11. Misure con segno.

11.1. Misure con segno.

Sia Ω un insieme non vuoto e sia $\mathcal{A}$ una σ-algebra in Ω.

Definizione 11.1.1. (*Misura con segno*). Si chiama *misura con segno* su $\mathcal{A}$ ogni funzione $\varphi : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ verificante i seguenti postulati:

MS$_1$) $\varphi(\emptyset) = 0$;

MS$_2$) per ogni successione $\{A_n\}$ di insiemi appartenenti ad $\mathcal{A}$, a due a due disgiunti, risulta

$$\varphi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n) \tag{11.1.1}$$

(postulato di $\sigma-$*additività*).

Ovviamente, il significato della (11.1.1) è che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n)$ deve essere convergente in $\overline{\mathbb{R}}$ ed avere come somma la quantità $\varphi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$.

Un altro termine spesso usato come sinonimo di misura con segno è quello di *misura relativa.*

Una misura con segno φ si dice *finita* se è $\varphi(\mathcal{A}) \subseteq \mathbb{R}$ (cioè φ assume soltanto valori reali).

Esempi 11.1.1. In base alla precedente definizione è immediato verificare che:

a) ogni misura μ è una misura con segno;

b) se μ_1 e μ_2 sono due misure sulla stessa σ-algebra $\mathcal{A}$ ed almeno una di esse è finita, la funzione di insieme $\varphi = \mu_1 - \mu_2$ è una misura con segno su $\mathcal{A}$;

c) se φ è una misura con segno, anche la funzione opposta $-\varphi$ è una misura con segno.

Vedremo più avanti (Lemma 11.3.1) che l'unico modo possibile di ottenere una misura con segno è quello descritto nel precedente Esempio b).

Teorema 11.1.1. (Proprietà delle misure con segno). *Sia φ una misura con segno sulla σ-algebra $\mathcal{A}$. Valgono le seguenti proprietà.*

a) (Finita additività). *Se $A, B \in \mathcal{A}$ sono due insiemi disgiunti, risulta*

$$\varphi(A \cup B) \ = \ \varphi(A) + \varphi(B) \tag{11.1.2}$$

(ciò vuol dire che la somma $\varphi(A) + \varphi(B)$ ha significato e risulta uguale a $\varphi(A \cup B)$).

b) *Siano $A, B \in \mathcal{A}$ tali che $B \subseteq A$. Si hanno le seguenti implicazioni:*

$$\varphi(A) \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad \varphi(B) \in \mathbb{R} \ \ ; \tag{11.1.3}$$

$$\varphi(B) \ = \ +\infty \quad [\,\text{risp.} \ -\infty\,] \quad \Longrightarrow \quad \varphi(A) \ = \ +\infty \quad [\,\text{risp.} \ -\infty\,] \ \ . \tag{11.1.4}$$

c) (Sottrattività). *Se $A, B \in \mathcal{A}$ sono tali che $B \subseteq A$ e inoltre $\varphi(B) \in \mathbb{R}$, allora*

$$\varphi(A \setminus B) = \varphi(A) - \varphi(B) \ \ . \tag{11.1.5}$$

Dimostrazione. a) Basta applicare il postulato di σ-additività alla successione di insiemi

$$A\,,\ B\,,\ \emptyset\,,\ \emptyset\,,\ \emptyset\,,\ \ldots$$

e tenere presente il postulato MS_1).

b) e c) Essendo $B \subseteq A$, possiamo scrivere

$$A \ = \ B \cup (A \setminus B) \ ,$$

da cui, per la proprietà di finita additività, segue che è

$$\varphi(A) \ = \ \varphi(B) + \varphi(A \setminus B) \ .$$

Dalla precedente uguaglianza, con ovvie considerazioni, si deducono le due implicazioni (11.1.3) e (11.1.4) e, nell'ulteriore ipotesi che sia $\varphi(B) \in \mathbb{R}$, anche l'uguaglianza (11.1.5).

Corollario 11.1.1. (Codominio di una misura con segno). *Sia $\mathcal{A}$ una σ-algebra nell'insieme Ω e sia φ una misura con segno su $\mathcal{A}$.*

Risulta

$$\{-\infty, +\infty\} \ \not\subseteq \ \varphi(\mathcal{A}) \tag{11.1.6}$$

(cioè il codominio di φ può contenere soltanto uno degli elementi $-\infty$ e $+\infty$).

Dimostrazione. Consideriamo il valore $\varphi(\Omega)$.

Se $\varphi(\Omega) \in \mathbb{R}$, allora, per la proprietà b) (implicazione (11.1.3)), si ha $\varphi(\mathcal{A}) \subseteq \mathbb{R}$.

