12. Funzioni numeriche misurabili.

12.1. Funzioni numeriche misurabili.

D'ora in avanti, nel corso di questi appunti, adotteremo la seguente terminologia: per far riferimento ad una funzione $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$, per la quale l'insieme di arrivo è $\overline{\mathbb{R}}$, parleremo di *funzione numerica*; invece, nel caso in cui l'insieme di arrivo è $\mathbb{R}$, adopereremo la locuzione *funzione reale.*

Inoltre, poiché le funzioni misurabili che d'ora in poi considereremo avranno per lo più come spazio misurabile di arrivo lo spazio $(\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathcal{B}}_1)$, è conveniente introdurre una terminologia semplificata per questo caso specifico.

Definizione 12.1.1. (*Funzione numerica misurabile*). Se $(\Omega, \mathcal{A})$ è uno spazio misurabile e $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ è una funzione numerica su Ω, si dice che la funzione f è $\mathcal{A}$-*misurabile* per significare che f è $\mathcal{A} - \overline{\mathcal{B}}_1$-misurabile.

Osservazione 12.1.1. Se $f : \Omega \to \mathbb{R}$ è una funzione reale, allora, dato che f può essere pensata anche come funzione numerica, per tale funzione ha senso parlare sia di $\mathcal{A} - \mathcal{B}_1$-misurabilità che di $\mathcal{A} - \overline{\mathcal{B}}_1$-misurabilità. Tuttavia, dato che la σ-algebra $\mathcal{B}_1$ è la traccia di $\overline{\mathcal{B}}_1$ su $\mathbb{R}$, la Proposizione 9.1.3 assicura che le due proprietà sono perfettamente equivalenti. Pertanto, nel caso di una funzione reale $f : \Omega \to \mathbb{R}$, possiamo usare tranquillamente l'espressione "f è $\mathcal{A}$-misurabile", senza alcun pericolo di ambiguità.

Definizione 12.1.2. (*Indicatore di un insieme*). Sia Ω un insieme non vuoto (l'insieme "ambiente"). Per ogni insieme $A \subseteq \Omega$ si chiama *indicatore* (o *funzione indicatrice* o *funzione caratteristica*) dell'insieme A la funzione $\mathbb{1}_A : \Omega \to \mathbb{R}$ definita nel modo seguente:

$$\mathbb{1}_A(\omega) \ = \ \begin{cases} 1 & \text{se } \omega \in A \ , \\ 0 & \text{se } \omega \notin A \ . \end{cases}$$

Nel seguito, occasionalmente, quando sarà necessario evidenziare l'insieme ambiente Ω, adotteremo la notazione $\mathbb{1}_A^\Omega$ invece di $\mathbb{1}_A$.

Proposizione 12.1.1. (Proprietà degli indicatori). *Siano A, B e A_i, $i \in I$, arbitrari sottoinsiemi dell'insieme ambiente Ω. Valgono le seguenti proprietà:*

$$(1) \quad \mathbb{1}_{A^c} \ = \ 1 - \mathbb{1}_A \quad ,$$

$$(2) \quad A \subseteq B \iff \mathbb{1}_A \leq \mathbb{1}_B \quad , \quad (3) \quad A = B \iff \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B \quad ,$$

$$(4) \quad \mathbb{1}_{\bigcup_{i \in I} A_i} \ = \ \sup_{i \in I} \mathbb{1}_{A_i} \quad , \quad (5) \quad \mathbb{1}_{\bigcap_{i \in I} A_i} \ = \ \inf_{i \in I} \mathbb{1}_{A_i} \quad .$$

Dimostrazione. Verifichiamo, a titolo di esempio, la (4) (naturalmente, il significato della funzione che figura al secondo membro è:

$$\left(\sup_{i\in I} \mathbb{1}_{A_i}\right)(\omega) \;=\; \sup\{\mathbb{1}_{A_i}(\omega)\,:\, i\in I\} \qquad \forall\omega\in\Omega\,).$$

Fissato $\omega\in\Omega$, si hanno due possibilità:

