Misure e loro proprietà

(appunti per il corso di Complementi di Analisi Matematica per Fisici, a.a. 2006-07)

Sia Ω un insieme non vuoto e sia $\mathcal{A}$ una σ-algebra in Ω.

Definizione 1. (*Misura*). Si chiama *misura* su $\mathcal{A}$ ogni funzione $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ verificante i seguenti postulati:

M_1) $\mu(\emptyset) = 0$;

M_2) $\mu \geq 0$ (cioè $\mu(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{A}$);

M_3) per ogni successione $\{A_n\}$ di insiemi appartenenti a $\mathcal{A}$, a due a due disgiunti, risulta

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \tag{1}$$

(postulato di $\sigma-$*additività*).

Notiamo che le espressioni che figurano al primo ed al secondo membro della (1) hanno perfettamente significato: la $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$ poiché l'insieme $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ appartiene a $\mathcal{A}$ (per la definizione di σ-algebra) e la somma della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ poichè, per il postulato M_2), si tratta di una serie a termini non negativi.

Esempio 1. La misura secondo Lebesgue m_h è una misura sulla σ-algebra $\mathcal{L}_h$ dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}^h$ misurabili secondo Lebesgue.

Esempio 2. (*La "delta" di Dirac*). Sia Ω un qualunque insieme non vuoto. Fissato un punto $\omega \in \Omega$, sia $\delta_\omega : \mathcal{P}(\Omega) \to \overline{\mathbb{R}}$ la funzione definita nel seguente modo:

$$\delta_\omega(A) = \begin{cases} 0 & \text{se } \omega \notin A \quad , \\ 1 & \text{se } \omega \in A \quad . \end{cases}$$

Verifichiamo che δ_ω è una misura su $\mathcal{P}(\Omega)$. I postulati M_1) e M_2) sono ovviamente verificati. Dimostriamo che vale anche M_3). Infatti, se $\{A_n\}$ è una qualunque successione di sottoinsiemi di Ω, a due a due disgiunti, si hanno le seguenti due possibilità:

– il punto ω non appartiene all'unione $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$ e quindi a nessuno degli insiemi A_n, $n \in \mathbb{N}$; in questo caso si ha:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \delta_\omega(A_n) = 0 + 0 + \ldots + 0 + \ldots = 0 = \delta_\omega\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \quad ;$$

– il punto ω appartiene all'unione $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$, dunque, essendo gli insiemi A_n, $n \in \mathbb{N}$, a due a due disgiunti, ω appartiene ad uno ed uno solo di tali insiemi; di conseguenza si ha:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \delta_\omega(A_n) = 0 + 0 + \ldots + 0 + 1 + 0 + 0 + \ldots = 1 = \delta_\omega\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \quad .$$

La misura δ_ω si chiama la *misura che concentra la massa unitaria nel punto* ω o, più semplicemente, la *delta di Dirac concentrata in* ω.

Esempio 3. (*La misura che conta i punti*). Sia Ω un qualunque insieme non vuoto e sia $\nu : \mathcal{P}(\Omega) \to \overline{\mathbb{R}}$ la funzione che associa ad ogni $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ il numero degli elementi dell'insieme A (intendendo, ovviamente, che $\nu(\emptyset) = 0$ e $\nu(A) = +\infty$ se l'insieme A è un insieme infinito).

Proviamo che ν è una misura.

I postulati M_1) e M_2) sono ovviamente verificati. Dimostriamo che vale anche M_3). Infatti, se $\{A_n\}$ è una qualunque successione di sottoinsiemi di Ω, a due a due disgiunti, si hanno le seguenti possibilità:

1) qualcuno dei termini della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n)$ è uguale $+\infty$, cioè qualcuno degli insiemi A_n è un insieme infinito; allora anche l'unione $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ è un insieme infinito e quindi si ha

$$\nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = +\infty = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n) \quad ;$$

2) i termini della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n)$ sono tutti reali; inoltre, infiniti di tali termini sono positivi, cioè maggiori o uguali a uno, quindi $\sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n) = +\infty$; allora è chiaro che l'unione $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ è un insieme infinito e pertanto si ha ancora l'uguaglianza

$$\nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n) \quad ;$$

3) i termini della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n)$ sono tutti reali e inoltre esiste $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\nu(A_n) = 0$ (cioè $A_n = \emptyset$) $\forall n > \overline{n}$; in questo caso è evidente che

$$\nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \nu\left(\bigcup_{n=1}^{\overline{n}} A_n\right) = \nu(A_1) + \ldots + \nu(A_{\overline{n}}) =$$

$$= \nu(A_1) + \ldots + \nu(A_{\overline{n}}) + 0 + 0 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n) \quad .$$

