1. L'insieme $\overline{\mathbb{R}}$.

Per lo svolgimento del corso risulta particolarmente utile considerare l'insieme

$$\overline{\mathbb{R}} \; = \; \mathbb{R} \cup \{-\infty\,,\, +\infty\} \quad ,$$

detto anche *retta reale estesa*, che si ottiene aggiungendo all'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ i due elementi $-\infty$ e $+\infty$. L'uso dell'insieme $\overline{\mathbb{R}}$ consente infatti, in parecchie circostanze, di semplificare notevolmente l'esposizione degli argomenti.

1.1. Ordinamento, aritmetica e convergenza di successioni e serie in $\overline{\mathbb{R}}$.

All'insieme $\overline{\mathbb{R}}$ si estendono alcune delle "strutture" (ordinamento, operazioni aritmetiche, topologia ecc.) possedute dall'insieme dei numeri reali.

La prima struttura di cui possiamo dotare $\overline{\mathbb{R}}$ è quella di insieme parzialmente ordinato.

Prolunghiamo l'ordinamento aritmetico $\leq$ dall'insieme $\mathbb{R}$ a tutto l'insieme $\overline{\mathbb{R}}$ convenendo che sia:

$$-\infty \; \leq \; x \quad , \quad x \; \leq \; +\infty \qquad \forall x \in \overline{\mathbb{R}} \quad .$$

È evidente che, in questo modo, $\overline{\mathbb{R}}$ diventa un insieme parzialmente ordinato, anzi totalmente ordinato (due qualsiasi elementi di $\overline{\mathbb{R}}$ sono confrontabili). È inoltre facile verificare che l'insieme parzialmente ordinato $\overline{\mathbb{R}}$ è completo, vale a dire, dato un qualsiasi sottoinsieme non vuoto X di $\overline{\mathbb{R}}$, esistono sia l'estremo inferiore – cioè il massimo dell'insieme dei minoranti – che l'estremo superiore – cioè il minimo dell'insieme dei maggioranti – dell'insieme X.

Per mezzo dell'ordinamento possiamo definire il minimo ed il massimo limite e la convergenza di una successione di elementi di $\overline{\mathbb{R}}$ nella seguente maniera.

Sia $\{x_n\}$ una successione di elementi di $\overline{\mathbb{R}}$. Indichiamo con E' l'insieme degli elementi $e' \in \overline{\mathbb{R}}$ che sono *minoranti definitivi* della successione $\{x_n\}$, cioè hanno la proprietà:

$$\exists \overline{n} \in \mathbb{N} \; : \; e' \leq x_n \quad \forall n \geq \overline{n} \tag{1.1.1}$$

(osserviamo che $E' \neq \emptyset$ in quanto, in ogni caso, $-\infty \in E'$). Analogamente, indichiamo con E'' l'insieme dei *maggioranti definitivi* di $\{x_n\}$. Poniamo, per definizione,

$$\lim_{n\to\infty}{}' x_n \; = \; \sup E' \quad , \quad \lim_{n\to\infty}{}'' x_n \; = \; \inf E'' \quad .$$

Ovviamente si ha, qualunque sia la successione $\{x_n\}$,

$$e' \; \leq \; e'' \qquad \forall e' \in E'\,, \forall e'' \in E''$$

e quindi

$$\lim_{n\to\infty}{}' x_n \;\le\; \lim_{n\to\infty}{}'' x_n \quad .$$

Si dice che la successione $\{x_n\}$ è convergente se accade che

$$\lim_{n\to\infty}{}' x_n \;=\; \lim_{n\to\infty}{}'' x_n \quad .$$

In questo caso l'elemento x di $\overline{\mathbb{R}}$ che coincide sia con il $\lim'_{n\to\infty} x_n$ che con il $\lim''_{n\to\infty} x_n$ si chiama il limite della successione $\{x_n\}$, e si scrive

$$\lim_{n\to\infty} x_n \;=\; x \quad .$$

Ritornando al minimo ed al massimo limite, osserviamo che, posto

$$e'_n \;=\; \inf_{k\ge n} x_k \quad , \quad e''_n \;=\; \sup_{k\ge n} x_k \qquad \forall n\in\mathbb{N} \quad ,$$

risulta

$$\lim_{n\to\infty}{}' x_n \;=\; \sup_{n\in\mathbb{N}} e'_n \quad , \quad \lim_{n\to\infty}{}'' x_n \;=\; \inf_{n\in\mathbb{N}} e''_n \quad . \tag{1.1.2}$$

