10. Insiemi non misurabili secondo Lebesgue.

Lo scopo principale di questo capitolo è quello di far vedere che esistono sottoinsiemi di $\mathbb{R}^h$ che non sono misurabili secondo Lebesgue.

La costruzione di insiemi non misurabili secondo Lebesgue, illustrata nel Teorema 10.1.1 e dovuta al matematico italiano G. Vitali (1905), utilizza in maniera decisiva l'assioma della scelta e mostra, in realtà, un risultato più forte (Teorema 10.1.2), dal quale discende, in particolare, l'impossibilità di prolungare la misura di Lebesgue m_h alla σ-algebra di tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^h$ conservando la proprietà di invarianza per traslazioni.

Una volta acquisita l'esistenza di insiemi non misurabili secondo Lebesgue, è abbastanza agevole dimostrare che per $h \geq 2$ risulta $\mathcal{B}_h \underset{\neq}{\subset} \mathcal{L}_h$ (Proposizione 10.1.1). Per provare che ciò è vero anche nel caso $h = 1$, oltre all'esistenza di di sottoinsiemi $\mathbb{R}$ non misurabili secondo Lebesgue occorre fare uso di altri due sofisticati strumenti: l'insieme di Cantor e la funzione singolare di Lebesgue, che vengono presentati e studiati nel n. 10.2.

10.1. Esistenza di insiemi non misurabili secondo Lebesgue.

Teorema 10.1.1. (Esempio di Vitali). *Ogni insieme $E \in \mathcal{L}_h$ con $\mathrm{m}_h(E) > 0$ contiene un insieme G tale che $G \notin \mathcal{L}_h$.*

Dimostrazione. L'ipotesi $\mathrm{m}_h(E) > 0$ implica l'esistenza di un intervallo $I \in \mathcal{I}_h$ tale che $\mathrm{m}_h(E \cap I) > 0$. Possiamo pertanto supporre, nella dimostrazione del teorema, che l'insieme E sia limitato.

Fissiamo un numero $\sigma > 0$ in modo che sia

$$E \subseteq [-\sigma, \sigma]^h$$

e consideriamo la relazione binaria $\sim$ in E definita nel modo seguente:

$$x \sim y \quad \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \quad x - y \in \mathbb{Q}^h \ .$$

È facile verificare che la relazione $\sim$ è una relazione di equivalenza nell'insieme E. Indichiamo con $\mathcal{F}$ l'insieme quoziente $E/_\sim$. Per l'assioma della scelta esiste un'applicazione

$$F \to x_F \ ,$$

da $\mathcal{F}$ in E, tale che $x_F \in F$ per ogni $F \in \mathcal{F}$; indichiamo con G il codominio di tale applicazione (in altre parole, l'insieme

$$G = \{x_F : F \in \mathcal{F}\}$$

viene costruito scegliendo un elemento x_F, ed uno solo, da ciascuna delle classi di equivalenza $F \in \mathcal{F}$).

Dimostriamo che l'insieme G non è misurabile secondo Lebesgue. Supponiamo, per assurdo, che sia $G \in \mathcal{L}_h$; per il Teorema 9.3.2 si ha

$$G + a \in \mathcal{L}_h \quad , \quad \mathrm{m}_h(G+a) \;=\; \mathrm{m}_h(G) \qquad\qquad \forall a \in \mathbb{R}^h \ .$$

Fissiamo una bigezione $n \to a_n$ tra $\mathbb{N}$ e l'insieme numerabile $[-2\sigma, 2\sigma]^h \cap \mathbb{Q}^h$ ed osserviamo che è

$$\big(G + a_n\big) \cap \big(G + a_{n'}\big) = \emptyset \qquad\qquad \forall n, n' \in \mathbb{N},\ n \neq n' \ ;$$

infatti, dati $n, n' \in \mathbb{N}$, se vi è un elemento x appartenente all'intersezione

$$\big(G + a_n\big) \cap \big(G + a_{n'}\big) \ ,$$

esistono $F, F' \in \mathcal{F}$ tali che

$$x_{_F} \ + \ a_n \ = \ x \ = \ x_{_{F'}} \ + \ a_{n'}$$

e quindi

$$x_{_F} \ - \ x_{_{F'}} \ = \ a_{n'} - a_n \ \in \ \mathbb{Q}^h,$$

da cui

$$x_{_F} \ \sim \ x_{_{F'}} \ ;$$

di conseguenza (dato che da ogni classe di equivalenza F abbiamo scelto un solo elemento $x_{_F}$) si ha

$$x_{_F} \ = \ x_{_{F'}}$$

e quindi

$$a_n = a_{n'} \ ,$$

cioè $n = n'$.

Consideriamo l'insieme

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \big(G + a_n\big) \ ;$$

si ha

$$\mathrm{m}_h\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} \big(G + a_n\big)\Big) \ = \ \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{m}_h\big(G + a_n\big) \ = \ \mathrm{m}_h(G) + \mathrm{m}_h(G) + \ldots + \mathrm{m}_h(G) + \ldots$$

e quindi vi sono due possibilità:

$$1) \quad \mathrm{m}_h\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} \big(G + a_n\big)\Big) \ = \ 0 \qquad (\text{se } \mathrm{m}_h(G) = 0),$$

oppure

2) $\quad \mathrm{m}_h\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}\big(G+a_n\big)\Big) \;=\; +\infty \qquad (\text{se } \mathrm{m}_h(G)>0).$

La seconda possibilità è però esclusa dal fatto che $\bigcup_{n=1}^{\infty}\big(G+a_n\big)$ è un insieme limitato; si ha infatti

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\big(G+a_n\big) \;\subseteq\; [-3\sigma,3\sigma]^h$$

(se y appartiene a qualcuno degli insiemi $G+a_n$, allora y è somma di un elemento di $G\subseteq E\subseteq[\sigma,\sigma]^h$ e di un elemento di $[-2\sigma,2\sigma]^h$, dunque y appartiene a $[-3\sigma,3\sigma]^h$).