Osservazione 1. Notiamo che, nella precedente definizione, il postulato M_1) può essere rimpiazzato dalla richiesta che la funzione μ sia diversa dalla funzione costante $+\infty$ (la quale, ovviamente, verifica M_2) e, M_3)); in altre parole, è lecito sostituire a M_1) il seguente postulato:

M_1^*) $\exists A \in \mathcal{A} \ : \ \mu(A) \in \mathbb{R}$.

Infatti, M_1) implica, ovviamente, M_1^*). Viceversa, supposto vero M_1^*) e fissato $A \in \mathcal{A}$ tale che $\mu(A) \in \mathbb{R}$, si osserva che, essendo $A = A \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \ldots$, si ha

$$\mu(A) = \mu(A) + \mu(\emptyset) + \mu(\emptyset) + \ldots \ ,$$

da cui $\mu(\emptyset) = 0$ perché, altrimenti, la precedente serie avrebbe come somma $+\infty$.

Il successivo teorema mette in luce le principali proprietà delle misure.

Teorema 1. (Proprietà delle misure). *Sia $\mathcal{A}$ una σ-algebra nell'insieme Ω e sia μ una misura su $\mathcal{A}$. Valgono le seguenti proprietà.*

a) (Finita additività). *Se $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{A}$ sono insiemi a due a due disgiunti, allora*

$$\mu(A_1 \cup \ldots \cup A_k) = \mu(A_1) + \ldots + \mu(A_k) \quad . \tag{2}$$

b) (Modularità). *Siano $A, B \in \mathcal{A}$. Allora*

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B) \ . \tag{3}$$

c) (Monotonia). *Se $A, B \in \mathcal{A}$ sono tali che $A \subseteq B$, allora $\mu(A) \leq \mu(B)$.*

d) (Sottrattività). *Se $A, B \in \mathcal{A}$ sono tali che $A \subseteq B$ e inoltre $\mu(A) < +\infty$, allora*

$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A) \quad . \tag{4}$$

e) (Finita sub-additività). *Siano $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{A}$. Allora*

$$\mu(A_1 \cup \ldots \cup A_k) \ \leq \ \mu(A_1) + \ldots + \mu(A_k) \quad . \tag{5}$$

f) (σ-sub-additività). *Sia $\{A_n\}$ una qualunque successione di insiemi appartenenti alla σ-algebra $\mathcal{A}$. Allora*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \ \leq \ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \ . \tag{6}$$

g) (Continuità verso l'alto). *Per ogni successione $\{A_n\}$ di insiemi appartenenti alla σ-algebra $\mathcal{A}$ tale che $A_n \uparrow A$ risulta*

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A) \ . \tag{7}$$

h) (Continuità verso il basso). *Per ogni successione $\{B_n\}$ di insiemi appartenenti alla σ-algebra $\mathcal{A}$, con $\mu(B_1) < +\infty$, tale che $B_n \downarrow B$ risulta*

$$\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \mu(B) \ . \tag{8}$$

Dimostrazione. a) $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{A}$ sono insiemi a due a due disgiunti, si ha

$$\mu(A_1 \cup \ldots \cup A_k) \;=\; \mu(A_1 \cup \ldots \cup A_k \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \ldots) \;=$$

(per il postulato M_3))

$$=\; \mu(A_1) + \ldots + \mu(A_k) + \mu(\emptyset) + \mu(\emptyset) + \ldots \;=$$

(per il postulato M_1))

$$=\; \mu(A_1) + \ldots + \mu(A_k) + 0 + 0 + \ldots \;=\; \mu(A_1) + \ldots + \mu(A_k) \;.$$

b) Esprimiamo gli insiemi $A \cup B$ e B ognuno come unione di due insiemi disgiunti, appartenenti alla σ-algebra $\mathcal{A}$, nel seguente modo:

$$A \cup B \;=\; A \cup (B \setminus A) \quad , \qquad B \;=\; (A \cap B) \cup (B \setminus A) \quad ;$$

abbiamo allora, per la proprietà di finita additività,

$$\mu(A \cup B) \;=\; \mu(A) + \mu(B \setminus A) \quad , \tag{9}$$

$$\mu(B) \;=\; \mu(A \cap B) + \mu(B \setminus A) \quad . \tag{10}$$

Sommando membro a membro la (9) e l'uguaglianza che si ricava dalla (10) scambiando il primo con il secondo membro, otteniamo