Infatti ogni e'_n, $n\in\mathbb{N}$, è un minorante definitivo di $\{x_n\}$, pertanto

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} e'_n \;\le\; \sup E' \quad .$$

Viceversa, per ogni $e'\in E'$, dato che vale la (1.1.1), si ha

$$e' \;\le\; e'_{\overline{n}} \;\le\; \sup_{n\in\mathbb{N}} e'_n$$

e quindi

$$\sup E' \;\le\; \sup_{n\in\mathbb{N}} e'_n \quad .$$

Rimane così dimostrata la prima delle (1.1.2). In modo del tutto analogo si prova la seconda.

Dalla precedente osservazione segue che per una successione di elementi di $\mathbb{R}$ le nozioni di minimo e massimo limite – e quindi anche quella di limite – che si ottengono come casi particolari di quelle adesso introdotte per le successione di elementi di $\overline{\mathbb{R}}$, coincidono con quelle del corso di Analisi I. Vi è solo una piccola differenza di terminologia riguardante le successioni $\{x_n\}$ di elementi di $\mathbb{R}$ che hanno come limite $-\infty$ o $+\infty$; tali successioni, infatti, nell'ambiente $\overline{\mathbb{R}}$ vengono dette "convergenti" anzichè "divergenti".

Anche in $\overline{\mathbb{R}}$ vale il teorema di esistenza del limite delle successioni monotòne.

Teorema 1.1.1. (Convergenza delle successioni monotòne). *In $\overline{\mathbb{R}}$ ogni successione $\{x_n\}$ non decrescente* [risp. *non crescente*] *è convergente e risulta*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} x_n \quad \left[\text{risp.} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} x_n \right] \quad .$$

Dimostrazione. Se la successione $\{x_n\}$ è non decrescente ogni suo termine x_n è un minorante definitivo di $\{x_n\}$ e quindi è minore o uguale al $\lim'_{n\to\infty} x_n$; di conseguenza si ha:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} x_n \leq \lim_{n\to\infty}{}' x_n \quad .$$

D'altra parte, per ogni successione $\{x_n\}$ è vero che:

$$\lim_{n\to\infty}{}' x_n \leq \lim_{n\to\infty}{}'' x_n \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} x_n \quad .$$

Dalle precedenti disuguaglianze segue, ovviamente, la tesi. Analogamente si ragiona se $\{x_n\}$ è non crescente.

Passiamo ora ad occuparci delle operazioni aritmetiche.

Prolunghiamo a $\overline{\mathbb{R}}$ le due operazioni di addizione e di moltiplicazione definite in $\mathbb{R}$ ponendo:

$$\begin{aligned} (+\infty) + a = a + (+\infty) = +\infty \qquad & \forall a \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{-\infty\} \quad , \\ (-\infty) + a = a + (-\infty) = -\infty \qquad & \forall a \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{+\infty\} \quad , \end{aligned}$$

$$\begin{gathered} (+\infty)\cdot a = a\cdot(+\infty) = +\infty \quad , \quad (-\infty)\cdot a = a\cdot(-\infty) = -\infty \qquad \forall a \in]0,+\infty] \ (^1) \ , \\ (+\infty)\cdot a = a\cdot(+\infty) = -\infty \quad , \quad (-\infty)\cdot a = a\cdot(-\infty) = +\infty \qquad \forall a \in [-\infty,0[\qquad , \\ (+\infty)\cdot 0 = 0\cdot(+\infty) = (-\infty)\cdot 0 = 0\cdot(-\infty) = 0 \quad . \end{gathered}$$

Osserviamo che in questo modo, mentre la moltiplicazione è effettivamente un'operazione definita in $\overline{\mathbb{R}}$ (il prodotto $x\cdot y$ è stato definito per ogni $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$), per l'addizione ciò non è propriamente vero poichè le somme $(+\infty)+(-\infty)$ e $(-\infty)+(+\infty)$ non sono state definite (e non lo saranno). Ciò non di meno, seguiteremo a parlare, con lieve abuso di linguaggio, di "operazione di addizione di $\overline{\mathbb{R}}$".

