)^{2h} + \left(\tfrac{1}{2}\right)^{2h}\right] \;=$$

$$=\; \tfrac{1}{9}\sum_{k=0}^{\infty} \left(\tfrac{1}{9}\right)^k + \tfrac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty} \left(\tfrac{1}{4}\right)^k \;=\; \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{3} \;;$$

$$\int g^- d\mu \;=\; \sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n \text{ dispari}}} \left[\left(\tfrac{1}{2}\right)^n - \left(\tfrac{1}{3}\right)^n\right] \;=\; \sum_{h=1}^{\infty} \left[\left(\tfrac{1}{2}\right)^{2h-1} - \left(\tfrac{1}{3}\right)^{2h-1}\right] \;=$$

$$=\; \tfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \left(\tfrac{1}{4}\right)^k - \tfrac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty} \left(\tfrac{1}{9}\right)^k \;=\; \tfrac{2}{3} - \tfrac{3}{8} \;.$$

In conclusione, g è μ-integrabile e si ha

$$\int g\, d\mu \;=\; \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{2}{3} + \tfrac{3}{8} \;=\; \tfrac{1}{6} \;.$$

c) Sia $h : \mathbb{N} \to \overline{\mathbb{R}}$ così definita:

$$h(n) \;=\; \begin{cases} -1 & \text{se } n \text{ è dispari}\,, \\ 2^n & \text{se } n \text{ è pari}\,. \end{cases}$$

Si ha allora

$$\int h^+ d\mu \;=\; \sum_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ n \text{ pari}}} 2^n \;=\; +\infty \quad ,$$

$$\int h^- d\mu \;=\; 1+1+\ldots+1+\ldots \;=\; +\infty \quad ,$$

pertanto h non è μ-quasi-integrabile.

Esercizio 13.7.1. Dato lo spazio di misura $(M, \mathcal{P}(M), \mu)$, dove M è un insieme numerabile, supponiamo che f sia una funzione numerica definita in M.

Provare che:

a) condizione necessaria e sufficiente affinché la funzione f sia μ-quasi-integrabile è che almeno una delle due somme

$$\sum_{m\in M} f^+(m)\mu(\{m\}) \qquad , \qquad \sum_{m\in M} f^-(m)\mu(\{m\})$$

sia finita;

b) se M è finito, condizione necessaria e sufficiente affinché la funzione f sia μ-quasi-integrabile è che la somma

$$\sum_{m\in M} f(m)\mu(\{m\})$$

esista (finita o no);

c) se M è infinito, condizione necessaria affinché la funzione f sia μ-quasi-integrabile è che la serie

$$\sum_{m\in M} f(m)\mu(\{m\})$$

converga in $\overline{\mathbb{R}}$ ed abbia la proprietà commutativa (ciò significa che, se si fissa una qualunque bigezione $n \to m_n$, tra $\mathbb{N}$ e M, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f(m_n)\mu(\{m_n\})$ converge in $\overline{\mathbb{R}}$ ed ha la proprietà commutativa);

d) se M è infinito, condizione sufficiente affinché la funzione f sia μ-quasi-integrabile è che la serie

$$\sum_{m\in M} f(m)\mu(\{m\})$$

sia a termini reali, converga in $\overline{\mathbb{R}}$ ed abbia la proprietà commutativa.

Mostrare con un esempio che, in d), l'ipotesi che la serie sia a termini reali non può essere omessa.

Teorema 13.7.1. (Caratterizzazioni della μ-integrabilità). *Sia* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *uno spazio di misura e sia* $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ *una funzione numerica* $\mathcal{A}$*-misurabile.*

Ognuna delle seguenti condizioni è equivalente alla μ*-integrabilità di* f*:*

1) f^+ *e* f^- *sono entrambe funzioni* μ*-integrabili;*

2) *esistono due funzioni* $u, v : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$*,* μ*-integrabili e non negative, tali che*

$$f = u - v \quad (^8) \quad ;$$

3) *esiste una funzione* $g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$*,* μ*-integrabile e non negativa, tale che*

$$|f| \leq g \quad (^8) \quad ;$$

4) *la funzione* $|f|$ *è* μ*-integrabile.*

Inoltre, se è verificata la 2)*, si ha*

$$\int f \, d\mu \; = \int u \, d\mu \; - \int v \, d\mu \quad . \tag{13.7.2}$$

Dimostrazione. L'equivalenza

$$f \;\; \mu\text{-integrabile} \quad \Longleftrightarrow \quad 1)$$

è una conseguenza immediata della Definizione 13.7.2 e di quanto detto alla fine dell'Osservazione 13.7.1.

1) $\Longrightarrow$ 2) Basta prendere $u = f^+$, $v = f^-$.

2) $\Longrightarrow$ 3) Basta prendere $g = u + v$. Infatti si verifica facilmente che, qualunque sia $\omega \in \Omega$, risulta

$$|f(\omega)| \;=\; |u(\omega) - v(\omega)| \;\leq\; u(\omega) + v(\omega) \;;$$

inoltre g è μ-integrabile poiché, per il Teorema 13.3.1, 2), si ha

$$\int g \, d\mu \; = \int u \, d\mu \; + \int v \, d\mu \; < \; +\infty \; .$$

3) $\Longrightarrow$ 4) Segue dalla proprietà di monotonia dell'integrale delle funzioni misurabili e non negative (Teorema 13.3.1, 3)).

4) $\Longrightarrow$ 1) Segue dalle disuguaglianze, di facile verifica,

$$f^+ \;\leq\; |f| \quad , \quad f^- \;\leq\; |f|$$

e dal Teorema 13.3.1, 3).

(^{8}) in tutto Ω.

Supponiamo adesso che valga la 2), cioè sia

$$f \;=\; u - v \tag{13.7.3}$$

con u, v funzioni μ-integrabili e non negative. Dato che $f = f^+ - f^-$, la (13.7.3) implica facilmente (distinguendo i casi $f(\omega) \in \mathbb{R}$, $f(\omega) = +\infty$ e $f(\omega) = -\infty$) che è

$$f^+ + v \;=\; u + f^- \;,$$

da cui (Teorema 13.3.1, 2))

$$\int f^+ d\mu + \int v\, d\mu \;=\; \int u\, d\mu + \int f^- d\mu$$

e quindi, dato che i quattro integrali sono tutti finiti,

$$\int f^+ d\mu - \int f^- d\mu \;=\; \int u\, d\mu - \int v\, d\mu \;,$$

cioè vale la (13.7.2).

Teorema 13.7.2. (Proprietà dell'integrale). *Sia* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *uno spazio di misura e siano* $f, g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ *due funzioni numeriche* μ*-integrabili. Allora ognuna delle funzioni*

$$\alpha f \;\; (\alpha \in \mathbb{R}) \quad , \quad f + g \;\; (\text{se definita in tutto } \Omega\,) \quad , \quad \max\{f, g\} \quad , \quad \min\{f, g\} \tag{13.7.4}$$

è μ*-integrabile. Si ha inoltre*

$$\int (\alpha f)\, d\mu \;=\; \alpha \int f\, d\mu \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R} \tag{13.7.5}$$

e, se $f + g$ *è definita in tutto* Ω*,*

$$\int (f + g)\, d\mu \;=\; \int f\, d\mu + \int g\, d\mu \;. \tag{13.7.6}$$

Dimostrazione. Osserviamo che le quattro funzioni (13.7.4) sono $\mathcal{A}$-misurabili, quindi ha senso studiarne la μ-integrabilità.

Per dimostrare che αf è μ-integrabile e vale la (13.7.5) utilizziamo il Teorema 13.7.1, facendo vedere che è soddisfatta la condizione 2). Distinguiamo i due casi $\alpha \geq 0$ e $\alpha < 0$.