Osserviamo che si ha pure

$$E \;\subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}\big(G+a_n\big)\;; \tag{10.1.1}$$

(infatti, se $x\in E$ esiste $F\in\mathcal{F}$ tale che $x\in F$ e quindi $x-x_{F}\in\mathbb{Q}^h$; poichè x e x_F sono entrambi elementi di $[-\sigma,\sigma]$ ne viene che $x-x_F\in[-2\sigma,2\sigma]^h$, dunque $x-x_F\in[-2\sigma,2\sigma]^h\cap\mathbb{Q}^h$, pertanto esiste $\overline{n}\in\mathbb{N}$ tale che $x-x_F=a_{\overline{n}}$, da cui si ricava che $x\in G+a_{\overline{n}}$). Poiché $\mathrm{m}_h\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}\big(G+a_n\big)\Big) \;=\; 0$, la (10.1.1) comporta che $\mathrm{m}_h(E)=0$, ma ciò contraddice le ipotesi.

Osserviamo che il ragionamento utilizzato per dimostrare l'esistenza di insiemi non misurabili secondo Lebesgue consente, in realtà, di provare un risultato più forte. Precisamente, si ha il seguente teorema.

Teorema 10.1.2. *La misura identicamente nulla è l'unica misura definita sulla σ-algebra $\mathcal{P}(\mathbb{R}^h)$ che è invariante per traslazioni ed assume valore finito su ogni insieme limitato.*

Dimostrazione. Supponiamo che μ sia una misura definita su $\mathcal{P}(\mathbb{R}^h)$, invariante per traslazioni, cioè

$$\mu(A+a) \;=\; \mu(A)$$

per ogni $A\subseteq\mathbb{R}^h$ ed ogni $a\in\mathbb{R}^h$, e tale inoltre che

$$\mu(E) \;<\; +\infty$$

per ogni insieme limitato $E\subseteq\mathbb{R}^h$. Dimostriamo che risulta

$$\mu(A) \;=\; 0 \qquad\qquad \forall A\in\mathcal{P}(\mathbb{R}^h)\ .$$

Per la proprietà di continuità verso l'alto si ha

$$\mu(A) \;=\; \lim_{n\to\infty}\mu(A\cap[-n,n]^h) \qquad\qquad \forall A\in\mathcal{P}(\mathbb{R}^h)\ ,$$

pertanto è sufficiente provare che μ assume valore zero su ogni insieme limitato $E\subseteq\mathbb{R}^h$.

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^h$ un insieme limitato.

Introduciamo in E la relazione di equivalenza $\sim$ e costruiamo, a partire da questa, l'insieme G esattamente come abbiamo fatto nel corso della dimostrazione del Teorema 10.1.1. Fissato $\sigma > 0$ in modo che $E \subseteq [-\sigma, \sigma]^h$ e denotata con $n \to a_n$ una bigezione tra $\mathbb{N}$ e $[-2\sigma, 2\sigma]^h \cap \mathbb{Q}^h$, si ha allora, come nella dimostrazione del Teorema 10.1.1,

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}(G + a_n)\Big) = \mu(G) + \mu(G) + \ldots + \mu(G) + \ldots \tag{10.1.2}$$

e

$$E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}(G + a_n) . \tag{10.1.3}$$

Poiché

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}(G + a_n)$$

è un insieme limitato (è contenuto in $[-3\sigma, 3\sigma]^h$), la (10.1.2) implica che

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}(G + a_n)\Big) = 0 ;$$

di conseguenza, per la (10.1.3), si ha pure $\mu(E) = 0$.

Il Teorema 10.1.2 ammette, in particolare, il seguente corollario.

Corollario 10.1.1. *Non esiste alcuna misura definita sulla σ-algebra $\mathcal{P}(\mathbb{R}^h)$ la quale sia invariante per traslazioni e prolunghi la misura di Lebesgue.*

Una volta acquisita l'esistenza di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^h$ non misurabili secondo Lebesgue è abbastanza facile provare che, per $h \geq 2$, risulta $\mathcal{B}_h \underset{\neq}{\subset} \mathcal{L}_h$.

Proposizione 10.1.1. *Per ogni $h \geq 2$ si ha $\mathcal{B}_h \underset{\neq}{\subset} \mathcal{L}_h$.*

Dimostrazione. Supposto $h \geq 2$, fissiamo un insieme $G \subseteq \mathbb{R}^{h-1}$ tale che $G \notin \mathcal{L}_{h-1}$ e consideriamo il seguente sottoinsieme di $\mathbb{R}^h$:

$$H = \{(x_1, \ldots, x_{h-1}, x_h) \in \mathbb{R}^h : (x_1, \ldots, x_{h-1}) \in G , \, x_h = 0\} .$$

Poiché l'insieme

$$L = \{(x_1, \ldots, x_{h-1}, x_h) \in \mathbb{R}^h : x_h = 0\}$$

è misurabile secondo Lebesgue ed ha misura zero (cfr. l'Esempio 2.4.1, c)), per la completezza di $(\mathbb{R}^h, \mathcal{L}_h, \mathrm{m}_h)$ anche H appartiene a $\mathcal{L}_h$.