Se $\varphi(\Omega) = +\infty$, allora, sempre per la proprietà b) (implicazione (11.1.4)), si ha che l'elemento $-\infty$ non fa parte del codominio $\varphi(\mathcal{A})$ (altrimenti dovrebbe essere pure $\varphi(\Omega) = -\infty$). Analogamente, se $\varphi(\Omega) = -\infty$, allora $+\infty \notin \varphi(\mathcal{A})$.

11.2. Variazioni di una misura con segno.

Definizioni 11.2.1. (*Variazione superiore e variazione inferiore di una misura con segno*). Sia φ una misura con segno sulla σ-algebra $\mathcal{A}$.

Si chiama *variazione superiore* di φ la funzione di insieme $\varphi^+ : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ definita nel seguente modo:

$$\varphi^+(A) \; = \; \sup\big\{\, \varphi(B) \;:\; B \in \mathcal{A}\,,\; B \subseteq A \,\big\} \qquad\qquad \forall A \in \mathcal{A}\;.$$

Si chiama *variazione inferiore* di φ la funzione di insieme $\varphi^- : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ ottenuta ponendo

$$\varphi^-(A) \; = \; \sup\big\{ -\varphi(B) \;:\; B \in \mathcal{A}\,,\; B \subseteq A \,\big\} \qquad\qquad \forall A \in \mathcal{A}\;.$$

Osserviamo che, essendo $0 = \varphi(\emptyset) = -\varphi(\emptyset)$, ciascuno dei due sottoinsiemi di $\overline{\mathbb{R}}$

$$\big\{\, \varphi(B) \;:\; B \in \mathcal{A}\,,\; B \subseteq A \,\big\} \quad \text{e} \quad \big\{ -\varphi(B) \;:\; B \in \mathcal{A}\,,\; B \subseteq A \,\big\}$$

(considerati nella definizione di φ^+ e φ^-) contiene lo zero. Pertanto si ha la

Proposizione 11.2.1. *Le variazioni superiore e inferiore di una misura con segno assumono valori non negativi.*

Ha quindi senso porre la seguente definizione.

Definizione 11.2.2. (*Variazione totale*). Sia φ una misura con segno sulla σ-algebra $\mathcal{A}$.

Si chiama *variazione totale* di φ la funzione di insieme $\varphi^\pm : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ definita ponendo

$$\varphi^\pm \; = \; \varphi^+ + \varphi^- \quad .$$

Ovviamente anche la $\varphi^\pm$ è a valori non negativi.

Osservazione 11.2.1. È utile osservare esplicitamente che le variazioni superiore e inferiore di una misura con segno φ e quelle della sua opposta $-\varphi$ sono, evidentemente, legate dalle relazioni:

$$(-\varphi)^+ \; = \; \varphi^- \quad , \quad (-\varphi)^- \; = \; \varphi^+ \quad .$$

Lemma 11.2.1. (Finita sub-additività della variazione superiore). *Sia φ una misura con segno sulla σ-algebra $\mathcal{A}$.*

Risulta

$$\varphi^+(A_1 \cup A_2) \;\le\; \varphi^+(A_1) + \varphi^+(A_2) \qquad\qquad \forall A_1, A_2 \in \mathcal{A}\;.$$

Dimostrazione. Consideriamo un qualunque insieme $B \in \mathcal{A}$, $B \subseteq A_1 \cup A_2$. Possiamo esprimere B come unione,

$$B \;=\; (B \cap A_1) \cup (B \setminus A_1) \;\;,$$

di due insiemi appartenenti ad $\mathcal{A}$, disgiunti e tali che

$$B \cap A_1 \subseteq A_1 \quad , \quad B \setminus A_1 \subseteq A_2 \;;$$

pertanto, per la finita additività di φ e la definizione di φ^+, si ha

$$\varphi(B) \;=\; \varphi(B \cap A_1) + \varphi(B \setminus A_1) \;\leq\; \varphi^+(A_1) + \varphi^+(A_2) \;.$$

Per l'arbitrarietà di $B \in \mathcal{A}$, $B \subseteq A_1 \cup A_2$, ne segue che è

$$\varphi^+(A_1 \cup A_2) \;\leq\; \varphi^+(A_1) + \varphi^+(A_2) \;.$$

Lemma 11.2.2. *Sia φ una misura con segno sulla σ-algebra $\mathcal{A}$.*
Vale l'implicazione

$$A \in \mathcal{A} \;,\;\; \varphi(A) \;<\; +\infty \quad \Longrightarrow \quad \varphi^+(A) \;<\; +\infty \;\; . \tag{11.2.1}$$

Dimostrazione. Esaminiamo separatamente i due casi $\varphi(A) \in \mathbb{R}$ e $\varphi(A) = -\infty$.