— $\omega \in \bigcup_{i\in I} A_i$; in questo caso si ha $\mathbb{1}_{\bigcup_{i\in I}A_i}(\omega) = 1$ e, dato che ω appartiene a qualcuno degli insiemi A_i, l'insieme $\{\mathbb{1}_{A_i}(\omega)\,:\, i\in I\}$ contiene il numero 1, quindi anche il $\sup\{\mathbb{1}_{A_i}(\omega)\,:\, i\in I\}$ è uguale a 1;

— $\omega \notin \bigcup_{i\in I} A_i$; allora $\mathbb{1}_{\bigcup_{i\in I}A_i}(\omega) = 0$ e, dato che ω non appartiene a nessuno degli insiemi A_i, cioè $\mathbb{1}_{A_i}(\omega) = 0\ \forall i\in I$, anche il $\sup\{\mathbb{1}_{A_i}(\omega)\,:\, i\in I\}$ è uguale a 0.

Proposizione 12.1.2. (Misurabilità dell'indicatore). *Sia $(\Omega,\mathcal{A})$ uno spazio misurabile e sia A un sottoinsieme di Ω. Vale l'equivalenza:*

$$\mathbb{1}_A \text{ è } \mathcal{A}\text{-misurabile} \quad\Longleftrightarrow\quad A\in\mathcal{A}\,.$$

Dimostrazione. Per ogni insieme $B\subseteq\mathbb{R}$ si ha:

$$\mathbb{1}_A^{-1}(B) \;=\; \begin{cases} \emptyset & \text{se } 0,1\notin B\,; \\ A & \text{se } 1\in B,\ 0\notin B\,; \\ A^{\mathrm{c}} & \text{se } 0\in B,\ 1\notin B\,; \\ \Omega & \text{se } 0,1\in B\,. \end{cases} \tag{12.1.1}$$

Supponiamo che $\mathbb{1}_A$ sia $\mathcal{A}$-misurabile. Ne segue che l'insieme $\mathbb{1}_A^{-1}(\{1\})$ (controimmagine di un insieme chiuso, e quindi boreliano) appartiene alla σ-algebra $\mathcal{A}$. Pertanto, grazie alla (12.1.1) possiamo concludere che

$$A \;=\; \mathbb{1}_A^{-1}(\{1\}) \;\in\; \mathcal{A}\,.$$

Viceversa, se $A\in\mathcal{A}$, la (12.1.1) implica che $\mathbb{1}_A^{-1}(B)$ appartiene a $\mathcal{A}$, qualunque sia l'insieme $B\subseteq\mathbb{R}$; pertanto la funzione $\mathbb{1}_A$ è $\mathcal{A}-\mathcal{B}$-misurabile, qualunque sia la σ-algebra $\mathcal{B}$ in $\mathbb{R}$; in particolare, $\mathbb{1}_A$ è $\mathcal{A}$-misurabile.

12.2. Criteri di misurabilità delle funzioni numeriche.

Notazioni. Se Ω è un insieme non vuoto (l'insieme "ambiente") e f,g sono due funzioni numeriche su Ω, utlizzeremo, per brevità, la notazione

$$\{f\le g\}$$

per indicare l'insieme

$$\{\omega\in\Omega\,:\, f(\omega)\;\le\; g(\omega)\}\,,$$

sempreché tale notazione non dia possibiltà di equivoco.

Analogo significato hanno le notazioni $\{f<g\}$, $\{f>g\}$, $\{f=g\}$ ecc. ecc.