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) + \mu(B \setminus A) \;=\; \mu(A) + \mu(B) + \mu(B \setminus A) \quad . \tag{11}$$

A questo punto, per conseguire la tesi, si ragiona nel modo seguente:

— se $\mu(B \setminus A) < +\infty$ la (3) segue subito dalla (11) per la legge di cancellazione dell'addizione in $\overline{\mathbb{R}}$;

— se $\mu(B \setminus A) = +\infty$, allora dalla (9) si ha $\mu(A \cup B) = +\infty$ e, analogamente, dalla (10) si ricava $\mu(B) = +\infty$; pertanto sia il primo che il secondo membro della (3) sono uguali a $+\infty$.

c) Poichè $A \subseteq B$, e quindi $A \cap B = A$, la (10) si scrive

$$\mu(B) \;=\; \mu(A) + \mu(B \setminus A) \quad ; \tag{12}$$

da questa, tenuto conto del postulato M_2), si ottiene subito che $\mu(B) \geq \mu(A)$.

d) Vale ancora la (12). Inoltre, dato che l'addendo $\mu(A)$ è un numero reale, è lecito trasportare tale addendo dal secondo al primo membro. Ne segue la tesi.

e) Procediamo per induzione sul numero k degli insiemi $A_1, A_2, \ldots, A_k$. La (5) è banalmente vera per $k = 1$; inoltre, nel caso $k = 2$, la sua validità segue subito dalla proprietà di modularità, tenuto conto del postulato M_2). Infine, supposta vera la (5) per l'indice k, si prova facilmente che essa continua a valere anche nel caso di $k+1$ insiemi; infatti:

$$\mu(A_1 \cup \ldots \cup A_k \cup A_{k+1}) \;\leq \qquad \text{(per il caso } k = 2\text{)}$$

$$\leq\; \mu(A_1 \cup \ldots \cup A_k) + \mu(A_{k+1}) \;\leq \qquad \text{(per l'ipotesi induttiva)}$$

$$=\; \mu(A_1) + \ldots \mu(A_k) + \mu(A_{k+1}) \;\; .$$

f) Possiamo esprimere l'unione $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$ come unione numerabile $\cup_{n=1}^{\infty} B_n$ di insiemi appartenenti alla σ-algebra $\mathcal{A}$, a due a due disgiunti e tali che $B_n \subseteq A_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$; infatti basta considerare la successione di insiemi $\{B_n\}$ così definita:

$$B_n = \begin{cases} A_1 & \text{se } n = 1, \\ A_n \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1}) & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

Pertanto, per il postulato di σ-additività e la proprietà di monotonia, possiamo concludere che

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \;=\; \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \;\leq\; \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \; .$$

g) Osserviamo preliminarmente che, essendo la successione $\{A_n\}$ non decrescente, l'esistenza del limite $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$ è assicurata dalla proprietà di monotonia; d'altra parte ha senso considerare la $\mu(A)$ dato che l'insieme $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ appartiene alla σ-algebra $\mathcal{A}$.

Per provare che è vera l'uguaglianza (7), notiamo che, per la non decrescenza della successione $\{A_n\}$, l'insieme $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ si può esprimere come unione di insiemi di $\mathcal{A}$ a due a due disgiunti nel modo seguente:

$$A \;=\; A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup (A_3 \setminus A_2) \cup \ldots \cup (A_n \setminus A_{n-1}) \cup \ldots \;;$$

pertanto, per il postulato di σ-additività, abbiamo:

$$\mu(A) \;=\; \mu(A_1) + \mu(A_2 \setminus A_1) + \mu(A_3 \setminus A_2) + \ldots + \mu(A_n \setminus A_{n-1}) + \ldots \;. \tag{13}$$

A questo punto, per dimostrare che vale la (7), distinguiamo due casi:

— se risulta $\mu(A_{\overline{n}}) = +\infty$ per qualche $\overline{n} \in \mathbb{N}$, allora, per la proprietà di monotonia, si ha $\mu(A_n) = +\infty$ $\forall n \geq \overline{n}$ e quindi $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = +\infty$; ma, ancora per la proprietà di monotonia, si ha pure $\mu(A) = +\infty$, dunque vale la (7);