Se $\alpha \geq 0$ si ha

$$\alpha f \;=\; \alpha(f^+ - f^-) \;=\; \alpha f^+ - \alpha f^-$$

e ognuna delle due funzioni αf^+ e αf^- è μ-integrabile per il Teorema 13.3.1, 1), dato che f^+ e f^- sono μ-integrabili per ipotesi (condizione 1) del Teorema 13.7.1). Pertanto, per il Teorema 13.7.1, la funzione αf è μ-integrabile e si ha (tenendo presente la (13.7.2))

$$\int (\alpha f)\, d\mu \;=\; \int (\alpha f^+)\, d\mu - \int (\alpha f^-)\, d\mu \;=$$

$$=\; \alpha \int f^+ d\mu - \alpha \int f^- d\mu \;=\; \alpha\Big(\int f^+ d\mu - \int f^- d\mu\Big) \;=\; \alpha \int f\, d\mu \;.$$

Se $\alpha < 0$ si ha

$$\alpha f \;=\; \alpha(f^+ - f^-) \;=\; (-\alpha)f^- - (-\alpha)f^+$$

e ognuna delle due funzioni $(-\alpha)f^-$ e $(-\alpha)f^+$ è μ-integrabile per il Teorema 13.3.1, 1); dunque, sempre per il Teorema 13.7.1, αf è μ-integrabile e risulta:

$$\int (\alpha f)\, d\mu \;=\; \int [(-\alpha)f^-]\, d\mu - \int [(-\alpha)f^+]\, d\mu \;=$$

$$=\; (-\alpha)\int f^- d\mu - (-\alpha)\int f^+ d\mu \;=\; \alpha\Big(\int f^+ d\mu - \int f^- d\mu\Big) \;=\; \alpha \int f\, d\mu\ .$$

Passiamo ad occuparci della funzione $f+g$. Anche in questo caso utilizziamo il Teorema 13.7.1, facendo vedere che è soddisfatta la condizione 2). Poiché $f = f^+ - f^-$, $g = g^+ - g^-$ e la somma $f+g$ è definita in tutto Ω è facile verificare (distinguendo i casi $(f+g)(\omega) \in \mathbb{R}$, $(f+g)(\omega) = -\infty$ e $(f+g)(\omega) = +\infty$) che risulta

$$f+g \;=\; (f^+ + g^+) - (f^- + g^-)\ .$$

Pertanto, dato che $f^+ + g^+$ e $f^- + g^-$ sono funzioni μ-integrabili (Teorema 13.3.1, 2)), per il Teorema 13.7.1 anche $f+g$ è μ-integrabile e si ha

$$\int (f+g)\, d\mu \;=\; \int (f^+ + g^+)\, d\mu - \int (f^- + g^-)\, d\mu \;=$$

$$=\; \int f^+ d\mu + \int g^+ d\mu - \Big(\int f^- d\mu + \int g^- d\mu\Big) \;=$$

$$=\; \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu + \int g^+ d\mu - \int g^- d\mu \;=\; \int f\, d\mu + \int g\, d\mu\ .$$

Infine, per quanto riguarda le funzioni $\max\{f,g\}$ e $\min\{f,g\}$, osserviamo che si ha

$$|\max\{f,g\}| \le\; |f| + |g| \quad , \quad |\min\{f,g\}| \;\le\; |f| + |g|\ .$$

Per il Teorema 13.7.1 le funzioni $|f|$, $|g|$ sono entrambe μ-integrabili, quindi anche $|f| + |g|$ è μ-integrabile (Teorema 13.3.1, 2)). Di conseguenza, ancora per il teorema 13.7.1 (condizione 3)), le funzioni $\max\{f,g\}$ e $\min\{f,g\}$ sono μ-integrabili.

Esercizio 13.7.2. Provare la seguente generalizzazione del Teorema 13.7.2.

Sia $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *uno spazio di misura e siano* $f, g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ *due funzioni numeriche* $\mathcal{A}$*-misurabili.*

a) *Se* f *è* μ*-quasi-integrabile e* $\alpha \in \mathbb{R}$*, allora anche* αf *è* μ*-quasi-integrabile e vale la* (13.7.5).

b) *Se* f *e* g *sono entrambe* μ*-quasi-integrabili superiormente* [risp. *inferiormente*]*, allora anche* $f+g$ *è* μ*-quasi-integrabile superiormente* [risp. *inferiormente*] *e vale la* (13.7.6).

c) *Se* f *e* g *sono entrambe* μ*-quasi-integrabili, allora anche* $\max\{f,g\}$ *e* $\min\{f,g\}$ *sono funzioni* μ*-quasi-integrabili.*

(Suggerimento: per quanto riguarda il $\max\{f,g\}$ si osservi che

$$(\max\{f,g\})^+ \;=\; \max\{f^+, g^+\} \quad , \quad (\min\{f,g\})^- \;\le\; \min\{f^-, g^-\}\ .\ )$$

Proposizione 13.7.3. (Monotonia dell'integrale). *Sia* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *uno spazio di misura.*

Se $f, g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ *sono due funzioni numeriche* μ*-integrabili tali che* $f \leq g$*, allora*

$$\int f \, d\mu \;\leq\; \int g \, d\mu \;.$$

Inoltre, qualunque sia la funzione μ*-integrabile* f*, risulta*

$$\Big| \int f \, d\mu \Big| \;\leq\; \int |f| \, d\mu \;.$$

Dimostrazione. Per dimostrare la prima affermazione osserviamo che la disuguaglianza $f \leq g$ implica le altre due

$$f^+ \leq g^+ \qquad , \qquad f^- \geq g^- \quad .$$

Per ottenere la tesi basta allora applicare la proprietà di monotonia dell'integrale delle funzioni misurabili e non negative (Teorema 13.3.1, 3)) e la definizione di integrale (Definizione 13.7.2).

Per provare la seconda affermazione osserviamo che, essendo $-|f| \leq f \leq |f|$, si ha, per quanto già dimostrato,

$$\int (-|f|) \, d\mu \;\leq\; \int f \, d\mu \;\leq\; \int |f| \, d\mu \;,$$

cioè, per la (13.7.5),

$$-\int |f| \, d\mu \;\leq\; \int f \, d\mu \;\leq\; \int |f| \, d\mu \;,$$

che è la tesi.

Esercizio 13.7.3. Provare che tutte le affermazioni della precedente Proposizione 13.7.3 continuano a valere nell'ipotesi che le funzioni f e g siano μ-quasi-integrabili.

Proposizione 13.7.4. *Sia* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *uno spazio di misura con* $\mu(\Omega) < +\infty$*.*

Allora, ogni funzione $\mathcal{A}$*-misurabile* $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ *verificante la condizione*

$$\sup_{\Omega} |f| \;<\; +\infty$$

è μ*-integrabile.*

Dimostrazione. Posto $K = \sup_\Omega |f|$, per il Teorema 13.3.1, 3), si ha

$$\int |f| \, d\mu \;\leq\; \int K \, d\mu \;=\; K\mu(\Omega) \;<\; +\infty \;,$$

quindi, per il Teorema 13.7.1 (condizione 4)), la funzione f è μ-integrabile.

Corollario 13.7.1. *In uno spazio di misura* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$*, con* $\mu(\Omega) < +\infty$*, le costanti reali sono funzioni* μ*-integrabili.*

Terminiamo il paragrafo occupandoci della proprietà distributiva dell'integrale rispetto alla misura.

Teorema 13.7.3. (Proprietà distributiva dell'integrale rispetto alla misura). *Siano* $(\Omega, \mathcal{A})$ *uno spazio misurabile,* $\{\mu_n\}$ *una successione di misure su* $\mathcal{A}$ *e* $\{c_n\}$ *una successione di elementi di* $[0, +\infty]$*; sia, inoltre,*

$$\mu \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} c_n \mu_n \quad .$$

Supponiamo, infine, che $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ *sia una funzione* $\mathcal{A}$*-misurabile.*

1) *La funzione* f *è* μ*-quasi-integrabile se e soltanto se almeno una delle due serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \int f^+ d\mu_n \qquad , \qquad \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int f^- d\mu_n \tag{13.7.7}$$

ha somma finita ed in questo caso si ha

$$\int f\, d\mu \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int f^+ d\mu_n \;-\; \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int f^- d\mu_n \quad . \tag{13.7.8}$$

2) *Se* f *è* μ*-quasi-integrabile ed i coefficienti* c_n *sono tutti positivi, allora* f *è* μ_n*-quasi-integrabile per ogni* $n \in \mathbb{N}$*, la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \int f\, d\mu_n \tag{13.7.9}$$

converge in $\overline{\mathbb{R}}$ *e risulta*

$$\int f\, d\mu \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int f\, d\mu_n \quad . \tag{13.7.10}$$

3) *La funzione* f *è* μ*-integrabile se e soltanto se la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \int |f|\, d\mu_n$$

ha somma finita.

Dimostrazione. 1) Ciò è un'immediata conseguenza della Definizione 13.7.2 e del Teorema 13.5.2.

2) Da 1) segue che almeno una delle due serie (13.7.7) ha somma finita. Supponiamo, per fissare le idee, che sia

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \int f^+ d\mu_n \ < \ +\infty \ .$$

Dato che $c_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$, si ha allora

$$\int f^+ d\mu_n \ < \ +\infty \qquad \forall n \in \mathbb{N} \ ,$$

quindi f è μ_n-quasi-integrabile per ogni $n \in \mathbb{N}$. La convergenza della serie (13.7.9) e la validità della (13.7.10) seguono poi dal fatto che la (13.7.9) è la serie differenza delle due serie (13.7.7).

3) Segue dal Teorema 13.7.1 (condizione 4)) e dal Teorema 13.5.2.

Osservazione 13.7.2. Il fatto che la funzione f sia μ_n-quasi-integrabile per ogni $n \in \mathbb{N}$ e che la la serie (13.7.9) converga in $\overline{\mathbb{R}}$ non è sufficiente a garantire la μ-quasi-integrabilità di f, neanche se si aggiungono le ulteriori ipotesi che la (13.7.9) sia a termini reali, converga in $\mathbb{R}$ e goda della proprietà commutativa. Per rendersi conto di ciò basta considerare il successivo esempio.