Proviamo che $H \notin \mathcal{B}_h$. Supponiamo, per assurdo, che sia $H \in \mathcal{L}_h$ e consideriamo l'applicazione $T : \mathbb{R}^{h-1} \to \mathbb{R}^h$ definita mediante la posizione

$$T(x_1, \ldots, x_{h-1}) \;=\; (x_1, \ldots, x_{h-1}, 0) \qquad\qquad \forall (x_1, \ldots, x_{h-1}) \in \mathbb{R}^{h-1} \; .$$

L'applicazione T è continua (è un'isometria) e quindi è $\mathcal{B}_{h-1} - \mathcal{B}_h$-misurabile. Ne segue che l'insieme

$$T^{-1}(H) \; ,$$

cioè l'insieme G, appartiene a $\mathcal{B}_{h-1}$, ma ciò è assurdo.

10.2. L'insieme di Cantor.

Allo scopo di dimostrare che pure nel caso $h = 1$ risulta $\mathcal{B}_1 \subsetneq \mathcal{L}_1$ introduciamo adesso due notevoli oggetti: l'*insieme di Cantor* e la *funzione singolare di Lebesgue* (detta anche "funzione a scala"), che sono molto importanti – soprattutto l'insieme di Cantor – anche per varie altre questioni di Analisi matematica e Topologia.

Notazioni. Indichiamo con P l'insieme di tutti i numeri razionali del tipo $\frac{m}{2^k}$, con $m, k \in \mathbb{N}$ e $m \leq 2^n - 1$.

Osserviamo che, posto

$$P_k \;=\; \left\{ \tfrac{m}{2^k} \;:\; m = 1, \ldots, 2^k - 1 \right\} \qquad\qquad \forall k \in \mathbb{N} \; ,$$

risulta

$$P_k \uparrow P \; .$$

Infatti è ovvio che

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} P_k \;=\; P \; ;$$

d'altra parte, l'inclusione $P_k \subseteq P_{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$, segue subito dall'osservazione che, se $\frac{m}{2^k}$ è un qualunque elemento di P_k (quindi $m \leq 2^k - 1$), possiamo scrivere

$$\frac{m}{2^k} \;=\; \frac{2m}{2^{k+1}}$$

ed è

$$2m \;\leq\; 2 \cdot 2^k - 2 \;<\; 2^{k+1} - 1 \; ,$$

pertanto $\frac{m}{2^k}$ appartiene pure a P_{k+1}.

Indichiamo inoltre con $\mathcal{I}$ la famiglia di tutti gli intervalli aperti non vuoti di $\mathbb{R}$ contenuti nell'intervallo chiuso $[0, 1]$.

Teorema 10.2.1. *Esiste una ed una sola applicazione*

$$\mathrm{I} \, : \, P \to \, \mathcal{I}$$

verificante le seguenti due condizioni:

1) $\quad p, q \in P \, , \; p < q \implies \sup \mathrm{I}(p) < \inf \mathrm{I}(q)$;

2) $\quad$ *per ogni $k \in \mathbb{N}$ l'insieme*

$$[0,1] \; \setminus \; \bigcup_{p \in P_k} \mathrm{I}(p)$$

è l'unione di 2^k intervalli chiusi, a due a due disgiunti, ciascuno dei quali ha misura uguale a $\left(\frac{1}{3}\right)^k$.

Dimostriamo dapprima un lemma.

Lemma 10.2.1. *Per ogni $k \in \mathbb{N}$ è vera la seguente* Proposizione $10.2.1_k$.

Proposizione $\mathbf{10.2.1}_k$. *Esiste una ed una sola applicazione*

$$\mathrm{I}^{(k)} \, : \, P_k \to \, \mathcal{I}$$

verificante le condizioni:

$1)_k \quad p, q \in P_k \, , \; p < q \implies \sup \mathrm{I}^{(k)}(p) < \inf \mathrm{I}^{(k)}(q)$;

$2)_k \quad$ *per ogni $h = 1, \ldots, k$ l'insieme*

$$[0,1] \; \setminus \; \bigcup_{p \in P_h} \mathrm{I}^{(k)}(p)$$

è l'unione di 2^h intervalli chiusi, a due a due disgiunti, ciascuno dei quali ha misura uguale a $\left(\frac{1}{3}\right)^h$.

Dimostrazione del Lemma 10.2.1. Procederemo per induzione su k.