Consideriamo dapprima il caso $\varphi(A) \in \mathbb{R}$. Ricordiamo che in questa eventualità si ha pure (Teorema 11.1.1, b))

$$\varphi(B) \in \mathbb{R} \qquad\qquad \forall B \in \mathcal{A},\; B \subseteq A \;. \tag{11.2.2}$$

Osserviamo, preliminarmente, che è vera la seguente Proposizione (*).

(*) *Se un insieme $A \in \mathcal{A}$ verifica le ipotesi $\varphi(A) \in \mathbb{R}$ e $\varphi^+(A) = +\infty$, allora esiste $A_1 \in \mathcal{A}$, $A_1 \subseteq A$, tale che*

$$|\varphi(A_1)| \;>\; 1 \quad , \quad \varphi^+(A \setminus A_1) \;=\; +\infty \;\; . \tag{11.2.3}$$

Proviamo la (*).

Poiché

$$\varphi^+(A) \;=\; \sup\big\{\, \varphi(B) \;:\; B \in \mathcal{A},\; B \subseteq A \,\big\} \;=\; +\infty \;\;,$$

è possibile trovare, in corrispondenza del numero $1 + |\varphi(A)|$, un insieme $B' \in \mathcal{A}$, $B' \subseteq A$, tale che

$$\varphi(B') \;>\; 1 + |\varphi(A)| \;\; .$$

Posto $B'' = A \setminus B'$, per la proprietà di sottrattività di φ si ha

$$|\varphi(B'')| \;=\; |\varphi(A) - \varphi(B')| \;\geq\; \varphi(B') - \varphi(A) \;\geq\; \varphi(B') - |\varphi(A)| \;>\; 1 \;\; .$$

Abbiamo così verificato l'esistenza di due insiemi disgiunti $B', B'' \in \mathcal{A}$, con $B' \cup B'' = A$, tali che

$$|\varphi(B')| \; > \; 1 \quad , \quad |\varphi(B'')| \; > \; 1 \quad .$$

Poiché $\varphi^+(A) = +\infty$, per il Lemma 11.2.1 almeno una delle due quantità $\varphi^+(B')$ e $\varphi^+(B'')$ è uguale a $+\infty$. A questo punto, per completare la dimostrazione della (*), basta prendere $A_1 = B''$ oppure $A_1 = B'$ a seconda che sia $\varphi^+(B') = +\infty$ oppure $\varphi^+(B') < +\infty$ (e quindi $\varphi^+(B'') = +\infty$).

Possiamo adesso dimostrare che la tesi del lemma è vera nel caso $\varphi(A) \in \mathbb{R}$. Supponiamo, per assurdo, che sia $\varphi^+(A) = +\infty$. Per la (*) esiste un insieme $A_1 \in \mathcal{A}$, $A_1 \subseteq A$, verificante le (11.2.3). Poiché $\varphi(A \setminus A_1) \in \mathbb{R}$ e $\varphi^+(A \setminus A_1) = +\infty$ possiamo applicare nuovamente la Proposizione (*) all'insieme $A \setminus A_1$. Ne segue l'esistenza di $A_2 \in \mathcal{A}$, $A_2 \subseteq A \setminus A_1$, tale che

$$|\varphi(A_2)| \; > \; 1 \quad , \quad \varphi^+\big(A \setminus (A_1 \cup A_2)\big) \; = \; +\infty \quad .$$

Per lo stesso motivo, dato che $\varphi\big(A \setminus (A_1 \cup A_2)\big) \in \mathbb{R}$ e $\varphi^+\big(A \setminus (A_1 \cup A_2)\big) = +\infty$, esiste $A_3 \in \mathcal{A}$, $A_3 \subseteq A \setminus (A_1 \cup A_2)$, tale che

$$|\varphi(A_3)| \; > \; 1 \quad , \quad \varphi^+\big(A \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3)\big) \; = \; +\infty \quad .$$

Procedendo per induzione si ottiene l'esistenza di una successione $\{A_n\}$ di insiemi appartenenti ad $\mathcal{A}$ tale che

$$A_1 \subseteq A \quad ,$$

$$A_n \; \subseteq \; A \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1}) \qquad \forall n \geq 2 \; , \tag{11.2.4}$$

$$|\varphi(A_n)| \; > \; 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N} \; , \tag{11.2.5}$$

$$\varphi^+\big(A \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_n)\big) = +\infty \qquad \forall n \in \mathbb{N} \; .$$

Consideriamo l'insieme

$$B \; = \; \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad .$$

Poiché, per la (11.2.4), gli insiemi A_n, $n \in \mathbb{N}$, sono a due a due disgiunti, si ha

$$\varphi(B) \; = \; \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n) \quad ;$$

d'altra parte, essendo $B \subseteq A$, la quantità $\varphi(B)$ appartiene a $\mathbb{R}$, dunque la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n)$$

è convergente in $\mathbb{R}$. Di conseguenza si ha

$$\lim_{n \to \infty} \varphi(A_n) \ = \ 0 \quad ,$$

ma ciò è in contraddizione con la (11.2.5).