Si può facilmente verificare che l'addizione e la moltiplicazione di $\overline{\mathbb{R}}$ sono entrambe commutative e associative e inoltre la moltiplicazione è distributiva rispetto all'addizione.

Occasionalmente ci capiterà di considerare l'opposto di un elemento x di $\overline{\mathbb{R}}$, indicato con $-x$ e definito nel modo più ovvio ($-x$ coincide con l'opposto di x in $\mathbb{R}$ se $x \in \mathbb{R}$ ed è uguale a $-\infty$ [risp. $+\infty$] se $x = +\infty$ [risp. $x = -\infty$]), e la differenza di due elementi x e y di $\overline{\mathbb{R}}$, che si indica con $x - y$ ed è uguale, per definizione, alla somma $x + (-y)$, sempreché tale somma abbia senso.

---

(1) Gli intervalli di $\overline{\mathbb{R}}$ si definiscono nella maniera più ovvia; ad esempio:

$$]0,+\infty] = \{x \in \overline{\mathbb{R}} \,:\, 0 < x \leq +\infty\} =]0,+\infty[\cup \{+\infty\} \quad .$$

È bene osservare esplicitamente che in $\overline{\mathbb{R}}$ la legge di cancellazione dell'addizione vale nella seguente forma:

$$a + c = b + c\,,\ c \in \mathbb{R} \implies a = b$$

(l'ipotesi $c \in \mathbb{R}$ è essenziale; infatti, ad es., $5 + (+\infty) = 7 + (+\infty)$ ma $5 \neq 7$).

Ritornando alla convergenza delle successioni, notiamo che anche in $\overline{\mathbb{R}}$ continuano a valere i teoremi sul limite della successione somma e della successione prodotto, già noti nel caso delle successioni a termini reali; omettiamo, per brevità, la verifica di ciò (naturalmente, anche in $\overline{\mathbb{R}}$ si ha che $+\infty - \infty$ e $0 \cdot \infty$ sono forme indeterminate).

Occupiamoci, infine, del concetto di somma di una serie di elementi di $\overline{\mathbb{R}}$.

Data una successione $\{y_n\}$ di elementi di $\overline{\mathbb{R}}$, diciamo che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n$$

è convergente se accade che:

1) $\{-\infty, +\infty\} \not\subseteq \{y_1, y_2, \ldots\}$ (il codominio della successione $\{y_n\}$ non contiene entrambi gli elementi $-\infty$ e $+\infty$),

e inoltre:

2) la successione delle somme parziali $\{S_n\}$, definita ponendo $S_n = y_1 + \ldots + y_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, è convergente (notiamo che la somma $y_1 + \ldots + y_n$ ha sicuramente senso per via della condizione 1)).

Se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ è convergente chiamiamo somma di tale serie l'elemento $y \in \overline{\mathbb{R}}$ dato da: $y = \lim_{n\to\infty} S_n$, e scriviamo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n = y \quad .$$

Come in $\mathbb{R}$, anche in $\overline{\mathbb{R}}$ è vero che le serie a termini non negativi sono sempre dotate di somma.

Teorema 1.1.2. (Convergenza delle serie a termini non negativi). *In $\overline{\mathbb{R}}$ ogni serie $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ a termini non negativi è convergente e risulta*

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} (y_1 + \ldots + y_n) \quad .$$

Dimostrazione. L'asserto segue subito dal Teorema 1.1.1 in quanto la successione delle some parziali è non decrescente.

1.2. La topologia di $\overline{\mathbb{R}}$.

Come abbiamo già anticipato, l'insieme $\overline{\mathbb{R}}$ viene munito anche della struttura di spazio topologico.

La topologia di cui abitualmente viene dotato $\overline{\mathbb{R}}$ è la topologia associata ad una qualunque delle metriche d_φ su $\overline{\mathbb{R}}$ che si ottengono mediante il procedimento di seguito descritto.

Consideriamo una qualunque funzione $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avente le seguenti proprietà:

i) φ è continua in $\mathbb{R}$,

ii) φ è crescente in $\mathbb{R}$,

iii) φ è limitata in $\mathbb{R}$ (cioè esistono $h, k \in \mathbb{R}$ tali che $h \leq \varphi(x) \leq k \;\; \forall x \in \mathbb{R}$).