Preliminarmente osserviamo che, supposta vera la Proposizione $10.2.1_k$, se

$$\mathrm{I}^* \, : \, P_{k+1} \to \, \mathcal{I}$$

è una qualunque applicazione verificante le condizioni $1)_{k+1}$ e $2)_{k+1}$, allora la restrizione

$$\mathrm{I}^*|_{P_k}$$

verifica $1)_k$ e $2)_k$ e pertanto, per l'unicità di $\mathrm{I}^{(k)}$, si ha

$$\mathrm{I}^*|_{P_k} \; = \; \mathrm{I}^{(k)} \; .$$

Dimostriamo adesso che è vera la Proposizione $10.2.1_1$. L'insieme P_1 ha un solo elemento:

$$P_1 \;=\; \{\tfrac{1}{2}\}\;.$$

Occorre quindi provare che vi è una ed una sola scelta dell'intervallo $\mathrm{I}^{(1)}(\frac{1}{2}) \in \mathcal{I}$ tale che siano verificate la $1)_1$ e la $2)_1$. Ovviamente la $1)_1$ è verificata comunque si scelga $\mathrm{I}^{(1)}(\frac{1}{2})$; invece, per quanto riguarda la $2)_1$, una breve riflessione mostra che, affinché tale condizione sia verificata, è necessario e sufficiente che sia

$$\mathrm{I}^{(1)}(\tfrac{1}{2}) \;= \left]\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\right[$$

(cioè $\mathrm{I}^{(1)}(\frac{1}{2})$ sia l'intervallo che si ottiene trisecando l'intervallo $[0,1]$ e prendendo l'intervallo centrale aperto). Ciò completa la dimostrazione della Proposizione $10.2.1_1$.

A questo punto, per completare la dimostrazione del lemma, basterebbe provare soltanto che se è vera la Proposizione $10.2.1_k$ è vera anche la Proposizione $10.2.1_{k+1}$. Tuttavia, allo scopo di aiutare il lettore a comprendere meglio la prova dell'implicazione

$$\text{Proposizione } 10.2.1_k \quad\Longrightarrow\quad \text{Proposizione } 10.2.1_{k+1}$$

in generale, preferiamo mostrare dapprima come, in particolare, dalla Proposizione $10.2.1_1$ si deduca la Proposizione $10.2.1_2$ e da quest'ultima segua la Proposizione $10.2.1_3$. Ciò è di aiuto anche per capire qualcosa in più della struttura dell'insieme di Cantor.

Dimostriamo che vale la Proposizione $10.2.1_2$. Si ha

$$P_2 \;=\; \{\tfrac{1}{4}, \tfrac{2}{4}, \tfrac{3}{4}\} \;=\; P_1 \cup \{\tfrac{1}{4}, \tfrac{3}{4}\}\;;$$

inoltre, per la Proposizione $10.2.1_1$, l'insieme

$$[0,1] \;\setminus\; \bigcup_{p\in P_1} \mathrm{I}^{(1)}(p) \;=\; [0,1] \;\setminus\; \mathrm{I}^{(1)}(\tfrac{1}{2})$$

è l'unione di due intervalli chiusi (che sono $[0, \frac{1}{3}]$ e $[\frac{2}{3}, 1]$), disgiunti ed aventi ognuno misura uguale a $\frac{1}{3}$; per comodità di esposizione denotiamo con $\mathrm{J}_1^{(1)}$ e $\mathrm{J}_2^{(1)}$ tali intervalli, supponendo che sia

$$\sup \mathrm{J}_1^{(1)} \;<\; \inf \mathrm{J}_2^{(1)}\;.$$

Per l'osservazione fatta inizialmente deve essere necessariamente

$$\mathrm{I}^{(2)}(\tfrac{1}{2}) \;=\; \mathrm{I}^{(1)}(\tfrac{1}{2})\;,$$

pertanto bisogna definire soltanto gli intervalli $\mathrm{I}^{(2)}(\frac{1}{4})$ e $\mathrm{I}^{(2)}(\frac{3}{4})$. È evidente che, affinché valga la $1)_2$, è necessario e sufficiente che sia

$$\mathrm{I}^{(2)}(\tfrac{1}{4}) \;\subseteq\; \mathrm{J}_1^{(1)} \quad,\quad \mathrm{I}^{(2)}(\tfrac{3}{4}) \;\subseteq\; \mathrm{J}_2^{(1)}\;;$$

ma, affinché sia soddisfatta anche la $2)_2$, è chiaro che l'unica scelta possibile degli intervalli $\mathrm{I}^{(2)}(\frac{1}{4})$ e $\mathrm{I}^{(2)}(\frac{3}{4})$ è la seguente: $\mathrm{I}^{(2)}(\frac{1}{4})$ [risp. $\mathrm{I}^{(2)}(\frac{3}{4})$] è l'intervallo che si ottiene trisecando $\mathrm{J}_1^{(1)}$ [risp. $\mathrm{J}_2^{(1)}$] e prendendo l'intervallo centrale aperto. Ciò completa la dimostrazione della Proposizione $10.2.1_2$.

Dimostriamo adesso che vale la Proposizione $10.2.1_3$. Si ha

$$P_3 \;=\; \{\tfrac{1}{8}, \tfrac{2}{8}, \tfrac{3}{8}, \ldots, \tfrac{7}{8}\} \;=\; \{\tfrac{2}{8}, \tfrac{4}{8}, \tfrac{6}{8}\} \cup \{\tfrac{1}{8}, \tfrac{3}{8}, \tfrac{5}{8}, \tfrac{7}{8}\} \;=\; P_2 \cup \{\tfrac{1}{8}, \tfrac{3}{8}, \tfrac{5}{8}, \tfrac{7}{8}\}\;;$$

pertanto, dovendo essere, per l'osservazione iniziale,

$$\mathrm{I}^{(3)}(p) \;=\; \mathrm{I}^{(2)}(p) \qquad\qquad \forall p \in P_2\;,$$