Esaminiamo adesso il caso $\varphi(A) = -\infty$. Osserviamo dapprima che vale la seguente Proposizione (**).

(**) *Se un insieme* $A \in \mathcal{A}$ *verifica le ipotesi* $\varphi(A) = -\infty$ *e* $\varphi^+(A) = +\infty$, *allora esiste* $A_1 \in \mathcal{A}$, $A_1 \subseteq A$, *tale che*

$$\varphi(A_1) \ > \ 1 \quad , \quad \varphi(A \setminus A_1) \ = \ -\infty \quad , \quad \varphi^+(A \setminus A_1) \ = \ +\infty \quad . \tag{11.2.6}$$

Proviamo la (**).

Essendo $\varphi^+(A) = +\infty$, esiste $A_1 \in \mathcal{A}$, $A_1 \subseteq A$, tale che $\varphi(A_1) > 1$. Poiché il codominio di φ non contiene l'elemento $+\infty$ (dato che $\varphi(A) = -\infty$), siamo sicuri che $\varphi(A_1) \in \mathbb{R}$, pertanto, per la proprietà di sottrattività di φ si ha $\varphi(A \setminus A_1) = -\infty$. Osserviamo inoltre che, per quanto già dimostrato, da $\varphi(A) \in \mathbb{R}$ segue $\varphi^+(A) < +\infty$, quindi, per il Lemma 11.2.1, si ha pure $\varphi^+(A \setminus A_1) = +\infty$. Ciò prova la (**).

Possiamo adesso dimostrare che il lemma è vero anche nel caso $\varphi(A) = -\infty$. Supponiamo, per assurdo, che sia $\varphi^+(A) = +\infty$. Per la proposizione (**) esiste un insieme $A_1 \in \mathcal{A}$, $A_1 \subseteq A$, verificante le (11.2.6). Poiché $\varphi(A \setminus A_1) = -\infty$ e $\varphi^+(A \setminus A_1) = +\infty$, possiamo applicare la Proposizione (**) all'insieme $A \setminus A_1$; ne segue l'esistenza di un insieme $A_2 \in \mathcal{A}$, $A_2 \subseteq A \setminus A_1$, tale che

$$\varphi(A_2) \ > \ 1 \quad , \quad \varphi\big(A \setminus (A_1 \cup A_2)\big) \ = \ -\infty \quad , \quad \varphi^+\big(A \setminus (A_1 \cup A_2)\big) \ = \ +\infty \quad .$$

Analogamente, esiste $A_3 \in \mathcal{A}$, $A_3 \subseteq A \setminus (A_1 \cup A_2)$, tale che

$$\varphi(A_3) \ > \ 1 \quad , \quad \varphi\big(A \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3)\big) \ = \ -\infty \quad , \quad \varphi^+\big(A \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3)\big) \ = \ +\infty \quad .$$

Procedendo per induzione si ottiene l'esistenza di una successione $\{A_n\}$ di insiemi appartenenti ad $\mathcal{A}$ tale che

$$\begin{aligned} & A_1 \ \subseteq \ A \quad , & \\ & A_n \ \subseteq \ A \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1}) & \forall n \geq 2 \ , \\ & \varphi(A_n) \ > \ 1 & \forall n \in \mathbb{N} \ , \\ & \varphi\big(A \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_n)\big) \ = \ -\infty & \forall n \in \mathbb{N} \ , \\ & \varphi^+\big(A \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_n)\big) \ = \ +\infty & \forall n \in \mathbb{N} \ . \end{aligned} \tag{11.2.7}$$

A questo punto, essendo gli A_n, $n \in \mathbb{N}$, a due a due disgiunti, considerato l'insieme

$$B \ = \ \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad ,$$

per il postulato di σ-additività e la (11.2.7) si ha

$$\varphi(B) \ = \ \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n) \ > \ 1 \,+\, 1 + \,\ldots\, + \,1\, + \,\ldots \ = \ +\infty \quad ,$$

dunque $\varphi(B) = +\infty$, ma ciò è assurdo poiché $+\infty$ non fa parte del codominio di φ.

11.3. Il teorema della partizione di Hahn e le sue conseguenze.

Data una qualunque misura con segno φ, è sempre possibile dividere l'insieme ambiente Ω in due "zone", in ognuna delle quali la φ assume, rispettivamente, solo valori non negativi e solo valori non positivi.