Teorema 12.2.1. *Se f è una funzione numerica su Ω, ognuna delle seguenti quattro condizioni è equivalente alla $\mathcal{A}$-misurabilità di f:*

(a) $\{f \geq \alpha\} \in \mathcal{A} \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}$;

(b) $\{f > \alpha\} \in \mathcal{A} \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}$;

(c) $\{f \leq \alpha\} \in \mathcal{A} \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}$;

(d) $\{f < \alpha\} \in \mathcal{A} \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione. Osserviamo che, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, si ha $\{f \geq \alpha\} = f^{-1}([\alpha, +\infty])$. Di conseguenza, dato che (Proposizione 6.3.2) la famiglia di intervalli $\{[\alpha, +\infty] : \alpha \in \mathbb{R}\}$ è un generatore di $\overline{\mathcal{B}}_1$, l'equivalenza

$$\text{(a)} \iff \text{la funzione } f \text{ è } \mathcal{A}\text{-misurabile}$$

discende subito dal criterio generale di misurabilità (Teorema 9.1.1).

Dimostriamo adesso l'equivalenza delle condizioni (a) - (d).

(a) $\Longrightarrow$ (b) . Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha

$$\{f > \alpha\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{f \geq \alpha + \tfrac{1}{n}\} \ \ (^1) \ ;$$

pertanto, dato che ognuno degli insiemi $\{f \geq \alpha + \frac{1}{n}\}$, $n \in \mathbb{N}$, appartiene per ipotesi alla σ-algebra $\mathcal{A}$, anche $\{f > \alpha\}$ appartiene a $\mathcal{A}$.

(b) $\Longrightarrow$ (c) . Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha

$$\{f \leq \alpha\} = \{f > \alpha\}^{\mathrm{c}} \ ,$$

pertanto, dato che $\{f > \alpha\} \in \mathcal{A}$ per ipotesi, anche $\{f \leq \alpha\}$ appartiene alla σ-algebra $\mathcal{A}$.

(c) $\Longrightarrow$ (d) . Segue dall'uguaglianza

$$\{f < \alpha\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{f \leq \alpha - \tfrac{1}{n}\} \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R} \ .$$

(d) $\Longrightarrow$ (a) . Segue dall'uguaglianza

$$\{f \geq \alpha\} = \{f < \alpha\}^{\mathrm{c}} \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R} \ .$$

(^{1}) Se $\omega \in \{f > \alpha\}$, allora è $f(\omega) > \alpha$ e quindi, per n sufficientemente grande, si ha pure $f(\omega) \geq \alpha + \frac{1}{n}$, dunque $\omega \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \{f \geq \alpha + \frac{1}{n}\}$; viceversa, se $\omega \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \{f \geq \alpha + \frac{1}{n}\}$, allora $f(\omega) \geq \alpha + \frac{1}{n}$ per qualche $n \in \mathbb{N}$ e quindi, a maggior ragione, $f(\omega) > \alpha$, cioè $\omega \in \{f > \alpha\}$.

Teorema 12.2.2. *Supponiamo che D sia un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ denso in $\mathbb{R}$.*

Se f è una funzione numerica su Ω, ognuna delle seguenti quattro condizioni è equivalente alla $\mathcal{A}$-misurabilità di f:

$$\begin{array}{lll} (\mathrm{a}') & \{f \geq \beta\} \in \mathcal{A} & \forall \beta \in D\ ; \\ (\mathrm{b}') & \{f > \beta\} \in \mathcal{A} & \forall \beta \in D\ ; \\ (\mathrm{c}') & \{f \leq \beta\} \in \mathcal{A} & \forall \beta \in D\ ; \\ (\mathrm{d}') & \{f < \beta\} \in \mathcal{A} & \forall \beta \in D\ . \end{array}$$

Dimostrazione. Dimostriamo che ognuna delle condizioni (a') - (d') è equivalente alle condizioni (a) - (d) del precedente teorema.

(a) $\Longrightarrow$ (a'). Questa implicazione è ovvia.

(a') $\Longrightarrow$ (b'). Per ogni $\beta \in D$, denotata con $\{\beta_n\}$ una successione di elementi di D tale da aversi $\beta < \beta_n < \beta + \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ (l'esistenza di $\{\beta_n\}$ è assicurata dalla densità di D), si ha l'uguaglianza

$$\{f > \beta\} \ = \ \bigcup_{n=1}^{\infty} \{f \geq \beta_n\}\ ;$$

pertanto, dato che ognuno degli insiemi $\{f \geq \beta_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, appartiene per ipotesi alla σ-algebra $\mathcal{A}$, anche $\{f > \beta\}$ appartiene a $\mathcal{A}$.