bisogna definire soltanto gli intervalli

$$\mathrm{I}^{(3)}(\tfrac{m}{8})\;, \qquad\qquad m = 1,3,5,7\,,$$

cioè

$$\mathrm{I}^{(3)}(\tfrac{2i-1}{8})\;, \qquad\qquad i = 1,2,3,4\,.$$

Per la Proposizione $10.2.1_2$ l'insieme

$$[0,1] \;\setminus\; \bigcup_{p\in P_2} \mathrm{I}^{(2)}(p)$$

è l'unione di 4 intervalli chiusi, a due a due disgiunti, ognuno di misura uguale a $\frac{1}{9}$; indichiamo tali intervalli con

$$\mathrm{J}_i^{(2)}\;, \qquad\qquad i = 1,2,3,4\,,$$

supponendo che sia

$$\sup \mathrm{J}_i^{(2)} \;<\; \inf \mathrm{J}_{i+1}^{(2)}\;, \qquad\qquad i = 1,2,3\,.$$

A questo punto è facile convincersi che, affinché valgano la $1)_3$ e la $2)_3$, è necessario e sufficiente che gli intervalli $\mathrm{I}^{(3)}(\frac{2i-1}{8})$ siano quelli ottenuti nel seguente modo: per ogni $i = 1,2,3,4$ l'intervallo $\mathrm{I}^{(3)}(\frac{2i-1}{8})$ si trova trisecando $\mathrm{J}_i^{(2)}$ e prendendo l'intervallo centrale aperto.

Dimostriamo infine che, se è vera la Proposizione $10.2.1_k$, allora è vera pure la Proposizione $10.2.1_{k+1}$.

Si ha

$$P_{k+1} \;=\; \{\tfrac{1}{2^{k+1}}, \tfrac{2}{2^{k+1}}, \tfrac{3}{2^{k+1}}, \ldots, \tfrac{2^{k+1}-1}{2^{k+1}}\} \;=$$

$$=\; \{\tfrac{2}{2^{k+1}}, \ldots, \tfrac{2^{k+1}-2}{2^{k+1}}\} \cup \{\tfrac{1}{2^{k+1}}, \tfrac{3}{2^{k+1}}, \ldots, \tfrac{2^{k+1}-1}{2^{k+1}}\} \;=\; P_k \cup \{\tfrac{1}{2^{k+1}}, \tfrac{3}{2^{k+1}}, \ldots, \tfrac{2^{k+1}-1}{2^{k+1}}\}\;,$$

pertanto, dato che, per l'osservazione iniziale, deve essere

$$\mathrm{I}^{(k+1)}(p) \;=\; \mathrm{I}^{(k)}(p) \qquad\qquad \forall p \in P_k \;,$$

cioè

$$\mathrm{I}^{(k+1)}(\tfrac{2i}{2^{k+1}}) \;=\; \mathrm{I}^{(k)}(\tfrac{i}{2^k}) \qquad\qquad \forall i = 1, \ldots, 2^k - 1\,,$$

occorre definire soltanto gli intervalli

$$\mathrm{I}^{(k+1)}(\tfrac{2i-1}{2^{k+1}})\;, \qquad\qquad i = 1, 2, \ldots, 2^k\,.$$

Per l'ipotesi induttiva l'insieme

$$[0,1] \;\setminus\; \bigcup_{p \in P_k} \mathrm{I}^{(k)}(p) \;=\; [0,1] \;\setminus\; \bigcup_{i=1}^{2^k-1} \mathrm{I}^{(k+1)}(\tfrac{2i}{2^{k+1}})$$

è l'unione di 2^k intervalli chiusi, a due a due disgiunti, ognuno di misura uguale a $\frac{1}{3^k}$, che indichiamo con

$$\mathrm{J}_i^{(k)}\;, \qquad\qquad i = 1, \ldots, 2^k\,,$$

supponendo, al solito, che sia

$$\sup \mathrm{J}_i^{(k)} \;<\; \inf \mathrm{J}_{i+1}^{(k)}\;, \qquad\qquad i = 1, \ldots, 2^k - 1\,.$$

A questo punto, tenendo presente che, per ogni $i = 1, \ldots, 2^k - 1$, si ha

$$\sup \mathrm{J}_i^{(k)} \;=\; \inf \mathrm{I}^{(k+1)}(\tfrac{2i}{2^{k+1}}) \quad , \quad \sup \mathrm{I}^{(k+1)}(\tfrac{2i}{2^{k+1}}) \;=\; \inf \mathrm{J}_{i+1}^{(k)}\;,$$

è chiaro che, affinché valgano la $1)_{k+1}$ e la $2)_{k+1}$, è necessario e sufficiente che, per ogni $i = 1, \ldots, 2^k$, l'intervallo $\mathrm{I}^{(k+1)}(\frac{2i-1}{2^k})$ sia quello che si ottiene trisecando l'intervallo $\mathrm{J}_i^{(k)}$ e prendendo l'intervallo centrale aperto.

Dimostrazione del Teorema 10.2.1. Osserviamo come prima cosa che per ogni $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$, $k_1 < k_2$, la restrizione dell'applicazione $\mathrm{I}^{(k_2)}$ all'insieme P_{k_1} verifica le condizioni $1)_{k_1}$ e $2)_{k_1}$ e pertanto coincide con l'applicazione $\mathrm{I}^{(k_1)}$ (per l'unicità di quest'ultima). Ne segue che ha perfettamente senso definire un'applicazione $\mathrm{I} : P \to \mathcal{I}$ mediante la regola:

$$\mathrm{I}(p) \;=\; \mathrm{I}^{(k)}(p) \qquad\qquad \forall p \in P_k\,, \forall k \in \mathbb{N}\;. \tag{10.2.1}$$

È inoltre evidente che tale applicazione verifica le condizioni 1) e 2).