Teorema 11.3.1. (Il teorema della partizione di Hahn). *Sia $\mathcal{A}$ una σ-algebra nell'insieme Ω e sia φ una misura con segno su $\mathcal{A}$.*

Esistono due insiemi $\Gamma^+, \Gamma^- \in \mathcal{A}$ tali che

$$\Gamma^+ \cap \Gamma^- \ = \ \emptyset \quad , \quad \Gamma^+ \cup \Gamma^- \ = \ \Omega \quad , \tag{11.3.1}$$

$$\varphi(B) \ \geq \ 0 \qquad \forall B \in \mathcal{A}\,,\, B \subseteq \Gamma^+ \ , \tag{11.3.2}$$

$$\varphi(C) \ \leq \ 0 \qquad \forall C \in \mathcal{A}\,,\, C \subseteq \Gamma^- \ . \tag{11.3.3}$$

Dimostrazione. Osserviamo che, se la tesi del teorema è vera per una data misura con segno φ (cioè esistono Γ^+, Γ^- verificanti le (11.3.1) - (11.3.3)), allora essa è vera pure per la misura con segno opposta $-\varphi$ (basta considerare la stessa coppia di insiemi Γ^+, Γ^-, a ruoli invertiti). In base a questa osservazione ci possiamo limitare, nella dimostrazione del teorema, a considerare il caso che il codominio di φ non contenga l'elemento $+\infty$.

Supponiamo quindi che sia $\varphi(\Omega) < +\infty$. Per il Lemma 11.2.2 si ha pure

$$\varphi^+(\Omega) \ = \ \sup_{B \in \mathcal{A}} \varphi(B) \ < \ +\infty$$

e quindi $\varphi^+(\Omega) \in \mathbb{R}$, dato che φ^+ è a valori non negativi. Per le proprietà dell'estremo superiore esiste allora, per ogni $n \in \mathbb{N}$, un insieme $A_n \in \mathcal{A}$ tale che

$$\varphi(A_n) \ > \ \varphi^+(\Omega) \,-\, \frac{1}{2^n} \tag{11.3.4}$$

(e quindi $\varphi(A_n) \in \mathbb{R}$).

Osserviamo che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha pure

$$\varphi(B) > -\frac{1}{2^n} \qquad \forall B \in \mathcal{A}\,,\ B \subseteq A_n\ , \tag{11.3.5}$$

$$\varphi(C) < \frac{1}{2^n} \qquad \forall C \in \mathcal{A}\,,\ C \subseteq A_n^{\mathrm{c}}\ . \tag{11.3.6}$$

Infatti, se $B \in \mathcal{A}$, $B \subseteq A_n$, si ha $\varphi(B) \in \mathbb{R}$ e quindi, per la definizione di φ^+, la proprietà di sottrattività di φ e la (11.3.4), risulta

$$\varphi^+(\Omega) \ \geq\ \varphi(A_n \setminus B) \ =\ \varphi(A_n) - \varphi(B) \ >\ \varphi^+(\Omega) - \frac{1}{2^n} - \varphi(B) \ ,$$

da cui segue la (11.3.5). Analogamente, se $C \in \mathcal{A}$, $C \subseteq A_n^{\mathrm{c}}$, usando la finita additività di φ invece della sottrattività, si ha

$$\varphi^+(\Omega) \ \geq\ \varphi(A_n \cup C) \ =\ \varphi(A_n) + \varphi(C) \ >\ \varphi^+(\Omega) - \frac{1}{2^n} + \varphi(C)$$

e quindi vale la (11.3.6).

A questo punto, per dimostrare il teorema, poniamo

$$\Gamma^+ \ =\ \lim_{n\to\infty}{}'' A_n \quad , \quad \Gamma^- \ =\ \left(\Gamma^+\right)^{\mathrm{c}} \ .$$

Ovviamente gli insiemi Γ^+ e Γ^-, così definiti, appartengono ad $\mathcal{A}$ e verificano le (11.3.1).

Proviamo che vale la (11.3.2).

Sia $B \in \mathcal{A}$, $B \subseteq \Gamma^+$. Poiché

$$\Gamma^+ \ =\ \lim_{n\to\infty}{}'' A_n \ =\ \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cup A_{n+1} \cup A_{n+2} \cup \ldots\right) \ ,$$

fissato un qualsiasi $k \in \mathbb{N}$, si ha

$$B \ \subseteq\ A_k \cup A_{k+1} \cup A_{k+2} \cup \ldots$$

e quindi è possibile esprimere B come unione,

$$B \ =\ B_k \cup B_{k+1} \cup B_{k+2} \cup \ldots \ ,$$

di una successione

$$B_k\,,\ B_{k+1}\,,\ B_{k+2}\,,\ \ldots$$

di insiemi appartenenti ad $\mathcal{A}$, a due a due disgiunti e tali che

$$B_k \subseteq A_k\ ,\quad B_{k+1} \subseteq A_{k+1}\ ,\quad B_{k+2} \subseteq A_{k+2}\ ,\quad \ldots \quad ;$$