(b') $\Longrightarrow$ (c'). Segue dal fatto che

$$\{f \leq \beta\} \ = \ \{f > \beta\}^{\mathrm{c}} \qquad \forall \beta \in D.$$

(c') $\Longrightarrow$ (d'). Segue dal fatto che, per ogni $\beta \in D$, si ha

$$\{f < \beta\} \ = \ \bigcup_{n=1}^{\infty} \{f \leq \beta_n\}\ ,$$

dove $\{\beta_n\}$ è una qualunque successione di elementi di D tale che $\beta - \frac{1}{n} < \beta_n < \beta$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

(d') $\Longrightarrow$ (d). Segue dal fatto che, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, si ha

$$\{f < \alpha\} \ = \ \bigcup_{n=1}^{\infty} \{f < \beta_n\}\ ,$$

dove $\{\beta_n\}$ è una qualunque successione di elementi di D tale che $\alpha - \frac{1}{n} < \beta_n < \alpha$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

12.3. Operazioni con le funzioni numeriche misurabili.

Proposizione 12.3.1. *Se f, g sono due funzioni numeriche $\mathcal{A}$-misurabili su Ω, ognuno degli insiemi*

$$\{f < g\} \ , \quad \{f \leq g\} \ , \quad \{f = g\} \ , \quad \{f \neq g\}$$

appartiene alla σ-algebra $\mathcal{A}$.

Dimostrazione. Si ha:

$$\{f < g\} \ = \ \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} (\{f < q\} \cap \{g > q\}) \ \ (^2) \ .$$

Pertanto, dato che per ogni $q \in \mathbb{Q}$ gli insiemi $\{f < q\}$, $\{f > q\}$, e quindi anche la loro intersezione $\{f < q\} \cap \{f > q\}$, appartengono alla σ-algebra $\mathcal{A}$, anche l'unione (numerabile) $\bigcup_{q \in \mathbb{Q}} (\{f < q\} \cap \{f > q\})$ appartiene a $\mathcal{A}$, dunque $\{f < g\}$ appartiene a $\mathcal{A}$.

Da quanto dimostrato, scambiando i ruoli delle due funzioni f e g, segue che l'insieme $\{f > g\}$ appartiene a $\mathcal{A}$. Pertanto anche l'insieme complementare $\{f > g\}^{\mathrm{c}}$, cioè $\{f \leq g\}$, appartiene a $\mathcal{A}$.

Infine, gli insiemi $\{f = g\}$ e $\{f \neq g\}$ appartengono a $\mathcal{A}$ in quanto

$$\{f = g\} \ = \ \{f \leq g\} \setminus \{f < g\} \quad , \quad \{f \neq g\} \ = \ \{f = g\}^{\mathrm{c}} \ .$$

Teorema 12.3.1. *Se f, g sono due funzioni numeriche $\mathcal{A}$-misurabili su Ω, anche la funzione somma $f + g$, la funzione differenza $f - g$ (se definite in tutto Ω) e la funzione prodotto fg sono $\mathcal{A}$-misurabili.*

Dimostrazione. Suddividiamo la dimostrazione in vari punti.

a) Proviamo che la $\mathcal{A}$-misurabilità di una funzione numerica f implica la $\mathcal{A}$-misurabilità di $\sigma f + \tau$, qualunque siano le costanti $\sigma, \tau \in \mathbb{R}$. Se $\sigma = 0$ la funzione $\sigma f + \tau$ è costante e quindi $\mathcal{A}$-misurabile. Se $\sigma > 0$ osserviamo che, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, per la $\mathcal{A}$-misurabilità di f si ha

$$\{\sigma f + \tau \geq \alpha\} \ = \ \left\{f \geq \tfrac{\alpha - \tau}{\sigma}\right\} \in \mathcal{A}$$

e quindi $\sigma f + \tau$ è $\mathcal{A}$-misurabile per il Teorema 12.2.1. Il ragionamento è analogo se $\sigma < 0$; infatti, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, si ha

$$\{\sigma f + \tau \geq \alpha\} \ = \ \left\{f \leq \tfrac{\alpha - \tau}{\sigma}\right\} \in \mathcal{A} \ .$$

b) Da a) segue subito, come caso particolare, che se g è una funzione numerica $\mathcal{A}$-misurabile, allora anche $-g$ è $\mathcal{A}$-misurabile.