Da ii) e iii) segue che ciascuno dei due limiti $\lim_{x\to-\infty} \varphi(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x)$ esiste finito. Inoltre, tenuto conto di i), si ha che, posto

$$\lim_{x\to-\infty} \varphi(x) = a \quad , \quad \lim_{x\to-\infty} \varphi(x) = b \quad ,$$

risulta $\varphi(\mathbb{R}) =]a, b[$.

Prolunghiamo la funzione φ a tutto $\overline{\mathbb{R}}$ ponendo:

$$\varphi(-\infty) = a \quad , \quad \varphi(+\infty) = b \quad .$$

In questo modo si ha $\varphi(\overline{\mathbb{R}}) = [a, b]$ e inoltre

$$x, y \in \overline{\mathbb{R}}, \; x < y \quad \Longrightarrow \quad \varphi(x) < \varphi(y) \quad ,$$

dunque φ è una bigezione tra $\overline{\mathbb{R}}$ e $[a, b]$.

Posto, infine,

$$d_\varphi(x, y) \;=\; |\varphi(x) - \varphi(y)| \qquad \forall x, y \in \overline{\mathbb{R}} \quad ,$$

è immediato verificare che la funzione $d_\varphi : \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ così definita è una metrica su $\overline{\mathbb{R}}$.

Evidentemente, le metriche d_φ che si ottengono al variare della funzione $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ verificante le condizioni i) - iii) sono, in generale, tra loro diverse ([2]). Tuttavia, esse determinano su $\overline{\mathbb{R}}$ tutte quante la medesima topologia. Si ha infatti la seguente proposizione.

Proposizione 1.2.1. (Caratterizzazione dei punti interni a un insieme nello spazio metrico $(\overline{\mathbb{R}}, d_\varphi)$).

Sia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione avente le proprietà* i) - iii) *e sia* d_φ *la corrispondente metrica su* $\overline{\mathbb{R}}$.

Se X *è un qualunque sottoinsieme di* $\overline{\mathbb{R}}$ *e* $\overset{\circ}{X}$ *denota l'interno di* X *nello spazio metrico* $(\overline{\mathbb{R}}, d_\varphi)$, *vale la seguente caratterizzazione dei punti appartenenti a* $\overset{\circ}{X}$.

([2]) Precisamente, si ha che, date due funzioni $\varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, verificanti le i) - iii), risulta $d_{\varphi_1} = d_{\varphi_2}$ se e solo se la differenza $\varphi_1 - \varphi_2$ è una funzione costante.

Se $x_0 \in \mathbb{R}$, allora:

$$x_0 \in \overset{\circ}{X} \iff \exists \delta > 0 \; : \;]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subseteq X \; ; \tag{1.2.1}$$

inoltre:

$$-\infty \in \overset{\circ}{X} \iff \exists \beta \in \mathbb{R} \; : \; [-\infty, \beta[\subseteq X \; ; \tag{1.2.2}$$

$$+\infty \in \overset{\circ}{X} \iff \exists \alpha \in \mathbb{R} \; : \;]\alpha, +\infty] \subseteq X \; . \tag{1.2.3}$$

Dimostrazione. Dire che $x_0 \in \overset{\circ}{X}$ equivale a dire che esiste $\varepsilon > 0$ tale che

$$\{x \in \overline{\mathbb{R}} \, : \, d_\varphi(x, x_0) < \varepsilon\} \subseteq X \quad ,$$

cioè

$$\{x \in \overline{\mathbb{R}} \, : \, |\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \varepsilon\} \subseteq X \quad . \tag{1.2.4}$$

Supponiamo che $x_0 \in \mathbb{R}$. Poiché la funzione φ è continua in x_0, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subseteq \{x \in \mathbb{R} \, : \, |\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \varepsilon\} \quad .$$

Ciò prova l'implicazione $\Longrightarrow$ nella (1.2.1). Per provare l'implicazione contraria è sufficiente osservare che, viceversa, per ogni $\delta > 0$ esiste $\varepsilon > 0$ tale che

$$\{x \in \overline{\mathbb{R}} \, : \, |\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \varepsilon\} \subseteq]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\quad ;$$

infatti, scegliendo

$$0 < \varepsilon < \min\{\varphi(x_0) - \varphi(x_0 - \delta) \, , \, \varphi(x_0 + \delta) - \varphi(x_0)\} \quad ,$$

si ha che da

$$\varphi(x_0) - \varepsilon < \varphi(x) < \varphi(x_0) + \varepsilon$$

segue

$$\varphi(x_0 - \delta) < \varphi(x) < \varphi(x_0 + \delta)$$

e quindi, dato che φ è crescente,

$$x_0 - \delta < x < x_0 - \delta \quad .$$

Consideriamo adesso il caso del punto $x_0 = -\infty$. La (1.2.4) adesso si scrive

$$\{x \in \overline{\mathbb{R}} \, : \, |\varphi(x) - a| < \varepsilon\} \subseteq X \quad .$$