Esempio 13.7.4. Siano:

$$(\Omega, \mathcal{A}) \ = \ (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N})) \ ;$$

$$\mu_n \ = \ \delta_{2n-1} + \delta_{2n} \quad , \quad c_n \ = \ 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N} \ ,$$

quindi, in questo caso, la misura

$$\mu \ = \ \sum_{n=1}^{\infty} c_n \mu_n$$

è uguale a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k \ .$$

Sia, inoltre, $f : \mathbb{N} \to \overline{\mathbb{R}}$ la funzione definita nel modo seguente:

$$f(k) \ = \ (-1)^k \qquad \forall k \in \mathbb{N} \ .$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha (Corollario 13.5.3 ed Esempio 13.4.1)

$$\int f^+ d\mu_n \ = \ f^+(2n-1) + f^+(2n) \ = \ 1 \quad , \quad \int f^- d\mu_n \ = \ f^-(2n-1) + f^-(2n) \ = \ 1 \ ,$$

quindi f è μ_n-integrabile e

$$\int f\, d\mu_n \;=\; 0 \;\; .$$

Di conseguenza la serie (13.7.9) è la serie di termine generale uguale a zero. Tuttavia la funzione f non è μ-integrabile; infatti, per il Teorema 13.5.2 e l'Esempio 13.4.1, si ha

$$\int f^+ d\mu \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} f^+(k) \;=\; 0+1+0+1+\ldots \;=\; +\infty \;\; ,$$

$$\int f^- d\mu \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} f^-(k) \;=\; 1+0+1+0+\ldots \;=\; +\infty \;\; .$$

13.8. Proprietà verificate quasi-ovunque.

Dato lo spazio di misura $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, supponiamo che $\mathbb{P} = \mathbb{P}(\omega)$ sia una proposizione logica, funzione del punto $\omega \in \Omega$, definita in tutto l'insieme Ω ([9]).

Definizione 13.8.1. (*Proprietà verificata μ-quasi-ovunque*). Si dice la proposizione $\mathbb{P}$ è vera *μ-quasi-ovunque* (si abbrevia scrivendo μ-q.o.) se esiste un insieme $A \in \mathcal{A}$, con $\mu(A^c) = 0$, tale che $\mathbb{P}(\omega)$ è vera per ogni $\omega \in A$.

In altre parole dire che la proposizione $\mathbb{P}$ è vera μ-quasi-ovunque vuol dire che l'insieme

$$F \;=\; \{\omega \in \Omega \,:\, \mathbb{P}(\omega) \text{ è falsa}\} \tag{13.8.1}$$

è contenuto in qualche insieme misurabile M avente misura nulla (non si richiede che l'insieme F stesso sia misurabile).

Naturalmente, se la misurabilità dell'insieme F è nota per altri motivi, allora si ha l'equivalenza

$$\mathbb{P} \text{ è vera } \mu\text{-q.o.} \quad \Longleftrightarrow \quad \mu(F) \;=\; 0$$

(l'implicazione $\Longrightarrow$ segue dalla proprietà di monotonia della misura μ; l'implicazione contraria si ottiene subito prendendo $M = F$). Ad esempio, l'insieme F è certamente misurabile quando $\mathbb{P}(\omega)$ è una proposizione del tipo "$f(\omega) = g(\omega)$" oppure "$f(\omega) < g(\omega)$" ecc. ecc., dove le funzioni $f, g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ sono $\mathcal{A}$-misurabili per ipotesi .

Mediante il concetto di proposizione vera μ-quasi-ovunque possiamo esprimere altre importanti proprietà dell'integrale.

([9]) In altri termini, ciò vuol dire che per ogni $\omega \in \Omega$ è assegnata un'affermazione $\mathbb{P}(\omega)$, vera o falsa. Tipici esempi di proposizioni $\mathbb{P}(\omega)$ sono quelle del tipo "$f(\omega) = g(\omega)$" oppure "$f(\omega) < g(\omega)$" oppure ancora "$f(\omega) \leq g(\omega)$" ecc. ecc., dove f e g sono due assegnate funzioni numeriche, definite in Ω.

Proposizione 13.8.1. (Funzioni non negative con integrale nullo). *Sia* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *uno spazio di misura e sia* $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ *una funzione numerica,* $\mathcal{A}$*-misurabile e tale che* $f \geq 0$.

Vale l'equivalenza

$$\int f \, d\mu \;=\; 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f \;=\; 0 \;\; \mu - \text{q.o.}$$

Dimostrazione. Poiché f è una funzione $\mathcal{A}$-misurabile, dire che $f = 0$ μ-q.o. equivale a dire che $\mu(\{f \neq 0\}) = 0$, ovverossia $\mu(\{f > 0\}) = 0$, dato che $f \geq 0$.

Dimostriamo l'implicazione $\Longrightarrow$. Si ha, ovviamente,

$$\{f > 0\} \;=\; \bigcup_{n=1}^{\infty} \{f > \frac{1}{n}\} \;;$$

inoltre, per ogni $n \in \mathbb{N}$, vale la disuguaglianza

$$\tfrac{1}{n} \mathbb{1}_{\{f > \frac{1}{n}\}} \;\leq\; f$$

e da questa, passando agli integrali, si ottiene $\mu(\{f > \frac{1}{n}\}) = 0$. Conseguentemente si ha pure $\mu(\{f > 0\}) = 0$.

Proviamo adesso la $\Longleftarrow$. Per ipotesi è $\mu(\{f > 0\}) = 0$; d'altra parte vale la disuguaglianza

$$f \;\leq\; (+\infty) \mathbb{1}_{\{f > 0\}} \;;$$

passando agli integrali si ottiene la tesi.

Teorema 13.8.1. (Integrale di funzioni uguali quasi-ovunque). *Sia* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *uno spazio di misura e siano* $f, g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ *due funzioni numeriche* $\mathcal{A}$*-misurabili. Supponiamo inoltre che* $f = g$ μ*-q.o.*

Si ha allora:

$$f \;\; \mu\text{-quasi-integrabile} \qquad \Longleftrightarrow \qquad g \;\; \mu\text{-quasi-integrabile} \;\;;$$

inoltre, se f *è* μ*-quasi-integrabile, vale l'uguaglianza*

$$\int f \, d\mu \;=\; \int g \, d\mu \;\;.$$

Dimostrazione. Poiché le funzioni f, g sono $\mathcal{A}$-misurabili, l'ipotesi $f = g$ μ-q.o. significa che $\mu(\{f \neq g\}) = 0$.

Esaminiamo dapprima il caso in cui le funzioni f, g siano entrambe non negative. In questo caso occorre provare soltanto l'uguaglianza degli integrali. Posto $M = \{f \neq g\}$ si ha, ovviamente,

$$f \;\leq\; g + (+\infty) \mathbb{1}_M$$

da cui, passando agli integrali, si ricava la disuguaglianza

$$\int f\, d\mu \leq \int g\, d\mu \ .$$

In maniera del tutto analoga si ottiene la disuguaglianza contraria

$$\int g\, d\mu \leq \int f\, d\mu$$

e quindi la tesi.

Dimostriamo il teorema in generale. Poiché

$$\{f = g\} \ \subseteq \ \{f^+ = g^+\} \quad , \quad \{f = g\} \ \subseteq \ \{f^- = g^-\} \ ,$$

dall'ipotesi $f = g$ μ-q.o. segue che è pure $f^+ = g^+$ μ-q.o. e $f^- = g^-$ μ-q.o., pertanto, per il caso particolare già trattato (funzioni non negative), si ha

$$\int f^+\, d\mu \ = \ \int g^+\, d\mu \quad , \quad \int f^-\, d\mu \ = \ \int g^-\, d\mu \ ;$$

ne segue, ovviamente, la tesi.

La successiva Proposizione 13.8.2 generalizza uno dei criteri di μ-integrabilità contenuti nel Teorema 13.7.1.

Proposizione 13.8.2. *Sia $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura e siano $f, g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ due funzioni numeriche $\mathcal{A}$-misurabili. Supponiamo che g sia μ-integrabile e che $|f| \leq g$ μ-q.o. Allora anche f è μ-integrabile.*

Dimostrazione. L'ipotesi $|f| \leq g$ μ-q.o. significa che l'insieme $M = \{|f| > g\}$ ha misura nulla. Consideriamo la funzione $h : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ definita ponendo

$$h(\omega) \ = \ \begin{cases} g(\omega) & \text{se } \omega \in M^{\mathrm{c}} \, , \\ +\infty & \text{se } \omega \in M \, . \end{cases}$$

La funzione h è $\mathcal{A}$-misurabile, dato che possiamo scrivere

$$h \ = \ g\, \mathbb{1}_{M^{\mathrm{c}}} \ + \ (+\infty) \mathbb{1}_M \ ,$$

e risulta, in tutto Ω, $|f| \leq h$. Si ha inoltre $h = g$ μ-q.o. (infatti $\{h \neq g\} \subseteq M$), quindi, per il precedente teorema, la funzione h è μ-integrabile. Per il Teorema 13.7.1 (condizione c)) concludiamo che anche f è μ-integrabile.

