Corso di studio in Fisica

Programma di **Complementi di Analisi Matematica**

Anno accademico **2006-2007**

(Prof. Alfonso Villani)

1. Cenni di Topologia Generale.

Spazi topologici. Spazi metrizzabili. Insiemi aperti, insiemi chiusi. Interno, frontiera, chiusura e derivato di un insieme. Altre definizioni di spazio topologico. Assiomi di separazione. Funzioni continue. Confronto tra topologie. Sottospazi di uno spazio topologico. Prodotto di due spazi topologici. Spazi connessi. Componenti connesse di uno spazio topologico. Omeomorfismi e proprietà topologiche. Spazi compatti. Spazi sequenzialmente compatti.

[**T**]: nn. 1, 2, 3, 4 (Teorema 4.3* e Teorema 4.4*), 5 (Proposizione 5.2*), 6 (omettere il Teorema 6.3), 7, 8 (Teorema 8.1′*, Teorema 8.2′*), 9 (Proposizione 9.3*, Proposizione 9.4*), 10 (Teorema 10.1*), 11 (Proposizione 11.4*) e 12 (Esempio 12.2*, Teorema 12.2*, Teorema 12.3*).

2. Altri argomenti di Topologia.

L'insieme $\overline{\mathbb{R}}$. Ordinamento e aritmetica di $\overline{\mathbb{R}}$. Convergenza – nel senso dell'ordinamento – di successioni e serie in $\overline{\mathbb{R}}$. *La topologia di $\overline{\mathbb{R}}$. *Equivalenza tra convergenza nel senso dell'ordinamento e convergenza nel senso della topologia. *Compattezza di $\overline{\mathbb{R}}$.

[**IAS**], Capitolo 1: nn. 1.1 e 1.2*.

Successioni di insiemi: massimo e minimo limite, successioni convergenti, successioni monotone. Successioni di insiemi di uno spazio topologico invadenti il prorio limite. Distanza di due insiemi di uno spazio metrico. *Insiemi con distanza nulla. *Continuità della funzione distanza da un insieme fissato. *Ogni aperto di $\mathbb{R}^h$ è invaso da una successione di plurintervalli.

[**IAS**], Capitolo 3: nn. 3.1 (omettere l'Esempio 3.1.2 e la Proposizione 3.1.3), 3.2, 3.3 (omettere l'Esempio 3.3.1 e le dimostrazioni dei Teoremi 3.3.1 e 3.3.2) e 3.4 (omettere il Lemma 3.4.1 e la dimostrazione del Teorema 3.4.1).

3. La misura di Lebesgue.

Plurintervalli di $\mathbb{R}^h$. *Proprietà della famiglia dei plurintervalli di $\mathbb{R}^h$. *La misura elementare dei plurintervalli. *Proprietà della misura elementare. Richiami di teoria della misura secondo Peano-Jordan: insiemi di $\mathbb{R}^h$ misurabili secondo Peano-Jordan e *proprietà della famiglia degli insiemi di $\mathbb{R}^h$ misurabili secondo Peano-Jordan.

[**IAS**], Capitolo 2: nn. 2.1* (omettere l'Appendice al n. 2.1), 2.2* (soltanto la Definizione 2.2.1, la Proposizione 2.2.1*, la Definizione 2.2.2, l'Osservazione 2.2.1*, il Teorema 2.2.2*, la Proposizione 2.2.2* e la Proposizione 2.2.5*), 2.3* (soltanto la Definizione 2.3.1, la Proposizione 2.3.1*, il Teorema 2.3.1*, l'Esempio 2.3.1. e l'Osservazione 2.3.1) e 2.4* (soltanto la Definizione 2.4.1, l'Osservazione 2.4.1 e il Teorema 2.4.1*).

La misura secondo Lebesgue degli insiemi aperti limitati di $\mathbb{R}^h$. La misura secondo Lebesgue degli insiemi chiusi limitati di $\mathbb{R}^h$. Insiemi limitati di $\mathbb{R}^h$ misurabili secondo Lebesgue. Proprietà della famiglia degli insiemi limitati di $\mathbb{R}^h$ misurabili secondo Lebesgue. Insiemi di $\mathbb{R}^h$ misurabili secondo Lebesgue. Proprietà della famiglia $\mathcal{L}_h$ degli insiemi di $\mathbb{R}^h$ misurabili secondo Lebesgue e della misura di Lebesgue m_h. Confronto tra la teoria della misura secondo Lebesgue e quella secondo Peano-Jordan.

[**IAS**], Capitolo 4: nn. 4.1, 4.2, 4.3 e 4.4.

4. La teoria astratta della misura.

σ-algebre e *loro proprietà. Generatori di una σ-algebra. Misure e loro proprietà. Misure σ-finite.

[**IAS**], Capitolo 5, n. 5.1 (omettere l'Esempio 5.1.1, c), la dimostrazione della Proposizione 5.1.1 e quelle relative all'Esempio 5.1.2, all'Osservazione 5.1.1 ed all'Esempio 5.1.3; omettere inoltre gli Esempi 5.1.5 e 5.1.6 e il n. 5.1.3) e [**M**].