L'unicità dell'applicazione $\mathrm{I} : P \to \mathcal{I}$ verificante le condizioni 1) e 2) segue dall'osservazione che, se $\mathrm{I}^* : P \to \mathcal{I}$ è una qualunque applicazione verificante la 1) e la 2), allora, per ogni $k \in \mathbb{N}$, la restrizione di I^* a P_k verifica la $1)_k$ e la $2)_k$ e pertanto coincide con $\mathrm{I}^{(k)}$; conseguentemente l'applicazione I^* coincide con l'applicazione I definita mediante la (10.2.1).

Definizione 10.2.1. (*Insieme di Cantor*). L'insieme

$$C \;=\; [0,1] \;\setminus\; \bigcup_{p\in P} \mathrm{I}(p)$$

(dove $\mathrm{I} : P \to \mathcal{I}$ è l'applicazione specificata dal Teorema 10.2.1) è l'*insieme di Cantor.*

Poiché l'insieme

$$A \;=\; \bigcup_{p\in P} \mathrm{I}(p)$$

è aperto ed è un sottoinsieme di $[0,1]$, si ha che C è un insieme chiuso ed è $C \neq \emptyset$. Il fatto che sia $C \neq \emptyset$ segue anche dall'osservazione che appartengono sicuramente a C i numeri $0, 1$ e tutti gli estremi degli intervalli $\mathrm{I}(p)$. In realtà l'insieme di Cantor contiene molti più elementi; esso, infatti, ha la potenza del continuo. Ciò segue dal successivo Teorema 10.2.2 – del quale omettiamo la dimostrazione – che suggerisce una definizione alternativa dell'insieme di Cantor.

Teorema 10.2.2. *L'insieme di Cantor C coincide con il sottoinsieme dell'intervallo* $[0,1]$ *costituito da tutti i numeri x che, nel sistema di numerazione in base* 3*, ammettono una rappresentazione del tipo*

$$x \;=\; 0, C_1 C_2 \ldots C_n \ldots \;,$$

dove le cifre C_n sono tutte diverse da 1 (cioè C_n è uguale a 0 oppure a 2).

Dal Teorema 10.2.2 segue anche un'altra importante proprietà dell'insieme di Cantor e cioè che C è un *insieme perfetto*, vale a dire C coincide con il suo derivato. Omettiamo i dettagli di questa verifica.

La misura secondo Lebesgue di C si calcola facilmente.

Proposizione 10.2.2. *La misura secondo Lebesgue dell'insieme di Cantor C è uguale a zero.*

Dimostrazione. Si ha

$$\mathrm{m}_1(C) \;=\; 1 \;-\; \mathrm{m}_1(A) \;=\; 1 \;-\; \mathrm{m}_1\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) \;,$$

dove si è posto

$$A_k \;=\; \bigcup_{p\in P_k} \mathrm{I}(p)\,, \qquad\qquad k \in \mathbb{N} \,.$$

Per la proprietà 2) dell'applicazione $p \to \mathrm{I}(p)$ risulta

$$\mathrm{m}_1(A_k) \;=\; 1 \;-\; \mathrm{m}_1([0,1] \setminus A_k) \;=\; 1 \;-\; 2^k(\tfrac{1}{3})^k \qquad\qquad \forall k \in \mathbb{N},$$

pertanto, dato che $A_k \uparrow A$, per la continuità verso l'alto concludiamo che

$$\mathrm{m}_1(C) \;=\; 1 \;-\; \lim_{k\to\infty} (\tfrac{2}{3})^k \;=\; 1 \;.$$

Consideriamo adesso la funzione $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ definita nel seguente modo:

$$\varphi(x) \;=\; \begin{cases} p & \text{se } x \in \mathrm{I}(p),\ p \in P\,, \\ 0 & \text{se } x \;=\; 0\,, \\ \sup\{\varphi(t) \;:\; t \in A,\, t < x\} & \text{se } x \in C,\ x > 0\,. \end{cases} \tag{10.2.2}$$

Osserviamo che:

i) la definizione di φ nei punti $x \in A$ ha senso perché gli intervalli $\mathrm{I}(p)$, $p \in P$, sono a due a due disgiunti (per la proprietà 1) dell'applicazione $\mathrm{I} : P \to \mathcal{I}$);

ii) la definizione di φ nei punti $x \in C$, $x > 0$, ha senso perché l'insieme A è denso in [0,1] (ciò è una ovvia conseguenza del fatto che $\mathrm{m}_1(A) = 1$) e quindi esistono $t \in A$ tali che $t < x$; inoltre, dato che i valori $\varphi(t)$, $t \in A$, sono numeri minori di uno, anche l'estremo superiore di $\{\varphi(t) \,:\, t \in A,\, t < x\}$ è minore o uguale a uno.