Dimostriamo, infine, che i valori assunti da una funzione numerica μ-integrabile sono μ-q.o. reali.

Teorema 13.8.2. *Sia $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura e sia $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione numerica $\mathcal{A}$-misurabile. Se f è μ-integrabile, allora $|f| < +\infty$ μ-q.o.*

Dimostrazione. Occorre provare che $\mu(\{|f| = +\infty\}) = 0$. Si ha, ovviamente,

$$\{|f| = +\infty\} \;=\; \bigcap_{n=1}^{\infty} \{|f| \geq n\} \;.$$

Inoltre, per ogni $n \in \mathbb{N}$, posto

$$B_n \;=\; \{|f| \geq n\} \;,$$

risulta

$$n\, \mathbb{1}_{B_n} \;\leq\; |f| \;,$$

da cui, integrando,

$$n\mu(B_n) \;\leq\; \int |f|\, d\mu \;,$$

cioè

$$\mu(B_n) \;\leq\; \frac{1}{n} \int |f|\, d\mu$$

e quindi, dato che f è μ-integrabile,

$$\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) \;=\; 0 \;.$$

Poiché

$$\{|f| = +\infty\} \subseteq B_n \qquad\qquad \forall n \in \mathbb{N} \;,$$

concludiamo che $\mu(\{|f| = +\infty\}) = 0$.

13.9. L'integrale delle funzioni definite quasi-ovunque.

Definizione 13.9.1. (*Funzioni numeriche definite μ-quasi-ovunque*). Dato lo spazio di misura $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, si chiama *funzione numerica definita μ-quasi-ovunque in* Ω ogni funzione numerica

$$f \;:\; D \to \overline{\mathbb{R}}$$

avente come dominio un insieme $D \in \mathcal{A}$ tale che $\mu(D^{\mathrm{c}}) = 0$.

Definizione 13.9.2. (*Misurabilità di una funzione numerica definita μ-quasi-ovunque*). Dato lo spazio di misura $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, supponiamo che $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$ sia una funzione numerica definita μ-q.o. in Ω. Si dice che la funzione f è *$\mathcal{A}$-misurabile* (in Ω) se essa è $D \cap \mathcal{A}$-misurabile.

Ad esempio, considerato lo spazio di misura $(\mathbb{R}, \mathcal{L}_1, \mathrm{m}_1)$, la funzione reale di variabile reale $f(x) = \frac{1}{x}$ è definita m_1-q.o. in $\mathbb{R}$ (infatti il suo insieme di definizione è $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$) ed è $\mathcal{L}_1$-misurabile in $\mathbb{R}$, dato che, essendo continua in D, essa è $\mathcal{B}(D)$-misurabile, cioè $D \cap \mathcal{B}_1$-misurabile, e quindi, a maggior ragione, $D \cap \mathcal{L}_1$-misurabile.

Ritornando al caso generale, osserviamo che, data una funzione numerica $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$ definita μ-q.o. in Ω, se f è $\mathcal{A}$-misurabile in Ω secondo la precedente definizione, allora, per la Proposizione 9.1.2 esiste una funzione $\mathcal{A}$-misurabile $h : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ tale che $h|_D = f$; viceversa, se esiste una funzione h avente tale requisiti, allora f è $\mathcal{A}$-misurabile in Ω per la Proposizione 9.1.1. Si ha pertanto la seguente proposizione.

Proposizione 13.9.1. *Sia $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura e sia f una funzione numerica definita μ-q.o. in Ω. La funzione f è $\mathcal{A}$-misurabile se e soltanto se esiste una funzione $\mathcal{A}$-misurabile $h : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$, definita in tutto Ω, prolungamento di f.*

Osservazione 13.9.1. Se f è una funzione numerica definita μ-q.o. in Ω e $\mathcal{A}$-misurabile, allora, considerate due qualsiasi funzioni $\mathcal{A}$-misurabili $h_1, h_2 : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$, prolungamenti di f, si ha $h_1 = h_2$ μ-q.o. in Ω e pertanto, per il Teorema 13.8.1, o le due funzioni h_1 e h_2 sono entrambe μ-quasi-integrabili, e in questo caso si ha

$$\int h_1 \, d\mu \;=\; \int h_2 \, d\mu \;,$$

oppure nessuna delle due funzioni è μ-quasi-integrabile.

La precedente osservazione dà significato alla successiva definizione.

Definizione 13.9.3. (*Integrale delle funzioni definite μ-quasi-ovunque*). Dato lo spazio di misura $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, supponiamo che f sia una funzione numerica definita μ-quasi-ovunque in Ω e $\mathcal{A}$-misurabile. Si dice che f è μ-quasi-integrabile se, considerata una qualsiasi funzione $\mathcal{A}$-misurabile $h : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$, prolungamento di f, la funzione h risulta μ-quasi-integrabile; in questo caso si pone, per definizione

$$\int f \, d\mu \;=\; \int h \, d\mu \;.$$

Osservazione 13.9.2. Osserviamo che, in particolare, una funzione $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ è una funzione numwerica definita μ-q.o. in Ω. In tal caso è evidente che le nuove definizioni (di misurabilità, quasi-integrabilità, ecc.) si riducono a quelle già note.

Allo scopo di mostrare l'utilità delle definizioni introdotte in questo paragrafo, riprendiamo in esame il Teorema 13.7.2 e facciamo vedere come l'ipotesi che la funzione somma $f + g$ sia definita in tutto Ω (ivi adottata per dimostrare che la somma di due funzioni μ-integrabili f e g è una funzione μ-integrabile) possa adesso essere omessa.

Teorema 13.9.1. *Dato lo spazio di misura $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, supponiamo che $f, g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ siano due funzioni μ-integrabili. Allora la funzione somma $f + g$ è definita μ-quasi-ovunque in Ω, è μ-integrabile e si ha*

$$\int (f + g) \, d\mu \;=\; \int f \, d\mu \;+\; \int g \, d\mu \;.$$

Dimostrazione. La funzione $f+g$ ha come insieme di definizione l'insieme

$$D \;=\; \Omega \setminus M \;,$$

essendo

$$M \;=\; \Big(\{f=+\infty\}\cap\{g=-\infty\}\Big)\cup\Big(\{f=-\infty\}\cap\{g=+\infty\}\Big)\;.$$

Poiché le funzioni f e g sono $\mathcal{A}$-misurabili, l'insieme M appartiene alla σ-algebra $\mathcal{A}$. Si ha inoltre

$$M \;\subseteq\; \{|f|=+\infty\}$$

e quindi, ricordando il Teorema 13.8.2, $\mu(M)=0$, pertanto $f+g$ è definita μ-quasi-ovunque in Ω.

Proviamo che la funzione $f+g$ è $\mathcal{A}$-misurabile. Osserviamo a tale scopo che la funzione somma

$$h \;=\; f\,\mathbb{1}_D \;+\; g\,\mathbb{1}_D$$

è definita in tutto Ω, è $\mathcal{A}$-misurabile (Teorema 12.3.1) ed è un prolungamento di $f+g$. Di conseguenza, per la Proposizione 13.9.1, $f+g$ è $\mathcal{A}$-misurabile.

Infine, per provare la μ-integrabilità di $f+g$ e la validità della (13.9.1), notiamo che è

$$f \;=\; f\,\mathbb{1}_D \;\; \mu\text{−q.o. in } \Omega \quad , \quad g \;=\; g\,\mathbb{1}_D \;\; \mu\text{−q.o. in } \Omega \;\;,$$

pertanto (Teorema 13.8.1) le funzioni $f\,\mathbb{1}_D$ e $g\,\mathbb{1}_D$ sono entrambe μ-integrabili e si ha

$$\int f\,\mathbb{1}_D\,d\mu \;=\; \int f\,d\mu \quad , \quad \int g\,\mathbb{1}_D\,d\mu \;=\; \int g\,d\mu\;;$$

conseguentemente, per il Teorema 13.7.2, il prolungamento h è μ-integrabile e risulta

$$\int h\,d\mu \;=\int (f\,\mathbb{1}_D \;+\; g\,\mathbb{1}_D)\,d\mu \;=\; \int f\,\mathbb{1}_D\,d\mu \;+\; \int g\,\mathbb{1}_D\,d\mu \;=\; \int f\,d\mu \;+\; \int g\,d\mu\;.$$

Ciò completa la dimostrazione.

Esercizio 13.9.1. Verificare che il Teorema 13.9.1 continua a valere anche quando le funzioni f e g sono definite μ-q.o. in Ω.