Boreliani di uno spazio topologico. *Boreliani di uno sottospazio. Generatori della σ-algebra $\mathcal{B}_h$ dei boreliani di $\mathbb{R}^h$. $\mathcal{B}_h \subseteq \mathcal{L}_h$. *Boreliani di $\overline{\mathbb{R}}$.

[**IAS**], Capitolo 6: nn. 6.1 (Proposizione 6.1.2*), 6.2 (svolgere la dimostrazione della Proposizione 6.2.2 nel caso $h = 1$) e 6.3*.

Spazi misurabili. Spazi di misura. Spazi di misura completi. *Completamento di uno spazio di misura. *$(\mathbb{R}^h, \mathcal{L}_h, \mathrm{m}_h)$ è il completamento di $(\mathbb{R}^h, \mathcal{B}_h, \lambda_h)$.

[**IAS**], Capitolo 8: nn. 8.1 (Esempio 8.1.2*), 8.2 (fino all'enunciato della Proposizione 8.2.1, omettendo la dimostrazione del Teorema 8.2.1) e 8.3 (solo l'enunciato del Teorema 8.3.1).

Funzioni misurabili. Criterio generale di misurabilità. *Proprietà delle funzioni misurabili.

[**IAS**], Capitolo 9, n. 9.1 (omettere la dimostrazione del Teorema 9.1.2 e quelle delle Proposizioni 9.1.1, 9.1.2 e 9.1.3).

*Invarianza per traslazioni della misura di Lebesgue.

[**IAS**], Capitolo 9, n. 9.3 (solo l'enunciato del Teorema 9.3.2).

Ogni insieme $E \in \mathcal{L}_h$ di misura positiva contiene un insieme non misurabile secondo Lebesgue (esempio di Vitali). La misura identicamente nulla è l'unica misura su $\mathcal{P}(\mathbb{R}^h)$ invariante per traslazioni e finita sugli insiemi limitati. *Esistenza di insiemi misurabili secondo Lebesgue che non sono boreliani.

[**IAS**], Capitolo 10: nn. 10.1 (omettere la Proposizione 10.1.1) e 10.3 (solo l'enunciato del Teorema 10.3.1).

5. Integrazione in uno spazio di misura.

Funzioni numeriche misurabili. Funzioni reali misurabili. Indicatore di un insieme. *Criteri di misurabilità delle funzioni numeriche. Operazioni con le funzioni numeriche misurabili.

[**IAS**], Capitolo 12: nn. 12.1 (Proposizione 12.1.1*), 12.2 (fino all'enunciato del Teorema 12.2.1) e 12.3 (Teorema 12.3.1*).

Funzioni elementari. L'integrale delle funzioni elementari. *Approssimazione delle funzioni numeriche misurabili e a valori non negativi mediante funzioni elementari. *L'integrale delle delle funzioni misurabili e non negative. *Proprietà dell'integrale. *Il teorema di Beppo Levi. Il teorema di integrazione per serie. Funzioni μ-quasi-integrabili e loro integrale. Funzioni μ-integrabili. *Condizioni di μ-integrabilità. *Proprietà dell'integrale. Proprietà verificate quasi-ovunque. L'integrale delle funzioni definite quasi-ovunque. L'integrale esteso ad un sottoinsieme di Ω. L'integrale di Lebesgue.

[**IAS**], Capitolo 13: nn. 13.1 (omettere la Proposizione 13.1.3 e la dimostrazione del Teorema 13.1.1), 13.2 (Teorema 13.2.1*), 13.3 (omettere il Lemma 13.3.1 e le dimostrazioni del Lemma 13.3.2 e dei Teoremi 13.3.1 e 13.3.2), 13.4 (solo l'Esempio 13.4.1), 13.7 (fino al Corollario 13.7.1, omettendo l'Esempio 13.7.2 e le dimostrazioni dei Teoremi 13.7.1 e 13.7.2 e della Proposizione 13.7.3; svolgere gli Esempi 13.7.3 usando il teorema di integrazione per serie), 13.8 (fino all'enunciato del Teorema 13.8.1), 13.9 (fino all'Osservazione 13.9.2), 13.10 (fino alla Definizione 13.10.1) e 13.11.

*Il teorema della convergenza dominata.

[**CD**].

*Confronto tra l'integrale di Riemann e quello di Lebesgue.

[**IAS**], Capitolo 14: nn. 14.1* e 14.2*.

Testi di riferimento:

[**IAS**], A. Villani, *Appunti del corso di Istituzioni di Analisi Superiore* (dispense on line);

[**T**], A. Villani, *Cenni di Topologia Generale* per il corso di Complementi di Analisi Matematica, a.a. 2006-07 (appunti on line);

[**M**], *Misure e loro proprietà* (appunti on line per il corso di Complementi di Analisi Matematica, a.a. 2006-07);

[**CD**], *Il teorema della convergenza dominata* (appunti on line per il corso di Complementi di Analisi Matematica, a.a. 2006-07);

(Le dimostrazioni relative agli argomenti contrassegnati con * possono essere omesse.)

Testi per consultazione:

V. Checcucci, A. Tognoli, E. Vesentini, *Lezioni di topologia generale,* Feltrinelli, Milano 1971

W. Rudin, *Real and complex Analysis,* McGraw-Hill, New York 1987.