Ma, essendo $\lim_{x\to-\infty}\varphi(x) = a$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\beta \in \mathbb{R}$ tale che

$$]-\infty, \beta[\ \subseteq\ \{x \in \mathbb{R} : |\varphi(x) - a| < \varepsilon\}\ ,$$

da cui, dato che il punto $-\infty$ soddisfa, ovviamente, la disequazione $|\varphi(x) - a| < \varepsilon$, si ottiene

$$[-\infty, \beta[\ \subseteq\ \{x \in \overline{\mathbb{R}} : |\varphi(x) - a| < \varepsilon\}\ .$$

Ciò prova l'implicazione $\Longrightarrow$ nella (1.2.2). Per provare l'implicazione contraria è sufficiente verificare che, viceversa, per ogni $\beta \in \mathbb{R}$ esiste $\varepsilon > 0$ tale che

$$\{x \in \overline{\mathbb{R}} : |\varphi(x) - a| < \varepsilon\}\ \subseteq\ [-\infty, \beta[\ ;$$

infatti, scegliendo $0 < \varepsilon < \varphi(\beta) - a$, si ha:

$$\{x \in \overline{\mathbb{R}} : |\varphi(x) - a| < \varepsilon\}\ =\ \{x \in \overline{\mathbb{R}} : a \leq \varphi(x) < a + \varepsilon\}\ \subseteq$$

$$\subseteq\ \{x \in \overline{\mathbb{R}} : a \leq \varphi(x) < \varphi(\beta)\}\ =\ [-\infty, \beta[\ .$$

Il caso del punto $x_0 = +\infty$ si tratta in maniera perfettamente analoga.

Osserviamo che la condizione necessaria e sufficiente per l'appartenenza di un punto $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ all'insieme $\overset{\circ}{X}$, espressa dalla precedente proposizione, è indipendente dalla funzione φ, dunque per ogni punto $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ si ha la seguente alternativa: o x_0 è interno a X in ognuno degli spazi metrici $(\overline{\mathbb{R}}, d_\varphi)$ oppure x_0 non è interno a X in nessuno di tali spazi metrici. Conseguentemente, si ha la

Proposizione 1.2.2. *Se $\varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sono due qualsiasi funzioni verificanti le condizioni* i) - iii)*, la topologia dello spazio metrico $(\overline{\mathbb{R}}, d_{\varphi_1})$ e quella dello spazio metrico $(\overline{\mathbb{R}}, d_{\varphi_2})$ coincidono.*

Dimostrazione. Occorre provare che ogni insieme $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ che è aperto nello spazio metrico $(\overline{\mathbb{R}}, d_{\varphi_1})$ lo è anche in $(\overline{\mathbb{R}}, d_{\varphi_2})$ e viceversa. E infatti, se A è aperto in $(\overline{\mathbb{R}}, d_{\varphi_1})$, allora ogni punto $x \in A$ è interno ad A nello spazio metrico $(\overline{\mathbb{R}}, d_{\varphi_1})$ e quindi, per quanto sopra osservato, anche nello spazio metrico $(\overline{\mathbb{R}}, d_{\varphi_2})$, dunque A è aperto anche in $(\overline{\mathbb{R}}, d_{\varphi_2})$. Per completare la dimostrazione basta osservare che i ruoli delle due funzioni φ_1 e φ_2 nel precedente ragionamento sono perfettamente simmetrici.