13.10. L'integrale esteso ad un sottoinsieme di Ω.

Negli integrali sinora considerati il dominio di integrazione è stato sempre l'intero insieme Ω, ambiente dello spazio di misura $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ che si considera. Vogliamo adesso introdurre il concetto di integrale esteso ad un sottoinsieme misurabile A di Ω. Per fare questo procediamo nella maniera più ovvia: utilizziamo le definizioni già note, cioè quelle relative al caso in cui l'insieme di integrazione è l'ambiente dello spazio di misura, facendo riferimento allo "spazio di misura ristretto" $(A, A\cap\mathcal{A}, \mu_A)$, dove μ_A indica la restrizione

della misura μ alla σ-algebra traccia $A \cap \mathcal{A}$ ([10]). Più precisamente poniamo le seguenti definizioni.

Definizioni 13.10.1. (*Integrale esteso ad un sottoinsieme di* Ω). Dato lo spazio di misura $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, sia $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione numerica definita in un sottoinsieme E di Ω e sia $A \subseteq E$ un insieme appartenente alla σ-algebra $\mathcal{A}$.

Supponiamo che $A \neq \emptyset$.

Si dice che la funzione f è *$\mathcal{A}$-misurabile in A* se la funzione $f|_A$ (restrizione di f a A) è $A \cap \mathcal{A}$-misurabile.

Se la funzione f è $\mathcal{A}$-misurabile in A, si dice che f è *μ-[quasi]-integrabile in A* se $f|_A$ è μ_A-[quasi]-integrabile, essendo μ_A la restrizione della misura μ alla σ-algebra $A \cap \mathcal{A}$.

Se f è μ-quasi-integrabile in A, l'*integrale esteso all'insieme A della funzione f rispetto alla misura μ*, indicato con il simbolo $\int_A f\, d\mu$, si definisce ponendo

$$\int_A f\, d\mu \;=\; \int f|_A d\mu_A \quad .$$

Se $A = \emptyset$ si conviene di dire che che la funzione f è $\mathcal{A}$-misurabile e μ-integrabile nell'insieme $A = \emptyset$ e si pone, per definizione,

$$\int_\emptyset f\, d\mu \;=\; 0 \quad .$$

È ovvio che, se $A = \Omega$, le precedenti definizioni si riducono a quelle già note.

È inoltre utile osservare esplicitamente che vale la seguente proposizione.

Proposizione 13.10.1. *Dato lo spazio di misura $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, sia $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione numerica definita in un sottoinsieme E di Ω e sia $A \subseteq E$ un insieme appartenente alla σ-algebra $\mathcal{A}$.*

La funzione f è $\mathcal{A}$-misurabile in A se e soltanto se entrambe le funzioni f^+ e f^- sono $\mathcal{A}$-misurabili in A.

Se f è $\mathcal{A}$-misurabile in A, allora f è μ-quasi-integrabile in A se e soltanto se almeno una delle funzioni f^+ e f^- è μ-integrabile in A; in questo caso si ha

$$\int_A f\, d\mu \;=\; \int_A f^+ d\mu \;-\; \int_A f^- d\mu \quad . \tag{13.10.1}$$

Dimostrazione. Le affermazioni contenute nell'enunciato si deducono immediatamente dalle precedenti Definizioni 13.10.1, ricordando la Proposizione 13.7.2 e la Definizione 13.7.2 e tenendo presente che, ovviamente, risulta

$$\big(f|_A\big)^+ \;=\; f^+|_A \qquad , \qquad \big(f|_A\big)^- \;=\; f^-|_A \quad .$$

([10]) Poiché $A \in \mathcal{A}$, la σ-algebra traccia $A \cap \mathcal{A}$ è contenuta in $\mathcal{A}$, quindi ha senso considerare la restrizione di μ a $A \cap \mathcal{A}$.

Il successivo Teorema 13.10.1 mostra che, se la funzione f è definita in tutto Ω ed è $\mathcal{A}$-misurabile, il calcolo dell'integrale $\int_A f\,d\mu$, esteso ad un sottoinsieme A di Ω, equivale al calcolo di un opportuno integrale nello spazio di misura "originario" $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Vedremo subito dopo (Teorema 13.10.1′) che ciò è vero in generale per una qualunque funzione $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ $(E \subseteq \Omega)$.

Teorema 13.10.1. *Dato lo spazio di misura $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, supponiamo che $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ sia una funzione $\mathcal{A}$-misurabile e che A sia un insieme appartenente alla σ-algebra $\mathcal{A}$.*

La funzione f è μ-quasi-integrabile nell'insieme A se e soltanto se il prodotto $f\,\mathbb{1}_A$ è μ-quasi-integrabile (in Ω) e, in questo caso, si ha

$$\int_A f\,d\mu \;=\; \int f\,\mathbb{1}_A d\mu \quad . \tag{13.10.2}$$

Dimostrazione. Se $A = \emptyset$ la tesi è vera, poiché, per definizione, la funzione f è μ-integrabile nell'insieme $A = \emptyset$, e si ha $\int_\emptyset f\,d\mu = 0$, e, d'altra parte, la funzione $f\,\mathbb{1}_\emptyset$ è la funzione identicamente nulla in Ω.

Supponiamo quindi $A \neq \emptyset$ e osserviamo che la funzione f è $\mathcal{A}$-misurabile nell'insieme A per il teorema di misurabilità della restrizione (Proposizione 9.2.1).

Supponiamo ancora, in un primo momento, che f sia non negativa. In questo caso ambedue le funzioni f e $f\,\mathbb{1}_A$ sono μ-quasi-integrabili (in A e in Ω, rispettivamente) sicché occorre provare solo la validità della (13.10.2).

Si ha, per definizione,

$$\int_A f\,d\mu \;=\; \int f|_A\,d\mu_A \;=\; \sup_{n\in\mathbb{N}} \int u_n d\mu_A \quad ,$$

essendo $\{u_n\}$ una qualsiasi successione di funzioni $A \cap \mathcal{A}$-elementari tale che $u_n \uparrow f|_A$.

Osserviamo che, se u è una qualsiasi funzione $A \cap \mathcal{A}$-elementare tale che $u \leq f|_A$ e

$$u \;=\; \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbb{1}^*_{A_i}$$

è una sua rappresentazione normale ($\mathbb{1}^*_{A_i}$ è l'indicatore di A_i in A), allora la funzione

$$v \;=\; \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i} \;+\; 0 \cdot \mathbb{1}_{A^c}$$

(dove, adesso, $\mathbb{1}_{A_i}$ e $\mathbb{1}_{A^c}$ sono indicatori in Ω) è una funzione $\mathcal{A}$-elementare tale che $v \leq f\,\mathbb{1}_A$; di conseguenza si ha

$$\int u\,d\mu_A \;=\; \sum_{i=1}^{k} \alpha_i\,\mu_A(A_i) \;=\; \sum_{i=1}^{k} \alpha_i\,\mu(A_i) \;+\; 0 \cdot \mu(A^c) \;=\; \int v\,d\mu \;\leq\; \int f\,\mathbb{1}_A d\mu \quad .$$

Da quanto osservato segue che, per una qualsiasi successione $\{u_n\}$ di funzioni $A \cap \mathcal{A}$-elementari tale che $u_n \uparrow f|_A$, risulta

$$\int u_n d\mu_A \;\leq\; \int f\,\mathbb{1}_A d\mu \qquad\qquad \forall n \in \mathbb{N}\;;$$

conseguentemente si ha

$$\int_A f\,d\mu \;\leq\; \int f\,\mathbb{1}_A d\mu \quad .$$

Dimostriamo che vale pure la disuguaglianza contraria. Consideriamo, a tale scopo, una qualsiasi funzione $\mathcal{A}$-elementare v tale che $v \leq f\,\mathbb{1}_A$ e supponiamo che

$$v \;=\; \sum_{i=1}^{k} \beta_i \mathbb{1}_{B_i}$$

sia una sua rappresentazione normale. Osserviamo che, essendo $f\,\mathbb{1}_A = 0$ in A^{c}, si ha pure $v = 0$ in A^{c} e pertanto

$$v \;=\; v\,\mathbb{1}_A \;=\; \Big(\sum_{i=1}^{k} \beta_i \mathbb{1}_{B_i}\Big)\mathbb{1}_A \;=\; \sum_{i=1}^{k} \beta_i \mathbb{1}_{A\cap B_i} \quad ;$$

inoltre, posto

$$u \;=\; \sum_{i=1}^{k} \beta_i \mathbb{1}^*_{A\cap B_i} \quad ,$$

la funzione u è $A \cap \mathcal{A}$-elementare e risulta $u \leq f|_A$ (infatti $u = v|_A$). Di conseguenza si ha:

$$\int v\,d\mu \;=\; \sum_{i=1}^{k} \beta_i\,\mu(A\cap B_i) \;=\; \sum_{i=1}^{k} \beta_i\,\mu_A(A\cap B_i) \;=\; \int u\,d\mu_A \;\leq\; \int f|_A\,d\mu_A \;=\; \int_A f\,d\mu \quad .$$

Da quanto precedentemente osservato segue che, se $\{v_n\}$ è una qualsiasi successione di funzioni $\mathcal{A}$-elementari tale che $v_n \uparrow f\,\mathbb{1}_A$, allora risulta

$$\int v_n d\mu \;\leq\; \int_A f\,d\mu \qquad\qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

e quindi

$$\int f\,\mathbb{1}_A d\mu \;=\; \sup_{n\in\mathbb{N}} \int v_n d\mu \;\leq\; \int_A f\,d\mu \quad ,$$

dunque vale la (13.10.2).