Osserviamo inoltre che, in particolare, si ha

$$\varphi(1) \;=\; \sup\{\varphi(t) \;:\; t \in A\} \;=\; \sup P \;=\; 1 \;.$$

Definizione 10.2.2. (*Funzione singolare di Lebesgue*). La funzione φ definita dalla (10.2.2) è la *funzione singolare di Lebesgue.*

Proposizione 10.2.3. *La funzione singolare di Lebesgue è non decrescente e continua.*

Dimostrazione. Dimostriamo che φ è non decrescente.

Dati $x, y \in [0,1]$, con $x < y$, proviamo che risulta $\varphi(x) \le \varphi(y)$. Ciò è ovviamente vero se $x = 0$. Supponiamo pertanto $x > 0$ e distinguiamo i seguenti quattro casi.

1. $x, y \in A$. Siano $p, q \in P$ tali che $x \in \mathrm{I}(p)$, $y \in \mathrm{I}(q)$. Dalla proprietà 1) dell'applicazione $\mathrm{I} : P \to \mathcal{I}$ segue che è $p \le q$ (altrimenti si avrebbe $y < \sup \mathrm{I}(q) < \inf \mathrm{I}(p) < x$) e quindi

$$\varphi(x) \;=\; p \;\le\; q \;=\; \varphi(y) \;.$$

2. $x \in A$, $y \in C$. Si ha $x \in \{t \in A \,:\, t < y\}$ e quindi

$$\varphi(x) \;\le\; \sup\{\varphi(t) \;:\; t \in A,\, t < y\} \;=\; \varphi(y) \;.$$

3. $x, y \in C$. Si ha

$$\{\varphi(t) \;:\; t \in A,\, t < x\} \;\subseteq\; \{\varphi(t) \;:\; t \in A,\, t < y\}$$

e pertanto

$$\varphi(x) \; = \; \sup\{\varphi(t) \, : \, t \in A, \, t < x\} \; \leq \; \sup\{\varphi(t) \, : \, t \in A, \, t < y\} \; = \; \varphi(y) \; .$$

4. $x \in C$, $y \in A$. Si ha, per il caso 1,

$$\varphi(t) \; \leq \; \varphi(y) \qquad\qquad \forall t \in A, \, t < x$$

e pertanto

$$\varphi(x) \; = \; \sup\{\varphi(t) \, : \, t \in A, \, t < x\} \; \leq \; \varphi(y) \; .$$

Dimostriamo adesso che φ è continua. Fissato un qualunque $x_0 \in [0,1]$ proviamo che φ è continua nel punto x_0.

Supponiamo dapprima $x_0 \in]0,1[$. Poiché φ è non decrescente, è sufficiente provare che

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists \, x_1, x_2 \in [0,1], \; x_1 < x_0 < x_2 \;\; : \;\; \varphi(x_2) - \varphi(x_1) \; < \; \varepsilon$$

(infatti, grazie alla non decrescenza di φ, dall'ultima disuguaglianza segue che è

$$|\varphi(x) \; - \; \varphi(x_0)| \; < \; \varepsilon \qquad\qquad \forall x \in [x_1, x_2] \;) \; .$$

Osserviamo che è $0 < \varphi(x_0) < 1$; infatti, per la densità di A in $[0,1]$, esistono $y, z \in A$ tali che $y < x_0 < z$, da cui, dato che $P \subseteq]0,1[$, segue che $0 < \varphi(y) \leq \varphi(x_0) \leq \varphi(z) < 1$. Pertanto, assegnato $\varepsilon > 0$, possiamo scegliere il numero $k \in \mathbb{N}$ in modo che siano verificate le disuguaglianze

$$\frac{1}{2^{k-1}} \; < \; \varepsilon \; ,$$

$$\frac{2}{2^k} \; \leq \; \varphi(x_0) \; < \; \frac{2^k - 1}{2^k} \; . \tag{10.2.3}$$

Se indichiamo con r il massimo dei numeri interi m per i quali è verificata la disuguaglianza

$$\frac{m}{2^k} \; \leq \; \varphi(x_0) \; ,$$

la (10.2.3) implica che è $2 \leq r < 2^k - 1$; pertanto, posto

$$p_1 \; = \; \frac{r-1}{2^k} \quad , \quad p_2 \; = \; \frac{r+1}{2^k} \; ,$$

si ha che p_1, p_2 appartengono a P e inoltre

$$p_1 \; < \; \varphi(x_0) \; < \; p_2 \; ;$$

conseguentemente, prendendo $x_1 \in \mathrm{I}(p_1)$, $x_2 \in \mathrm{I}(p_2)$ (quindi $\varphi(x_1) = p_1$, $\varphi(x_2) = p_2$), si ha, per la non decrescenza di φ,

$$x_1 \; < \; x_0 \; < \; x_2$$

e inoltre, per la scelta di k,

$$\varphi(x_2) - \varphi(x_1) = p_2 - p_1 = \frac{2}{2^k} < \varepsilon .$$

Per dimostrare la continuità di φ nel punto $x_0 = 0$, dato che φ è non decrescente e $\varphi(0) = 0$, è sufficiente provare che

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists\, x_2 \in]0,1], \quad : \quad \varphi(x_2) < \varepsilon .$$

Ciò si ottiene prendendo $p_2 \in P$ tale che $p_2 < \varepsilon$ (la cosa è possibile per la densità di A in $[0,1]$) e $x_2 \in \mathrm{I}(p_2)$.