Un'altra importante conseguenza della Proposizione 1.2.1 è che la topologia determinata sull'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali dalla restrizione a $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ di una qualunque delle metriche d_φ (restrizione che, per semplicità, continueremo ad indicare con lo stesso simbolo d_φ) coincide con la topologia individuata dalla metrica usuale d:

$$d(x, y)\ =\ |x - y| \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}\ .$$

Proposizione 1.2.3. *Se* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *è una qualsiasi funzione verificante le condizioni* i) - iii)*, la topologia dello spazio metrico* $(\mathbb{R}, d_\varphi)$ *e quella dello spazio metrico* $(\mathbb{R}, d)$ (d metrica usuale su $\mathbb{R}$) *coincidono.*

Dimostrazione. La dimostrazione si ottiene in maniera perfettamente analoga a quella della Proposizione 1.2.2, dopo aver osservato che, per ogni insieme $X \subseteq \mathbb{R}$ ed ogni punto $x_0 \in \mathbb{R}$, si ha l'equivalenza:

$$x_0 \text{ interno a } X \text{ in } (\mathbb{R}, d_\varphi) \iff x_0 \text{ interno a } X \text{ in } (\mathbb{R}, d) \ ;$$

infatti:

$$x_0 \text{ interno a } X \text{ in } (\mathbb{R}, d_\varphi) \iff (^3)$$

$$\iff x_0 \text{ interno a } X \text{ in } (\overline{\mathbb{R}}, d_\varphi) \iff \qquad \text{(Proposizione 1.2.1)}$$

$$\iff \exists \delta > 0 \ :]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subseteq X \iff x_0 \text{ interno a } X \text{ in } (\mathbb{R}, d) \ .$$

Osservazione 1.2.1. Notiamo che, ora che l'insieme $\overline{\mathbb{R}}$ è stato dotato della topologia, per le successioni di elementi di $\overline{\mathbb{R}}$ abbiamo a disposizione due nozioni di convergenza. Una convergenza è la "convergenza nel senso dell'ordinamento", introdotta nel paragrafo precedente, secondo la quale una successione $\{x_n\}$ converge ad un elemento $\overline{x} \in \overline{\mathbb{R}}$ se accade che

$$\lim_{n\to\infty}{}' x_n = \lim_{n\to\infty}{}'' x_n = \overline{x} \ . \tag{1.2.5}$$

L'altra è la "convergenza nel senso della topologia": $\{x_n\}$ converge a $\overline{x}$ se per ogni intorno U di $\overline{x}$ esiste $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che $x_n \in U \ \ \forall n \geq \overline{n}$. In maniera del tutto equivalente, tenuto conto di come è stata definita la topologia di $\overline{\mathbb{R}}$, possiamo dire che $\{x_n\}$ converge a $\overline{x}$ nel senso della topologia se accade che:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu \in \mathbb{N} \ : \ d_\varphi(x_n, \overline{x}) < \varepsilon \ \ \forall n \geq \nu \ \ , \tag{1.2.6}$$

essendo $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una qualsiasi funzione verificante le condizioni i) - iii).

Mostriamo, come è stato già fatto in Analisi I per le successioni a termini reali, che le due nozioni di convergenza sono equivalenti.

---

(3) Per giustificare questo passaggio basta tenere presente che $\mathbb{R}$ è un insieme aperto dello spazio metrico $(\overline{\mathbb{R}}, d_\varphi)$ (ciò segue facilmente dalla Proposizione 1.2.1) ed applicare la seguente proposizione di carattere generale sugli spazi metrici, la cui semplice verifica è lasciata per esercizio allo studente.

Proposizione. *Siano:* (S, d_S) *uno spazio metrico;* $R \subseteq S$ *un insieme aperto di* (S, d_S)*,* $R \neq \emptyset$*;* d_R *la restrizione di* d_S *a* $R \times R$*. Per ogni insieme* $X \subseteq R$ *ed ogni punto* $x_0 \in R$ *vale allora l'equivalenza:*

$$x_0 \textit{ interno a } X \textit{ in } (R, d_R) \iff x_0 \textit{ interno a } X \textit{ in } (S, d_S) \ .$$

Teorema 1.2.1. *In $\overline{\mathbb{R}}$ la convergenza nel senso dell'ordinamento e la convergenza nel senso della topologia coincidono.*

Dimostrazione. Occorre provare che, per ogni successione $\{x_n\}$ di elementi di $\overline{\mathbb{R}}$ ed ogni $\overline{x} \in \overline{\mathbb{R}}$, vale l'equivalenza:

$$(1.2.5) \iff (1.2.6) \quad .$$

Proviamo l'implicazione $\Longrightarrow$. Dato $\varepsilon > 0$, dobbiamo far vedere che per n sufficientemente grande è soddisfatta la catena di disuguaglianze

$$\varphi(\overline{x}) - \varepsilon \ < \ \varphi(x_n) \ < \ \varphi(\overline{x}) + \varepsilon \quad .$$