Dimostriamo il teorema in generale. Per definizione la funzione f è μ-quasi-integrabile in A se $f|_A$ è μ_A-quasi-integrabile, cioè almeno uno degli integrali

$$\int \big(f|_A\big)^+ d\mu_A \qquad , \qquad \int \big(f|_A\big)^- d\mu_A$$

è finito. Essendo

$$\big(f|_A\big)^+ \;=\; f^+|_A \qquad , \qquad \big(f|_A\big)^- \;=\; f^-|_A$$

e inoltre

$$f^+\mathbb{1}_A \;=\; \big(f\,\mathbb{1}_A\big)^+ \qquad , \qquad f^-\mathbb{1}_A \;=\; \big(f\,\mathbb{1}_A\big)^- \quad ,$$

per quanto già dimostrato (caso $f \geq 0$), si ha

$$\int \Big(f|_A\Big)^+ d\mu_A \;=\; \int_A f^+ d\mu \;=\; \int f^+\mathbb{1}_A d\mu \;=\; \int \Big(f\,\mathbb{1}_A\Big)^+ d\mu \;\;,$$

$$\int \Big(f|_A\Big)^- d\mu_A \;=\; \int_A f^- d\mu \;=\; \int f^-\mathbb{1}_A d\mu \;=\; \int \Big(f\,\mathbb{1}_A\Big)^- d\mu \;\;;$$

ne segue che f è μ-quasi-integrabile in A se e solo se $f\,\mathbb{1}_A$ è μ-quasi-integrabile ed in tal caso risulta

$$\int_A f\,d\mu \;=\; \int f|_A d\mu_A \;=\; \int \Big(f|_A\Big)^+ d\mu_A \;-\; \int \Big(f|_A\Big)^- d\mu_A \;=$$

$$=\; \int \Big(f\,\mathbb{1}_A\Big)^+ d\mu \;-\; \int \Big(f\,\mathbb{1}_A\Big)^- d\mu \;=\; \int f\,\mathbb{1}_A d\mu \;\;.$$

Ciò completa la dimostrazione.

La successiva generalizzazione del Teorema 13.10.1 suggerisce un altro modo equivalente di definire l'integrale esteso ad un sottoinsieme di Ω, con il quale si evita l'inconveniente di dover cambiare lo spazio di misura.

Teorema 13.10.1′. *Dato lo spazio di misura $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, sia $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione numerica definita in un sottoinsieme E di Ω e sia $A \subseteq E$ un insieme appartenente alla σ-algebra $\mathcal{A}$. Sia, inoltre, $\tilde{f} : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ la funzione così definita:*

$$\tilde{f}(\omega) \;=\; \begin{cases} f(\omega) & \text{se } \;\omega \in A\,, \\ 0 & \text{se } \;\omega \in A^{\mathrm{c}}\,. \end{cases}$$

La funzione f è $\mathcal{A}$-misurabile in A se e soltanto se la $\tilde{f}$ è $\mathcal{A}$-misurabile.

Se f è $\mathcal{A}$-misurabile in A, allora f è μ-quasi-integrabile in A se e soltanto $\tilde{f}$ è μ-quasi-integrabile; in questo caso si ha

$$\int_A f\,d\mu \;=\; \int \tilde{f}\,d\mu \;\;. \tag{13.10.3}$$

Dimostrazione. L'affermazione riguardante la misurabilità segue immediatamente dalle Proposizioni 9.2.1 e 9.2.2 e dalla dimostrazione di quest'ultima. Per quanto riguarda il

resto dell'enunciato basta applicare il Teorema 13.10.1 alla funzione $\tilde{f}$, tenendo presente che, ovviamente, si ha $\tilde{f} = \tilde{f}\,\mathbb{1}_A$ e $\tilde{f}|_A = f|_A$.

Esercizio 13.10.1. Svolgere in dettaglio la dimostrazione del Teorema 13.10.1$'$.

Come è ragionevole aspettarsi, l'esistenza dell'integrale esteso a tutto l'insieme Ω implica l'esistenza dell'integrale su ogni insieme $A \in \mathcal{A}$. È inoltre notevole il fatto che la risultante funzione d'insieme $A \to \int_A f\,d\mu$ sia una misura con segno su $\mathcal{A}$.

Teorema 13.10.2. *Dato lo spazio di misura* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$*, supponiamo che* $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ *sia una funzione* ($\mathcal{A}$-misurabile e) μ*-quasi-integrabile. Allora:*

i) *la funzione* f *è* μ*-quasi-integrabile in ogni insieme* $A \in \mathcal{A}$*;*

ii) *la funzione di insieme* $\varphi : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ *definita ponendo*

$$\varphi(A) \;=\; \int_A f\,d\mu \qquad\qquad \forall A \in \mathcal{A} \tag{13.10.4}$$

è una misura con segno su $\mathcal{A}$*.*

Dimostrazione. i) Se $A = \emptyset$, la funzione f è μ-integrabile in A per definizione.

Sia $A \in \mathcal{A}$, $A \neq \emptyset$. La funzione f è $\mathcal{A}$-misurabile in A per la Proposizione 9.2.1. Si hanno inoltre le disuguaglianze

$$f^+\mathbb{1}_A \;\leq\; f^+ \qquad , \qquad f^-\mathbb{1}_A \;\leq\; f^-$$

e quindi

$$\int \Big(f\,\mathbb{1}_A\Big)^+ d\mu \;=\; \int f^+\mathbb{1}_A d\mu \;\leq\; \int f^+ d\mu \;\;,$$

$$\int \Big(f\,\mathbb{1}_A\Big)^- d\mu \;=\; \int f^-\mathbb{1}_A d\mu \;\leq\; \int f^- d\mu \;\;;$$

ne segue che $f\,\mathbb{1}_A$ è μ-quasi-integrabile, cioè, per il precedente teorema, f è μ-quasi-integrabile in A.

ii) Si verifica immediatamente che $\{-\infty, +\infty\} \not\subseteq \varphi(\mathcal{A})$ (ad es., se $\int f^- d\mu < +\infty$, allora $-\infty \notin \varphi(\mathcal{A})$) e che $\varphi(\emptyset) = 0$. Dimostriamo che φ è σ-additiva. Sia $\{A_n\}$ una successione di insiemi appartenenti ad $\mathcal{A}$, a due a due disgiunti. Si ha allora per la Proposizione 13.10.1 ed il Teorema 13.10.1, ricordando il teorema di integrazione per serie,

$$\varphi\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \;=\; \int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} f\,d\mu \;=\; \int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} f^+ d\mu \;-\; \int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} f^- d\mu \;=$$

$$= \int f^+ \mathbb{1}_{\bigcup_{n=1}^\infty A_n} \, d\mu \; - \; \int f^- \mathbb{1}_{\bigcup_{n=1}^\infty A_n} \, d\mu \;\; =$$

$$= \int \Big(\sum_{n=1}^\infty f^+ \mathbb{1}_{A_n} \Big) \, d\mu \; - \; \int \Big(\sum_{n=1}^\infty f^- \mathbb{1}_{A_n} \Big) \, d\mu \;\; =$$

$$= \sum_{n=1}^\infty \int f^+ \mathbb{1}_{A_n} \, d\mu \; - \; \sum_{n=1}^\infty \int f^- \mathbb{1}_{A_n} \, d\mu \;\; = \;\; \sum_{n=1}^\infty \int_{A_n} f^+ d\mu \; - \sum_{n=1}^\infty \int_{A_n} f^- d\mu \;\; =$$

(tenendo presente che almeno una delle due serie ha somma finita)

$$= \sum_{n=1}^\infty \Big[\int_{A_n} f^+ d\mu \; - \int_{A_n} f^- d\mu \Big] \;\; = \;\; \sum_{n=1}^\infty \int_{A_n} f \, d\mu \;\; = \;\; \sum_{n=1}^\infty \varphi(A_n) \;\; .$$

Definizione 13.10.2. (*Misura con segno con densità*). Dato lo spazio di misura $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, sia $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione μ-quasi-integrabile. La misura con segno φ definita tramite la (13.10.4) prende il nome di *misura con segno con* (o *che ammette*) *densità f rispetto a μ* e si denota con il simbolo $f\mu$.

La scelta della notazione $f\mu$ è suggerita dal fatto che, se f è una funzione costante, $f = k$, $k \in \overline{\mathbb{R}}$, allora, come è facile verificare, la corrispondente misura con segno φ è uguale proprio al prodotto $k\mu$ della costante k per la misura μ.

Un altro nome che viene dato alla $f\mu$ è quello di *funzione integrale relativa alla funzione f*.