— se $\mu(A_n) < +\infty$ $\forall n \in \mathbb{N}$, allora, grazie alla proprietà di sottrattività, abbiamo:

$$\mu(A_n \setminus A_{n-1}) = \mu(A_n) - \mu(A_{n-1}) \qquad \forall n \geq 2$$

e quindi la somma parziale n-ma della serie che figura nella (13) è uguale a

$$\mu(A_1) + [\mu(A_2) - \mu(A_1)] + [\mu(A_3) - \mu(A_2)] + \ldots + [\mu(A_n) - \mu(A_{n-1})] \; = \; \mu(A_n) \; ;$$

conseguentemente vale la (7).

h) Anche questa volta l'esistenza del limite $\lim_{n\to\infty} \mu(B_n)$ è assicurata dalla proprietà di monotonia ed ha senso considerare la $\mu(B)$ dato che l'insieme $B = \cap_{n=1}^{\infty} B_n$ fa parte della σ-algebra $\mathcal{A}$.

Per provare la (8) consideriamo la successione di insiemi $\{B_1 \setminus B_n\}$ ed osserviamo che è $B_1 \setminus B_n \in \mathcal{A}\ \forall n \in \mathbb{N}$, nonché $B_1 \setminus B_n \uparrow B_1 \setminus B$; pertanto, per la proprietà di continuità verso l'alto, si ha

$$\lim_{n\to\infty} \mu(B_1 \setminus B_n) \; = \; \mu(B_1 \setminus B) \; .$$

Poiché $\mu(B_1) < +\infty$, per la proprietà di sottrattività di μ la precedente relazione di limite si scrive:

$$\lim_{n\to\infty} [\mu(B_1) - \mu(B_n)] \; = \; \mu(B_1) - \mu(B)$$

e da questa si ottiene

$$\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) \; = \; \lim_{n\to\infty} \{-[-\mu(B_n)]\} \; = \; \lim_{n\to\infty} \{-[\mu(B_1) - \mu(B_n) - \mu(B_1)]\} \; =$$
$$= \; \lim_{n\to\infty} \{-[\mu(B_1) - \mu(B_n)] + \mu(B_1)\} \; = \; -[\mu(B_1) - \mu(B)] + \mu(B_1) \; = \; \mu(B) \; .$$

Osservazione 2. L'ipotesi $\mu(A) < +\infty$ nella proprietà di sottrattività è essenziale non solo per garantire che l'espressione $\mu(B) - \mu(A)$ abbia significato, ma soprattutto perchè in assenza di tale ipotesi, cioè nella seguente situazione:

$$\text{(14)} \qquad A, B \in \mathcal{A} \; ; \quad A \subseteq B \; ; \quad \mu(A) = \mu(B) = +\infty \quad ,$$

non è possibile fare alcuna previsione sul valore di $\mu(B \setminus A)$. Infatti, le ipotesi (14) sono compatibili con il fatto che il valore di $\mu(B \setminus A)$ sia un qualunque elemento dell'intervallo $[0, +\infty]$.

Per renderci conto di ciò possiamo considerare i seguenti facili esempi relativi alla misura di Lebesgue in dimensione uno.

Sia $B = \mathbb{R}$. Allora:

– se L è un qualunque numero non negativo e $A = \mathbb{R} \setminus [0, L]$ (quindi $\mathrm{m}_1(A) = +\infty$ grazie alla proprietà di sottrattività), risulta $\mathrm{m}_1(B \setminus A) = \mathrm{m}_1([0, L]) = L$;

– se $A = [0, +\infty[$, si ha $\mathrm{m}_1(B \setminus A) = \mathrm{m}_1(\,] - \infty, 0[\,) = +\infty$.

Osservazione 3. Una formulazione equivalente della proprietà di continuità verso il basso si ottiene rimpiazzando l'ipotesi $\mu(B_1) < +\infty$ con l'ipotesi che sia $\mu(B_{\overline{n}}) < +\infty$ per qualche $\overline{n} \in \mathbb{N}$. Per rendersi conto di ciò basta considerare la successione di insiemi

$$\text{(15)} \qquad B_{\overline{n}} \, , \, B_{\overline{n}+1} \, , \, B_{\overline{n}+2} \, , \, \ldots$$