$(^2)$ Infatti, se $\omega \in \{f < g\}$, cioè $f(\omega) < g(\omega)$, esiste $\overline{q} \in \mathbb{Q}$ tale che $f(\omega) < \overline{q} < g(\omega)$; ne segue che $\omega \in \{f < \overline{q}\} \cap \{g > \overline{q}\}$ e quindi $\omega \in \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} (\{f < q\} \cap \{f > q\})$. Viceversa, se $\omega \in \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} (\{f < q\} \cap \{f > q\})$, allora $\omega \in \{f < \overline{q}\} \cap \{g > \overline{q}\}$ per qualche $\overline{q} \in \mathbb{Q}$ e quindi $f(\omega) < g(\omega)$, cioè $\omega \in \{f < g\}$.

c) Proviamo che se f, g sono due funzioni numeriche $\mathcal{A}$-misurabili su Ω e la loro la funzione somma $f+g$ è definita in tutto Ω, allora $f+g$ è $\mathcal{A}$-misurabile. Infatti, per quanto dimostrato in a) e b) si ha che, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, la funzione $\alpha - g$ è $\mathcal{A}$-misurabile, pertanto, per la Proposizione 12.3.1, l'insieme $\{f \geq \alpha - g\}$ appartiene a $\mathcal{A}$. A questo punto basta osservare che, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, risulta

$$\{f+g \geq \alpha\} \;=\; \{f \geq \alpha - g\} \quad (^3)$$

ed invocare il Teorema 12.2.1.

d) Da c) e b) segue immediatamente che, se f, g sono due funzioni numeriche $\mathcal{A}$-misurabili su Ω e la loro la funzione differenza $f-g$ è definita in tutto Ω, allora anche $f-g$ è $\mathcal{A}$-misurabile.

e) Proviamo adesso che, se f è una funzione numerica $\mathcal{A}$-misurabile su Ω, allora anche f^2 è $\mathcal{A}$-misurabile. Infatti, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, si ha

$$\{f^2 \geq \alpha\} \;=\; \begin{cases} \Omega & \text{se } \alpha \leq 0\,, \\ \{f^2 \geq \sqrt{\alpha}\} \cup \{f^2 \leq -\sqrt{\alpha}\} & \text{se } \alpha > 0\,, \end{cases}$$

quindi, in ogni caso, $\{f^2 \geq \alpha\} \in \mathcal{A}$.

f) Dimostriamo che, nel caso in cui le due funzioni numeriche $\mathcal{A}$-misurabili f, g sono reali, allora anche la funzione prodotto fg è $\mathcal{A}$-misurabile. Si ha infatti l'identità

$$fg \;=\; \frac{1}{4}\left[(f+g)^2 - (f-g)^2\right]$$

e la funzione scritta al secondo membro è $\mathcal{A}$-misurabile per quanto provato in c), d), e) e a).