Teorema 13.10.3. (Proprietà di $f\mu$). *Dato lo spazio di misura $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, supponiamo che $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ sia una funzione μ-quasi-integrabile.*

La misura con segno $f\mu$ ha le seguenti proprietà:

j) *le variazioni superiore ed inferiore $(f\mu)^+$ e $(f\mu)^-$ di $f\mu$ sono le misure con segno aventi densità, rispettivamente, f^+ e f^- rispetto alla misura μ:*

$$(f\mu)^+ \;=\; (f^+)\mu \qquad , \qquad (f\mu)^- \;=\; (f^-)\mu \;\; ; \tag{13.10.5}$$

jj) *$f\mu$ è finita se e solo se f è μ-integrabile;*

jjj) *$f\mu$ è una misura se e solo se $f \geq 0$ μ-q.o.*

Dimostrazione. j) Sia $A \in \mathcal{A}$. Ricordiamo che, per definizione di variazione superiore, si ha:

$$(f\mu)^+(A) \;=\; \sup \big\{ (f\mu)(B) \,:\, B \in \mathcal{A} \,,\, B \subseteq A \big\} \;\; .$$

Se B è un qualsiasi insieme di $\mathcal{A}$ contenuto in A, allora, tenendo presente la (13.10.1) e osservando che $f^+\mathbb{1}_B \leq f^+\mathbb{1}_A$, si ha:

$$\begin{aligned}
(f\mu)(B) &= \int_B f\,d\mu = \int_B f^+ d\mu - \int_B f^- d\mu = \\
&= \int f^+\mathbb{1}_B d\mu - \int f^-\mathbb{1}_B d\mu \leq \\
\leq \int f^+\mathbb{1}_B d\mu &\leq \int f^+\mathbb{1}_A d\mu = \int_A f^+ d\mu = (f^+\mu)(A) \ ,
\end{aligned}$$

e quindi, per l'arbitrarietà di B,

$$(f\mu)^+(A) \leq (f^+\mu)(A) \ .$$

Dimostriamo che vale pure la disuguaglianza contraria. Infatti, posto

$$P = \{f \geq 0\} \ ,$$

si ha

$$\begin{aligned}
(f^+\mu)(A) &= (f^+\mu)(A \cap P) + (f^+\mu)(A \cap P^c) = \\
&= \int f^+\mathbb{1}_{A\cap P} d\mu + \int f^+\mathbb{1}_{A\cap P^c} d\mu =
\end{aligned}$$

(dato che $f^+\mathbb{1}_{A\cap P^c}$ è la funzione identicamente nulla)

$$= \int f\,\mathbb{1}_{A\cap P} d\mu = (f\mu)(A \cap P) \leq (f\mu)^+(A) \ .$$

Abbiamo così provato che $(f\mu)^+ = (f^+)\mu$. In maniera perfettamente analoga si dimostra che è pure $(f\mu)^- = (f^-)\mu$.

jj) La misura con segno $f\mu$ è finita se e solo se $(f\mu)^+(\Omega) < +\infty$ e $(f\mu)^-(\Omega) < +\infty$. Ma

$$(f\mu)^+(\Omega) = (f^+\mu)(\Omega) = \int f^+ d\mu \ ,$$

$$(f\mu)^-(\Omega) = (f^-\mu)(\Omega) = \int f^- d\mu \ ,$$

quindi $f\mu$ è finita se e solo se f è μ-integrabile.

jjj) La $f\mu$ è una misura se e solo se la sua variazione inferiore $(f\mu)^-$ è la misura identicamente nulla, cioè se e solo se $(f\mu)^-(\Omega) = 0$. Ma

$$(f\mu)^-(\Omega) \;=\; \int f^- d\mu \quad ,$$

quindi $f\mu$ è una misura se e solo se $f^- = 0$ μ-q.o., cioè se e solo se $f \geq 0$ μ-q.o.

Per il Teorema 13.10.1, se una funzione f è $\mathcal{A}$-misurabile e μ-quasi-integrabile in Ω, allora essa è $\mathcal{A}$-misurabile e μ-quasi-integrabile in ogni sottoinsieme misurabile di Ω.

Esaminiamo adesso alcuni criteri che, viceversa, consentono, sotto opportune ipotesi, di dedurre la $\mathcal{A}$-misurabilità e la μ-[quasi]-integrabilità di f su tutto Ω dalla $\mathcal{A}$-misurabilità e μ-[quasi]-integrabilità su sottoinsiemi di Ω.

Proposizione 13.10.2. (Criterio di misurabiltà). *Dato lo spazio misurabile* $(\Omega, \mathcal{A})$*, supponiamo che* $\{A_n\}$ *sia una successione di insiemi appartenenti ad* $\mathcal{A}$ *tale che*

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \Omega \quad .$$

Sia $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$.

Condizione necessaria e sufficiente affinché la funzione f *sia* $\mathcal{A}$*-misurabile è che* f *sia* $\mathcal{A}$*-misurabile in ciascuno degli insiemi* A_n*,* $n \in \mathbb{N}$.

Dimostrazione. Supponiamo che sia $A_n \neq \emptyset$ $\forall n \in \mathbb{N}$ (ciò non è restrittivo) e indichiamo, per ogni $n \in \mathbb{N}$, con f_n la restrizione $f|_{A_n}$. Si ha allora, come è facile verificare, per ogni insieme $B \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ (in particolare per ogni $B \in \overline{\mathcal{B}}_1$)

$$f^{-1}(B) \;=\; \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}(B) \quad .$$

Ne segue facilmente la tesi.

Osservazione 13.10.1. È evidente che il precedente criterio conserva la sua validità anche quando

— invece della successione $\{A_n\}$ si ha una famiglia finita $A_1, \ldots, A_k$;

— lo spazio misurabile di arrivo della funzione f, anziché $(\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathcal{B}}_1)$, è un qualsiasi spazio misurabile $(\Omega', \mathcal{A}')$.

Proposizione 13.10.3. (Criteri di μ-[quasi]-integrabilità). *Dato lo spazio di misura $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, supponiamo che $\{A_n\}$ sia una successione di insiemi appartenenti ad $\mathcal{A}$ tale che*

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \Omega \quad .$$

Sia $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione $\mathcal{A}$-misurabile.

Condizione sufficiente affinché la funzione f sia μ-quasi-integrabile è che almeno una delle due serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f^+ d\mu \qquad , \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f^- d\mu$$

abbia somma finita. Se gli insiemi A_n sono a due a due disgiunti la condizione è anche necessaria.

Condizione sufficiente affinché la funzione f sia μ-integrabile è che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} |f| \, d\mu \ < \ +\infty \quad .$$

Se gli insiemi A_n sono a due a due disgiunti la condizione è anche necessaria.

Se $\Omega = A_1 \cup \ldots \cup A_k$, allora la funzione f è μ-integrabile se e soltanto se f è μ-integrabile in ciascuno degli insiemi $A_1, \ldots, A_k$.

Dimostrazione. Le prime due affermazioni seguono dalle proprietà di σ-subadditività (sufficienza) e di σ-additività (necessità) delle misure $f^+\mu$ e $f^-\mu$ e della $|f|\mu$. L'ultima affermazione si deduce grazie alla monotonia ed alla finita subadditività di $|f|\mu$.

Quando il dominio di integrazione è tutto Ω il concetto di integrale è stato introdotto anche per le funzioni definite μ-q.o. in Ω (ciò è stato fatto nel precedente paragrafo). Di tale generalizzazione del concetto di integrale vogliamo adesso occuparci nel caso dell'integrale esteso ad un sottoinsieme misurabile A di Ω.

La prima cosa da fare è quella di formalizzare la definizione di funzione definita μ-q.o. in A. Poniamo pertanto, in coerenza con la Definizione 13.9.1, la seguente definizione.

Definizione 13.10.2. (*Funzioni definite μ-q.o. in un sottoinsieme di Ω*). Dato lo spazio di misura $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, supponiamo che $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ sia una funzione numerica definita in un sottoinsieme E di Ω e che A sia un insieme appartenente alla σ-algebra $\mathcal{A}$.

Si dice che la funzione f è *definita μ-quasi-ovunque in A* se l'insieme $B = E \cap A$ ([11]) appartiene a $\mathcal{A}$ e risulta $\mu(A \setminus B) = 0$.

Una volta che abbiamo precisato che cosa intendiamo per funzione numerica definita μ-q.o. in A, per ottenere le nozioni di $\mathcal{A}$-misurabilità e μ-[quasi]-integrabilità in A, e di integrale esteso ad A per una siffatta funzione possiamo procedere così come abbiamo fatto

([11]) cioè il sottoinsieme di A costituito dai punti di A nei quali la funzione f è definita.

in precedenza, in questo paragrafo, per l'integrale esteso ad A delle funzioni definite in tutto il sottoinsieme A, e cioè facendo riferimento allo spazio di misura ristretto $(A, A \cap \mathcal{A}, \mu_A)$.