per provare quest'ultima affermazione osserviamo che è

$$B \;=\; B \;\cap\; \Big(A_k \cup A_{k+1} \cup A_{k+2} \cup \ldots\Big) \;=$$

$$=\; B \;\cap\; \Big(A_k \cup \big(A_{k+1} \setminus A_k\big) \cup \big(A_{k+2} \setminus (A_k \cup A_{k+1})\big) \cup \ldots\Big) \;=$$

$$=\; \Big(B \cap A_k\Big) \cup \Big(B \cap \big(A_{k+1} \setminus A_k\big)\Big) \cup \Big(B \cap \big(A_{k+2} \setminus (A_k \cup A_{k+1})\big)\Big) \cup \ldots$$

e prendere

$$B_k \;=\; B \cap A_k \;,\; B_{k+1} \;=\; \Big(B \cap \big(A_{k+1} \setminus A_k\big)\Big) \;,\; B_{k+2} \;=\; \Big(B \cap \big(A_{k+2} \setminus (A_k \cup A_{k+1})\big)\Big) \;,\; \ldots \;.$$

Si ha allora, per la (11.3.5),

$$\varphi(B) \;=\; \varphi(B_k) + \varphi(B_{k+1}) + \varphi(B_{k+2}) + \ldots \;>\; -\frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{k+1}} - \frac{1}{2^{k+2}} - \ldots \;=\; -\frac{1}{2^{k-1}}$$

e quindi, per l'arbitrarietà di $k \in \mathbb{N}$, passando al limite per $k \to \infty$ nella precedente disuguaglianza, si ottiene

$$\varphi(B) \;\geq\; 0 \;\;.$$

Proviamo che vale la (11.3.3).
Sia $C \in \mathcal{A}$, $C \subseteq \Gamma^-$. Poiché

$$\Gamma^- \;=\; \big(\Gamma^+\big)^{\mathrm{c}} \;=\; \big(\lim_{n\to\infty}{}'' A_n\big)^{\mathrm{c}} \;=\; \lim_{n\to\infty}{}' A_n^{\mathrm{c}} \;\subseteq$$

$$\subseteq\; \lim_{n\to\infty}{}'' A_n^{\mathrm{c}} \;=\; \bigcap_{n=1}^{\infty} \big(A_n^{\mathrm{c}} \cup A_{n+1}^{\mathrm{c}} \cup A_{n+2}^{\mathrm{c}} \cup \ldots\big) \;\;,$$

fissato un qualsiasi $k \in \mathbb{N}$ si ha

$$C \;\subseteq\; A_k^{\mathrm{c}} \cup A_{k+1}^{\mathrm{c}} \cup A_{k+2}^{\mathrm{c}} \cup \ldots$$

e quindi è possibile esprimere C come unione,

$$C \;=\; C_k \cup C_{k+1} \cup C_{k+2} \cup \ldots \;\;,$$

di una successione

$$C_k \;,\; C_{k+1} \;,\; C_{k+2} \;,\; \ldots$$

di insiemi appartenenti ad $\mathcal{A}$, a due a due disgiunti e tali che

$$C_k \;\subseteq\; A_k^{\mathrm{c}} \;,\;\;\; C_{k+1} \;\subseteq\; A_{k+1}^{\mathrm{c}} \;,\;\;\; C_{k+2} \;\subseteq\; A_{k+2}^{\mathrm{c}} \;,\;\;\; \ldots \;\;.$$

Si ha allora, per la (11.3.6),

$$\varphi(C) \;=\; \varphi(C_k) + \varphi(C_{k+1}) + \varphi(C_{k+2}) + \ldots \;<\; \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+2}} + \ldots \;=\; \frac{1}{2^{k-1}}$$

e quindi, per l'arbitrarietà di $k \in \mathbb{N}$,

$$\varphi(C) \;\leq\; 0 \;\;.$$

Ciò completa la dimostrazione.

Data una misura con segno φ chiamiamo *partizione di Hahn* relativa a φ ogni coppia di insiemi $\Gamma^+, \Gamma^- \in \mathcal{A}$ verificanti le (11.3.1) - (11.3.3).

Osservazione 11.3.1. In generale, la partizione di Hahn relativa ad una data una misura con segno φ non è unica.