g) Dimostriamo infine che, se f, g sono due funzioni numeriche $\mathcal{A}$-misurabili su Ω, anche fg è una funzione $\mathcal{A}$-misurabile. Consideriamo i seguenti sottoinsiemi di Ω:

$$\Omega_{+\infty} = \{fg = +\infty\} \quad , \quad \Omega_{-\infty} = \{fg = -\infty\} \quad ,$$

$$\Omega_0 = \{fg = 0\} \quad .$$

(^{3}) Verifichiamo l'uguaglianza insiemistica. Se $\omega \in \{f+g \geq \alpha\}$, cioè $f(\omega) + g(\omega) \geq \alpha$, vi sono due posssibiltà: o $f(\omega) + g(\omega) \in \mathbb{R}$, quindi tutti i termini della precedente disuguaglianza sono numeri reali e pertanto si ha pure $f(\omega) \geq \alpha - g(\omega)$, cioè $\omega \in \{f \geq \alpha - g\}$; oppure $f(\omega) + g(\omega) = +\infty$, cioè almeno uno dei due addendi $f(\omega)$ e $g(\omega)$ è uguale a $+\infty$, ma anche in questo caso è ovvio che $\omega \in \{f \geq \alpha - g\}$. Viceversa, se $\omega \in \{f \geq \alpha - g\}$, cioè $f(\omega) \geq \alpha - g(\omega)$, si osserva, come prima cosa, che non può essere $f(\omega) = -\infty$ perché, altrimenti, si avrebbe pure $g(\omega) = +\infty$ e la funzione somma $f+g$ non sarebbe definita nel punto ω; a questo punto vi sono due posssibiltà: o $f(\omega) = +\infty$ ed allora è chiaro che $\omega \in \{f+g \geq \alpha\}$; oppure $f(\omega) \in \mathbb{R}$, ma, anche questa volta, tanto nel caso $g(\omega) \in \mathbb{R}$ che in quello $g(\omega) = +\infty$, è evidente che $\omega \in \{f+g \geq \alpha\}$.

Verifichiamo che si tratta di insiemi misurabili. Si ha infatti

$$\Omega_{+\infty} \;=\; (\{f = +\infty\} \cap \{g > 0\}) \cup (\{f = -\infty\} \cap \{g < 0\}) \cup$$

$$\cup (\{f > 0\} \cap \{g = +\infty\}) \cup (\{f < 0\} \cap \{g = -\infty\}) \ ,$$

$$\Omega_{-\infty} \;=\; (\{f = -\infty\} \cap \{g > 0\}) \cup (\{f = +\infty\} \cap \{g < 0\}) \cup$$

$$\cup (\{f > 0\} \cap \{g = -\infty\}) \cup (\{f < 0\} \cap \{g = +\infty\}) \ ,$$

$$\Omega_0 \;=\; \{f = 0\} \cup \{g = 0\}$$

ed i secondi membri delle precedenti uguaglianze sono insiemi che appartengono a $\mathcal{A}$ poiché le funzioni f e g sono $\mathcal{A}$-misurabili ([4]).

Consideriamo l'insieme

$$\Omega^* \;=\; \Omega \setminus (\Omega_{+\infty} \cup \Omega_{-\infty} \cup \Omega_0)$$

e indichiamo (se $\Omega^* \neq \emptyset$) con f^* e g^* le restrizioni di f e g a Ω^*. Tali restrizioni sono (Proposizione 9.1.1) $\Omega^* \cap \mathcal{A}$-misurabili e sono funzioni reali per come è stato definito Ω^*. Pertanto, per il precedente punto f), la funzione $f^* g^*$ è $\Omega^* \cap \mathcal{A}$-misurabile, quindi, tenendo presente che Ω^* appartiene a $\mathcal{A}$, si ha

$$\{f^* g^* \geq \alpha\} \in \Omega^* \cap \mathcal{A} \subseteq \mathcal{A} \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

(dove, ovviamente, $\{f^* g^* \geq \alpha\}$ sta per $\{\omega \in \Omega^* \,:\, f^*(\omega) g^*(\omega) \geq \alpha\}$). A questo punto, per completare la dimostrazione, basta osservare che, fissato un qualsiasi $\alpha \in \mathbb{R}$, si ha

$$\{fg \geq \alpha\} \;=\; \begin{cases} \Omega_{+\infty} \cup \{f^* g^* \geq \alpha\} \cup \Omega_0 & \text{se } \alpha \leq 0\,, \\[2ex] \Omega_{+\infty} \cup \{f^* g^* \geq \alpha\} & \text{se } \alpha > 0\,, \end{cases}$$

(convenendo, naturalmente, che $\{f^* g^* \geq \alpha\} = \emptyset$ se $\Omega^* = \emptyset$) e quindi $\{fg \geq \alpha\} \in \mathcal{A}$ in qualunque caso.