Analogamente, per provare la continuità di φ nel punto $x_0 = 1$, dato che $\varphi(1) = 1$, è sufficiente provare che

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists\, x_1 \in [0,1[, \quad : \quad \varphi(x_1) > 1 - \varepsilon$$

e ciò si ottiene prendendo $p_1 \in P$ tale che $p_1 > 1 - \varepsilon$ e $x_1 \in \mathrm{I}(p_1)$.

10.3. Confronto tra le σ-algebre $\mathcal{B}_h$ e $\mathcal{L}_h$.

Abbiamo già dimostrato (Proposizione 10.1.1) che per $h \geq 2$ si ha $\mathcal{B}_h \underset{\neq}{\subset} \mathcal{L}_h$. Siamo adesso in grado di provare che anche nel caso $h = 1$ risulta $\mathcal{B}_1 \underset{\neq}{\subset} \mathcal{L}_1$.

Prolunghiamo la funzione singolare di Lebesgue φ a tutto $\mathbb{R}$ ponendo

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 , \\ \varphi(x) & \text{se } x \in [0,1] , \\ 1 & \text{se } x \geq 1 . \end{cases}$$

La funzione prolungata φ^* è, ovviamente, non decrescente e continua.

Sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita nel modo seguente:

$$g(x) = x + \varphi(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R} ;$$

osserviamo che tale funzione è crescente e continua e si ha

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty \quad , \quad \lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty ;$$

di conseguenza esiste la funzione inversa $g^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ed anche g^{-1} è crescente e continua.

Consideriamo l'insieme $g(C)$, immagine dell'insieme di Cantor C tramite la g (insieme che è chiuso dato che g è un omeomorfismo tra $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}$), e proviamo che tale insieme ha misura secondo Lebesgue uguale a uno. Osserviamo a tale scopo che, per ogni $p \in P$, l'intervallo

$\mathrm{I}(p)$ e la sua immagine $g\big(\mathrm{I}(p)\big)$ hanno la stessa misura; infatti, posto $\mathrm{I}(p) =]\alpha, \beta[$, dato che g è crescente e continua si ha

$$g\big(\mathrm{I}(p)\big) \;=]g(\alpha), g(\beta)[\;;$$

inoltre

$$g(\alpha) \;=\; \lim_{x\to\alpha+} g(x) \;=\; \lim_{x\to\alpha+} \big(x+\varphi(x)\big) \;=\; \lim_{x\to\alpha+} \big(x+p\big) \;=\; \alpha+p$$

e, analogamente,

$$g(\beta) \;=\; \beta+p \;,$$

dunque

$$\mathrm{m}_1\big(g\big(\mathrm{I}(p)\big)\big) \;=\; g(\beta)-g(\alpha) \;=\; \beta-\alpha \;=\; \mathrm{m}_1\big(\mathrm{I}(p)\big) \;.$$

Di conseguenza, dato che gli intervalli $\mathrm{I}(p)$, $p \in P$, sono a due a due disgiunti, anche per l'insieme

$$A \;=\; \bigcup_{p\in P} \mathrm{I}(p)$$

e la sua immagine

$$g(A) \;=\; g\Big(\bigcup_{p\in P} \mathrm{I}(p)\Big) \;=\; \bigcup_{p\in P} g\big(\mathrm{I}(p)\big)$$

è vero che

$$\mathrm{m}_1\big(g(A)\big) \;=\; \mathrm{m}_1(A) \;,$$

dunque

$$\mathrm{m}_1\big(g(A)\big) \;=\; 1 \;.$$

In conclusione, dato che

$$g\big([0,1]\big) \;=\; [g(0), g(1)] \;=\; [0,2] \;,$$

per l'insieme

$$g(C) \;=\; g\big([0,1]\setminus A\big) \;=\; [0,2]\setminus g(A)$$

si ha:

$$\mathrm{m}_1\big(g(C)\big) \;=\; \mathrm{m}_1\big([0,2]\big) \;-\; \mathrm{m}_1\big(g(A)\big) \;=\; 2-1 \;=\; 1 \;.$$

Dato che $\mathrm{m}_1\big(g(C)\big) > 0$, per il Teorema 10.1.1 esiste un insieme $G \subseteq g(C)$ tale che $G \notin \mathcal{L}_1$. Consideriamo l'insieme

$$H \;=\; g^{-1}(G)$$

e verifichiamo che esso appartiene a $\mathcal{L}_1$ ma non a $\mathcal{B}_1$. Infatti da $G \subseteq g(C)$ segue

$$H \;=\; g^{-1}(G) \;\subseteq\; g^{-1}\big(g(C)\big) \;=\; C$$

e quindi, essendo $\mathrm{m}_1(C) = 0$, l'insieme H appartiene a $\mathcal{L}_1$ per la completezza di $(\mathbb{R}, \mathcal{L}_1, \mathrm{m}_1)$. D'altra parte non può essere $H \in \mathcal{B}_1$ perché, altrimenti, essendo g^{-1} una funzione continua e quindi $\mathcal{B}_1 - \mathcal{B}_1$-misurabile, anche l'insieme

$$G \;=\; g(H) \;=\; \left(g^{-1}\right)^{-1}(H)$$

apparterrebbe a $\mathcal{B}_1$.

Possiamo compendiare il risultato appena provato e quello acquisito con la Proposizione 10.1.1 in un unico enunciato.

Teorema 10.3.1. *Per ogni $h \in \mathbb{N}$ risulta $\mathcal{B}_h \subsetneq \mathcal{L}_h$.*