Ad esempio, se sulla σ-algebra $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ si considera la misura con segno

$$\varphi = \delta_1 - \delta_{-1}$$

(differenza di due delta di Dirac) è immediato constatare che le partizioni di Hahn relative a φ sono tutte e sole le (infinite) coppie di insiemi $\Gamma^+, \Gamma^- \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ tali che

$$\Gamma^+ \cap \Gamma^- \;=\; \emptyset \quad , \quad \Gamma^+ \cup \Gamma^- \;=\; \mathbb{R} \quad , \quad 1 \in \Gamma^+ \quad , \quad -1 \in \Gamma^- \;\;.$$

Possiamo adesso provare che, come abbiamo già anticipato nel n. 1, ogni misura con segno è la differenza di due misure.

Lemma 11.3.1. *Siano φ una misura con segno sulla σ-algebra $\mathcal{A}$ e Γ^+, Γ^- una qualsiasi partizione di Hahn relativa a φ.*

Allora ognuna delle due applicazioni $\mu_1, \mu_2 : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$, definite ponendo

$$\mu_1(A) \;=\; \varphi(A \cap \Gamma^+) \quad , \quad \mu_2(A) \;=\; -\varphi(A \cap \Gamma^-) \qquad \forall A \in \mathcal{A} \;, \tag{11.3.7}$$

è una misura su $\mathcal{A}$; almeno una di tali misure è finita e risulta

$$\varphi \;=\; \mu_1 - \mu_2 \;\;. \tag{11.3.8}$$

Dimostrazione. Poiché φ è una misura con segno su $\mathcal{A}$, cioè soddisfa i postulati MS_1) e MS_2, e valgono le (11.3.2) e (11.3.3), è immediato verificare che μ_1 e μ_2 sono misure su $\mathcal{A}$. Inoltre, per il Corollario 11.1.1, almeno una di tali misure è finita. Infine, usando la finita additività di φ, si ha che vale la (11.3.8).

È facile rendersi conto che la decomposizione (11.3.8) di una misura con segno φ come differenza di due misure, una delle quali finita, non è mai unica. Infatti, data la decomposizione (11.3.8), si può ottenere un'altra decomposizione dello stesso tipo, distinta dalla (11.3.8), scrivendo, ad esempio,

$$\varphi \;=\; (\mu_1 + \delta_a) \;-\; (\mu_2 + \delta_a) \quad ,$$

dove a è un qualunque punto dell'insieme Ω (l'ambiente della σ-algebra $\mathcal{A}$ su cui è definita la φ) e δ_a indica la restrizione alla σ-algebra $\mathcal{A}$ della delta di Dirac concentrata in a.

La particolare decomposizione che si ottiene mediante le (11.3.7) ha però una proprietà che la distingue dalle altre. Si ha infatti il

Lemma 11.3.2. *Sia φ una misura con segno sulla σ-algebra $\mathcal{A}$. Siano, inoltre, Γ^+, Γ^- una partizione di Hahn relativa a φ e μ_1, μ_2 le due misure su $\mathcal{A}$ definite tramite le* (11.3.7).

Si ha allora

$$\mu_1 \;=\; \varphi^+ \quad , \quad \mu_2 \;=\; \varphi^- \quad . \tag{11.3.9}$$

Dimostrazione. Consideriamo un qualunque insieme $A \in \mathcal{A}$. Per la definizione di φ^+ si ha

$$\varphi^+(A) \;\geq\; \varphi(A \cap \Gamma^+) \;=\; \mu_1(A) \quad .$$

D'altra parte, per ogni $B \in \mathcal{A}$, $B \subseteq A$, per la (11.3.8) e la monotonia di μ_1, si ha

$$\varphi(B) \;=\; \mu_1(B) \,-\, \mu_2(B) \;\leq\; \mu_1(B) \;\leq\; \mu_1(A) \quad ;$$

quindi, per l'arbitrarietà di $B \in \mathcal{A}$, $B \subseteq A$, si ha pure

$$\varphi^+(A) \;\leq\; \mu_1(A) \quad .$$

Abbiamo così provato la prima delle (11.3.9). In maniera del tutto analoga si prova che $\mu_2 = \varphi^-$.

Dai Lemmi 11.3.1 e 11.3.2 discende ovviamente il

Teorema 11.3.2. (Teorema di decomposizione di Jordan). *Sia φ una misura con segno sulla σ-algebra $\mathcal{A}$.*

Le due variazioni φ^+ e φ^- sono entrambe misure su $\mathcal{A}$, almeno una di esse è finita e risulta

$$\varphi \;=\; \varphi^+ \,-\, \varphi^- \quad . \tag{11.3.10}$$

Proviamo adesso che, fra tutte le decomposizioni del tipo (11.3.8) di una misura con segno φ, quella di Jordan, cioè la (11.3.10), è l'unica avente l'ulteriore proprietà che le due misure μ_1, μ_2 siano "mutuamente singolari".