Ci occupiamo soltanto della disuguaglianza di destra (analogamente si procede, con le dovute modifiche, per la disuguaglianza di sinistra). Se $\overline{x} = +\infty$ è ovvio che risulta $\varphi(x_n) < \varphi(\overline{x}) + \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Se $\overline{x} < +\infty$, utilizzando la continuità di φ nel punto $\overline{x}$, se $\overline{x} \in \mathbb{R}$, ovvero il fatto che $\lim_{x \to -\infty} \varphi(x) = \varphi(-\infty)$, se $\overline{x} = -\infty$, si ottiene, in ogni caso, l'esistenza di un elemento $x^* \in \overline{\mathbb{R}}$, $x^* > \overline{x}$, tale che $\varphi(x^*) < \varphi(\overline{x}) + \varepsilon$. Poichè

$$x^* > \overline{x} = \lim_{n\to\infty} {}'' x_n = \inf E'' \quad ,$$

esiste $e'' \in E''$ tale che $e'' < x^*$; ciò comporta che anche x^* è un maggiorante definitivo per la successione $\{x_n\}$ e di conseguenza si ha, per n sufficientemente grande,

$$\varphi(x_n) \ \leq \ \varphi(x^*) \ < \ \varphi(\overline{x}) + \varepsilon \quad ,$$

come volevamo dimostrare.

Proviamo adesso l'implicazione $\Longleftarrow$. Dimostriamo che

$$\lim_{n\to\infty} {}'' x_n \ \leq \ \overline{x} \tag{1.2.7}$$

(analogamente si prova che $\lim_{n\to\infty}{}' \geq \overline{x}$ e dalle due disuguaglianze segue la tesi). Se $\overline{x} = +\infty$ la (1.2.7) è ovviamente verificata. Se $\overline{x} < +\infty$ osserviamo che, per ogni $x > \overline{x}$, scelto $0 < \varepsilon \leq \varphi(x) - \varphi(\overline{x})$, per n sufficientemente grande risulta

$$\varphi(x_n) \ < \varphi(\overline{x}) + \varepsilon \ \leq \varphi(x)$$

e quindi $x_n < x$ dato che φ è crescente; pertanto x è un maggiorante definitivo per la successione $\{x_n\}$. Abbiamo così verificato l'inclusione insiemistica $]\overline{x}, +\infty] \subseteq E''$; ne segue che

$$\overline{x} \ = \ \inf\,]\overline{x}, +\infty] \ \geq \ \inf E'' \ = \ \lim_{n\to\infty} {}'' x_n \quad .$$

Occupiamoci adesso di un'altra importante proprietà dello spazio topologico $\overline{\mathbb{R}}$, vale a dire della sua compattezza.

È necessario premettere alcune definizioni e un teorema sugli spazi metrici in generale.

Dati due spazi metrici (S_1, d_1), (S_2, d_2), si chiama *isometria* di (S_1, d_1) in (S_2, d_2) ogni applicazione $h : S_1 \to S_2$ tale che

$$d_2(h(x'), h(x'')) \;=\; d_1(x', x'') \qquad\qquad \forall x', x'' \in S_1 \quad .$$

È ovvio che un'isometria h è una funzione iniettiva e che la funzione inversa h^{-1} è, a sua volta, un'isometria di $h(S_1)$ – dotato della restrizione della metrica d_2 – in (S_1, d_1).

Se l'isometria $h : S_1 \to S_2$ è anche surgettiva si dice che h è un'isometria di (S_1, d_1) *su* (S_2, d_2) (o *tra* (S_1, d_1) *e* (S_2, d_2)). Due spazi metrici (S_1, d_1), (S_2, d_2) si dicono *isometrici* se esiste un'isometria di uno dei due spazi (e quindi di ognuno dei due spazi) sull'altro.

Teorema 1.2.2. *Se (S_1, d_1), (S_2, d_2) sono due spazi isometrici ed uno di essi è sequenzialmente compatto, anche l'altro spazio è sequenzialmente compatto.*

Dimostrazione. Supponiamo che (S_2, d_2) sia sequenzialmente compatto ed indichiamo con h un'isometria di (S_1, d_1) su (S_2, d_2).