Definizioni 13.10.3. (*Integrale delle funzioni definite μ-q.o. in un sottoinsieme di Ω*). Dati lo spazio di misura $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, la funzione numerica $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ $(E \subseteq \Omega)$ e l'insieme $A \in \mathcal{A}$, supponiamo che f sia definita μ-q.o. in A e sia, come nella Definizione 13.10.2 $B = E \cap A$.

Supponiamo che $B \neq \emptyset$, sicchè, considerato lo spazio di misura $(A, A \cap \mathcal{A}, \mu_A)$, la restrizione $f|_B$ risulta essere una funzione definita μ_A-q.o. in A (secondo la Definizione 13.9.1).

Si dice che la funzione f è *$\mathcal{A}$-misurabile in A* se la restrizione $f|_B$ è una funzione $A \cap \mathcal{A}$-misurabile (secondo la Definizione 13.9.2).

Se f è $\mathcal{A}$-misurabile in A, si dice che f è *μ-[quasi]-integrabile in A* se la restrizione $f|_B$ è una funzione μ_A-[quasi]-integrabile (secondo la Definizione 13.9.3); in questo caso si definisce l'*integrale esteso ad A di f rispetto a μ* ponendo

$$\int_A f \, d\mu \;=\; \int f|_B \, d\mu_A$$

(dove il significato dell'integrale al secondo membro è quello dato dalla Definizione 13.9.3).

Se $B = \emptyset$ si assume, per convenzione, che la funzione f è $\mathcal{A}$-misurabile e μ-integrabile nell'insieme A e si pone, per definizione,

$$\int_A f \, d\mu \;=\; 0 \quad .$$

Osservazione 13.10.2. (*Coerenza*). È evidente che, sia nel caso $A = \Omega$ che nel caso $A \subseteq E$, le Definizioni 13.10.3 sono coerenti con quelle già date in precedenza in tali due casi, vale a dire, rispettivamente, le Definizioni 13.9.2 e 13.9.3 e le Definizioni 13.10.1.

La successiva Proposizione 13.10.4 sottolinea il fatto che, data la funzione f definita μ-q.o. in A, studiare il "comportamento" (misurabilità, [quasi]-integrabilità, valore dell'integrale) della funzione f in A equivale a studiare il comportamento di f nell'insieme che, limitatatmente all'ambiente A, è l'effettivo insieme di definizione di f, cioè l'insieme $B = E \cap A$.

Proposizione 13.10.4. *Dati lo spazio di misura $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, la funzione numerica $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ $(E \subseteq \Omega)$ e l'insieme $A \in \mathcal{A}$, supponiamo che f sia definita μ-q.o. in A e indichiamo con B l'intersezione $E \cap A$.*

La funzione f è $\mathcal{A}$-misurabile in A se e solo se f è $\mathcal{A}$-misurabile in B.

La funzione f è μ-quasi-integrabile in A se e soltanto se f è μ-quasi-integrabile in B e, in questo caso, si ha

$$\int_A f \, d\mu \;=\; \int_B f \, d\mu \quad .$$

Dimostrazione. L'asserto è ovviamente vero se $B = \emptyset$. Supponiamo pertanto $B \neq \emptyset$.

Dire che la funzione f è $\mathcal{A}$-misurabile in A significa dire, per definizione, che la restrizione $f|_B$ è una funzione $A \cap \mathcal{A}$-misurabile (secondo la Definizione 13.9.2), cioè una funzione $B \cap (A \cap \mathcal{A})$-misurabile, ovverossia (per la successiva Proposizione 13.10.5) una funzione $B \cap \mathcal{A}$-misurabile; ma questo, per definizione, vuol dire proprio che f è $\mathcal{A}$-misurabile in B.

Occupiamoci adesso della μ-quasi-integrabilità. Per definizione la funzione f è μ-quasi-integrabile in A se la restrizione $f|_B$ è una funzione μ_A-quasi-integrabile (secondo la Definizione 13.9.3); ciò significa che, considerata una qualunque funzione $g : A \to \overline{\mathbb{R}}$, $A \cap \mathcal{A}$-misurabile e tale che $g|_B = f|_B$, la funzione g risulta μ_A-quasi-integrabile. In particolare come funzione g possiamo prendere la funzione $\tilde{g} : A \to \overline{\mathbb{R}}$ definita ponendo

$$\tilde{g}(\omega) = \begin{cases} g(\omega) & \text{se } \omega \in B\,, \\ 0 & \text{se } \omega \in A \setminus B\,. \end{cases}$$

Per il Teorema 13.10.1′ (applicato allo spazio di misura $(A, A \cap \mathcal{A}, \mu_A)$, alla funzione $f|_B : B \to \overline{\mathbb{R}}$ ed all'insieme B) dire che $\tilde{g}$ è μ_A-quasi-integrabile equivale a dire che $f|_B$ è μ_A-quasi-integrabile in B (secondo le Definizioni 13.10.1), cioè ([12]) che $f|_B$ è μ_B-quasi-integrabile; ma quest'ultimo fatto, per definizione, significa proprio che f è μ-quasi-integrabile in B.

Infine, supponendo che la f sia μ-quasi-integrabile in A, si ha, grazie alle stesse definizioni ed agli stessi teoremi con i quali abbiamo giustificato la precedente serie di equivalenze,

$$\int_A f\,d\mu = \int f|_B\,d\mu_A = \int \tilde{g}\,d\mu_A =$$
$$= \int_B f|_B\,d\mu_A = \int f|_B\,d\mu_B = \int_B f\,d\mu\ .$$

Proposizione 13.10.5. *Sia $(\Omega, \mathcal{A})$ uno spazio misurabile e siano A, B sottoinsiemi non vuoti di Ω tali che $B \subseteq A$. Allora*

$$B \cap (A \cap \mathcal{A}) = B \cap \mathcal{A}\ .$$

Dimostrazione. Un insieme appartenente alla σ-algebra $B \cap (A \cap \mathcal{A})$ è un insieme del tipo $B \cap Y$ con $Y \in A \cap \mathcal{A}$, cioè un insieme del tipo $B \cap (A \cap X)$ con $X \in \mathcal{A}$; dato che

$$B \cap (A \cap X) = B \cap X \tag{13.10.5}$$

([12]) Per rendersi conto di questa equivalenza occorre tenere presente che, per la Proposizione 13.10.5, si ha $B \cap (A \cap \mathcal{A}) = B \cap \mathcal{A}$ e che inoltre la restrizione di μ_A alla σ-algebra $B \cap \mathcal{A}$ è, ovviamente, proprio la μ_B.

concludiamo che tale insieme appartiene a $B \cap \mathcal{A}$. Viceversa, per la (13.10.5), ogni insieme appartenente alla σ-algebra $B \cap \mathcal{A}$, cioè ogni insieme del tipo $B \cap X$ con $X \in \mathcal{A}$, appartiene anche alla σ-algebra $B \cap (A \cap \mathcal{A})$.

13.10. L'integrale di Lebesgue.

Nel caso particolare dello spazio di misura $(\mathbb{R}, \mathcal{L}_h, \mathrm{m}_h)$ è consuetudine adottare una terminologia ed un simbolismo speciali.

Dato un insieme $A \in \mathcal{L}_h$ ed una funzione numerica f definita m_h-quasi-ovunque in A si suole dire, semplicemente, che f è *definita quasi-ovunque in* A. Inoltre, per significare che f è $\mathcal{L}_h$-misurabile oppure m_h-[quasi]-integrabile in A, si suole dire che f è *misurabile secondo Lebesgue* oppure [*quasi*]-*integrabile secondo Lebesgue in* A. L'integrale

$$\int_A f \, \mathrm{dm}_h$$

viene detto *integrale di Lebesgue esteso ad* A *di* f e, solitamente, viene indicato con gli stessi simboli adoperati in Analisi 1 e 2 per indicare gli integrali introdotti e studiati in quegli ambiti (integrali di Riemann, generalizzati ed impropri), cioè

$$\int_A f(x)\, dx \quad , \quad \int_A f(t)\, dt \quad , \quad \int_A f(z)\, dz \qquad \text{ecc. ecc.} \, ,$$

oppure ancora, se $h \geq 2$,

$$\int_A f(x_1, \dots x_h)\, dx_1 \dots dx_h \quad , \quad \int \dots \int_A f(x_1, \dots x_h)\, dx_1 \dots dx_h \qquad \text{ecc. ecc.}$$

Questo uso è giustificato dal fatto che, come vedremo nel successivo capitolo, dedicato al confronto tra l'integrale di Lebesgue e quello di Riemann, ogni qual volta l'integrale di Lebesgue e quello di Riemann (oppure l'integrale di Lebesgue e quello generalizzato o l'integrale di Lebesgue e quello improprio) hanno entrambi significato, il valore dei due integrali è lo stesso.

Avvertiamo tuttavia che nel corso di questi appunti ci gioveremo della terminologia e del simbolismo sopra descritti solo eccezionalemente.