Definizione 11.3.1. (*Misure mutuamente singolari*). Due misure μ_1, μ_2, definite sulla stessa σ-algebra $\mathcal{A}$ (nell'insieme Ω), si dicono *mutuamente singolari* se esistono due insiemi $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ tali che

$$
\begin{aligned}
&A_1 \cap A_2 \;=\; \emptyset \quad , \quad A_1 \cup A_2 \;=\; \Omega \;, \\
&\mu_1(A_2) \;=\; 0 \quad , \quad \mu_2(A_1) \;=\; 0 \;.
\end{aligned}
\tag{11.3.11}
$$

Proposizione 11.3.1. *La decomposizione di Jordan* (11.3.10) *di una misura con segno φ è l'unica decomposizione di φ del tipo* (11.3.8) *nella quale le misure μ_1 e μ_2 sono mutuamente singolari.*

Dimostrazione. Occorre dimostrare due fatti:

1) *le variazioni φ^+, φ^- sono misure mutuamente singolari*;

2) *se vale la* (11.3.8) *e μ_1, μ_2 sono misure mutuamente singolari, allora valgono pure le* (11.3.9).

Per provare l'affermazione 1) osserviamo che, per la (11.3.3), si ha

$$\varphi^+(\Gamma^-) \;=\; \sup\{\varphi(C) \;:\; C \in \mathcal{A}\,,\; C \subseteq \Gamma^-\} \;\leq\; 0$$

e quindi $\varphi^+(\Gamma^-) = 0$;, analogamente, per la (11.3.2), risulta

$$\varphi^-(\Gamma^+) \;=\; \sup\{\,-\varphi(B) \;:\; B \in \mathcal{A}\,,\; B \subseteq \Gamma^+\} \;\leq\; 0$$

e quindi $\varphi^-(\Gamma^+) = 0$; pertanto le due misure φ^+ e φ^- sono mutuamente singolari ($A_1 = \Gamma^+$, $A_2 = \Gamma^-$).

Proviamo la 2). Osserviamo che, se $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ sono due insiemi verificanti le (11.3.11), allora la coppia A_1, A_2 è una partizione di Hahn relativa a φ; infatti, per la monotonia di μ_2, si ha

$$\mu_2(B) \;=\; 0 \qquad \forall B \in \mathcal{A}, B \subseteq A_1 \tag{11.3.12}$$

e quindi

$$\varphi(B) \;=\; \mu_1(B) \,-\, \mu_2(B) \;=\; \mu_1(B) \;\geq\; 0 \qquad \forall B \in \mathcal{A}, B \subseteq A_1 \;; \tag{11.3.13}$$

analogamente si ha

$$\mu_1(C) \;=\; 0 \qquad \forall C \in \mathcal{A}, C \subseteq A_2 \tag{11.3.14}$$

e quindi

$$\varphi(C) \;=\; \mu_1(C) \,-\, \mu_2(C) \;=\; -\mu_2(C) \;\leq\; 0 \qquad \forall C \in \mathcal{A}, C \subseteq A_2 \;. \tag{11.3.15}$$

Di conseguenza, per il Lemma 11.3.2, tenendo presenti la (11.3.13) e la (11.3.14), per ogni $A \in \mathcal{A}$ risulta

$$\varphi^+(A) \;=\; \varphi(A \cap A_1) \;=\; \mu_1(A \cap A_1) \;=\; \mu_1(A \cap A_1) \,+\, \mu_1(A \setminus A_1) \;=\; \mu_1(A) \;\;,$$

cioè si ha $\varphi^+ = \mu_1$. In maniera del tutto analoga si prova che è pure $\varphi^- = \mu_2$.

Una volta acquisito il fatto che ogni misura con segno è la differenza di due misure, è facile estendere alle misure con segno altre proprietà di cui godono le misure, oltre alla finita additività ed alla sottrattività. Precisamente, si ha il seguente teorema, di ovvia dimostrazione.

Teorema 11.3.3. (Altre proprietà delle misure con segno). *Sia φ una misura con segno sulla σ-algebra $\mathcal{A}$. Valgono le seguenti proprietà.*

d) (Modularità). *Siano $A, B \in \mathcal{A}$. Allora*

$$\varphi(A \cup B) + \varphi(A \cap B) = \varphi(A) + \varphi(B) \;.$$

e) (Continuità verso l'alto). *Per ogni successione $\{A_n\}$ di insiemi appartenenti ad $\mathcal{A}$, tale che $A_n \uparrow A$, risulta*

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(A_n) = \varphi(A) \;.$$

c) (Continuità verso il basso). *Per ogni successione $\{B_n\}$ di insiemi appartenenti ad $\mathcal{A}$, con $\varphi(B_1) \in \mathbb{R}$, tale che $B_n \downarrow B$, risulta*

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(B_n) = \varphi(B) \;.$$