Sia $\{x_n\}$ una qualsiasi successione di elementi di S_1. Considerata la successione $\{h(x_n)\}$, l'ipotesi su (S_2, d_2) implica l'esistenza di una successione estratta $\{h(x_{n_k})\}$ e di un elemento $y \in S_2$ tali che

$$\lim_{k\to\infty} d_2(h(x_{n_k}), y) \;=\; 0 \quad .$$

Poichè h è surgettiva esiste $x \in S_1$ tale che $h(x) = y$, quindi possiamo scrivere

$$\lim_{k\to\infty} d_2(h(x_{n_k}), h(x)) \;=\; 0 \quad ,$$

cioè, dato che h è un'isometria,

$$\lim_{k\to\infty} d_1(x_{n_k}, x) \;=\; 0 \quad .$$

Abbiamo così provato che, nello spazio metrico (S_1, d_1), ogni successione $\{x_n\}$ ha un'estratta convergente, dunque (S_1, d_1) è sequenzialmente compatto.

Osserviamo adesso che, fissata una qualsiasi funzione $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ verificante le condizioni i) - iii), e considerato lo spazio metrico $(\overline{\mathbb{R}}, d_\varphi)$, dalla definizione di d_φ segue subito che l'applicazione $\varphi : \overline{\mathbb{R}} \to [a, b]$ è un'isometria di $(\overline{\mathbb{R}}, d_\varphi)$ su $([a, b], d)$ (dove d è la restrizione ad $[a, b] \times [a, b]$ della metrica usuale su $\mathbb{R}$). Pertanto, dato che ogni intervallo chiuso e limitato di $\mathbb{R}$, munito della metrica usuale, è uno spazio sequenzialmente compatto, anche $(\overline{\mathbb{R}}, d_\varphi)$ è sequenzialmente compatto.

Abbiamo così provato il

Teorema 1.2.3. *Lo spazio topologico* $\overline{\mathbb{R}}$ *è (sequenzialmente)compatto* ([4]).

Poichè ogni spazio metrico sequenzialmente compatto è completo ([5]), si ha anche la

Proposizione 1.2.4. *Se* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *è una qualsiasi funzione verificante le condizioni* i) - iii)*, lo spazio metrico* $(\overline{\mathbb{R}}, d_\varphi)$ *è completo.*

Avvertiamo infine che usualmente, quando si vuole considerare $\overline{\mathbb{R}}$ come spazio metrico, si sceglie, fra le varie metriche d_φ, la metrica $\overline{d} = d_{\overline{\varphi}}$ determinata dalla seguente funzione $\overline{\varphi} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$\overline{\varphi}(x) = \frac{x}{1+|x|} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

(in questo caso $a = 1$, $b = 1$, dunque $(\overline{\mathbb{R}}, \overline{d})$ è isometrico a $([-1,1], d)$). Noi peraltro, nel seguito del corso, saremo interessati a considerare $\overline{\mathbb{R}}$ solo come spazio topologico e non come spazio metrico.

Osservazione 1.2.2. Un'altra possibile dimostrazione del Teorema 1.2.2 è la seguente: poiché ogni isometria tra due spazi metrici (S_1, d_1) e (S_2, d_2) è un'omeomorfismo tra i corrispondenti spazi topologici S_1 e S_2 e poiché la compattezza è una proprietà topologica (cioè si conserva per omeomorfismi), si ha che, se uno dei due spazi metrici (S_1, d_1) e (S_2, d_2) è (sequenzialmente) ([4]) compatto, anche l'altro lo è.

([4]) Ricordiamo che per gli spazi topologici *metrizzabili* (cioè tali che la topologia è determinata da una metrica) le nozioni di compattezza e di sequenziale compattezza sono equivalenti.

([5]) Sia (S, d) uno spazio metrico sequenzialmente compatto. Se $\{x_n\}$ è una qualsiasi successione di Cauchy in (S, d), allora, considerata una successione estratta $\{x_{n_k}\}$ convergente verso un elemento x di S, è facile verificare, adoperando la disuguaglianza triangolare

$$d(x_n, x) \;\leq\; d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x) \quad ,$$

che anche la successione $\{x_n\}$ converge verso x.