Teorema 12.3.2. *Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni numeriche $\mathcal{A}$-misurabili su Ω. Allora anche le funzioni*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n \qquad e \qquad \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n$$

sono $\mathcal{A}$-misurabili.

([4]) L'appartenenza a $\mathcal{A}$ degli insiemi del tipo $\{f = +\infty\}$ o $\{f = -\infty\}$ si può acquisire, ad esempio, tramite la Proposizione 12.3.1, considerando come funzione g la funzione costante $+\infty$ o $-\infty$.

Dimostrazione. Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha, come è immediato verificare,

$$\left\{\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n \leq \alpha\right\} \;=\; \bigcap_{n=1}^{\infty}\{f_n \leq \alpha\}\ ,$$

pertanto, dato che ognuno degli insiemi $\{f_n \leq \alpha\}$, $n \in \mathbb{N}$, appartiene per ipotesi alla σ-algebra $\mathcal{A}$, anche l'insieme

$$\left\{\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n \leq \alpha\right\}$$

appartiene a $\mathcal{A}$. Ciò prova la misurabilità di $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$. Per dimostrare la misurabilità di $\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n$ si procede in maniera analoga, osservando che per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ risulta

$$\left\{\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n \geq \alpha\right\} \;=\; \bigcap_{n=1}^{\infty}\{f_n \geq \alpha\}\ .$$

Corollario 12.3.1. *Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni numeriche $\mathcal{A}$-misurabili su Ω. Allora anche le funzioni*

$$\lim_{n\to\infty}{}' f_n \qquad e \qquad \lim_{n\to\infty}{}'' f_n$$

sono $\mathcal{A}$-misurabili.

Dimostrazione. Dal Teorema 12.3.2 segue che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, la funzione

$$e'_n \;=\; \inf_{m\geq n} f_m$$

è $\mathcal{A}$-misurabile; di conseguenza, per lo stesso teorema, anche

$$\lim_{n\to\infty}{}' f_n \;=\; \sup_{n\in\mathbb{N}} e'_n$$

è $\mathcal{A}$-misurabile. In modo analogo si ragiona per il massimo limite.

Corollario 12.3.2. *Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni numeriche $\mathcal{A}$-misurabili su Ω. Supponiamo inoltre che tale successione di funzioni sia convergente* (in $\overline{\mathbb{R}}$) *in ogni punto di Ω. Allora anche la funzione*

$$\lim_{n\to\infty} f_n$$

è $\mathcal{A}$-misurabile.

Corollario 12.3.3. *Siano $f_1, \ldots, f_n$ funzioni numeriche $\mathcal{A}$-misurabili su Ω. Allora anche le funzioni*

$$\max\{f_1, \ldots, f_n\} \qquad e \qquad \min\{f_1, \ldots, f_n\}$$

sono $\mathcal{A}$-misurabili.

Dimostrazione. Segue subito dal Teorema 12.3.2 scrivendo il massimo ed il minimo come estremo superiore ed inferiore di una successione di funzioni $\mathcal{A}$-misurabili:

$$\max\{f_1, \ldots, f_n\} = \sup\{f_1, \ldots, f_n, f_1, f_1, f_1, \ldots\}$$

$$\min\{f_1, \ldots, f_n\} = \inf\{f_1, \ldots, f_n, f_1, f_1, f_1, \ldots\}$$

Corollario 12.3.4. *Se f è una funzione numerica $\mathcal{A}$-misurabile su Ω, allora anche la funzione $|f|$ è $\mathcal{A}$-misurabile.*

Dimostrazione. Segue dal Teorema 12.3.1 e dal Corollario 12.3.3 tenendo presente che

$$|f| = \max\{f, -f\} .$$