(la quale soddisfa l'ipotesi che il primo insieme abbia misura finita) ed applicare la proprietà di continuità verso il basso (così come formulata in h)) a tale successione, tenendo presente che è

$$\bigcap_{n=\overline{n}}^{\infty} B_n \;=\; \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \;=\; B$$

e che le due successioni (in $\overline{\mathbb{R}}$):

$$\{\mu(B_n)\}_{n=\overline{n},\overline{n}+1,\overline{n}+2,\ldots} \qquad \text{e} \qquad \{\mu(B_n)\}_{n=1,2,3,\ldots}$$

hanno lo stesso limite (infatti, se $\{x_n\}$ è una successione in $\overline{\mathbb{R}}$ e $\{y_n\}$ è una qualunque delle successioni che si ottengono da $\{x_n\}$ eliminando un numero finito di termini, allora le due successioni $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ hanno gli stessi maggioranti definitivi, gli stessi minoranti definitivi e, di conseguenza, lo stesso massimo limite e lo stesso minimo limite; pertanto la successione $\{x_n\}$ converge (in $\overline{\mathbb{R}}$) se e soltanto se converge la $\{y_n\}$ ed in questo caso si ha $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$).

Osservazione 4. Osserviamo ancora, a proposito della proprietà di continuità verso il basso, che il fatto che per qualcuno degli insiemi B_n risulti $\mu(B_n) < +\infty$ è essenziale per garantire l'uguaglianza (8). Infatti, se $\{B_n\}$ è una successione di insiemi appartenenti a $\mathcal{A}$ tale che $B_n \downarrow B$ e inoltre $\mu(B_n) = +\infty\ \forall n \in \mathbb{N}$ (quindi $\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = +\infty$), allora non è detto che risulti $\mu(B) = +\infty$, anzi, in generale, non è possibile fare alcuna previsione sul valore di $\mu(B)$.

Per renderci conto della precedente affermazione possiamo considerare il seguente facile esempio con la misura di Lebesgue in dimensione uno.

Sia B un qualunque insieme della σ-algebra $\mathcal{L}_1$ e consideriamo come successione $\{B_n\}$ la successione $\{B \cup [n, +\infty[\}$. Si ha allora, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $B_n \in \mathcal{L}_1$ e $\mathrm{m}_1(B_n) = +\infty$. Si ha inoltre $B_n \downarrow B$. Poiché l'insieme $B \in \mathcal{L}_1$ è arbitrario, anche la sua misura $\mathrm{m}_1(B)$ è un arbitrario elemento dell'intervallo $[0, +\infty]$.

Definizione 2. (*Misura σ-finita*). Sia $\mathcal{A}$ una σ-algebra nell'insieme $\Omega \neq \emptyset$ e sia μ una misura su $\mathcal{A}$. Si dice che la misura μ è *σ-finita* se esiste una successione $\{A_n\}$ di insiemi di $\mathcal{A}$ tale che $A_n \uparrow \Omega$ e $\mu(A_n) < +\infty\ \forall n \in \mathbb{N}$.

La precedente condizione è ovviamente soddisfatta se la misura μ è *finita* (cioè se si ha $\mu(A) < +\infty\ \forall A \in \mathcal{A}$ ovvero, ciò che è perfettamente equivalente, se $\mu(\Omega) < +\infty$); basta considerare infatti, in questo caso, come successione $\{A_n\}$, la successione $\Omega\,,\ \Omega\,,\ldots\,,\ \Omega\,,\ldots$.

Si ha pertanto la

Proposizione 1. *Ogni misura finita μ è anche σ-finita.*

La successiva Proposizione 2 indica altri modi equivalenti di definire le misure σ-finite.

Proposizione 2. *Sia $\mathcal{A}$ una σ-algebra nell'insieme $\Omega \neq \emptyset$ e sia μ una misura su $\mathcal{A}$. Sono fatti equivalenti:*

i) *la misura μ è σ-finita;*

ii) *esiste una successione $\{B_n\}$, di insiemi appartenenti a $\mathcal{A}$, tale che $\cup_{n=1}^{\infty} B_n = \Omega$ e $\mu(B_n) < +\infty\ \forall n \in \mathbb{N}$;*

iii) *esiste una successione $\{C_n\}$ di insiemi di $\mathcal{A}$, a due a due disgiunti, tale che $\cup_{n=1}^{\infty} C_n = \Omega$ e $\mu(C_n) < +\infty\ \forall n \in \mathbb{N}$.*

Dimostrazione. i) $\Longrightarrow$ ii). Basta prendere come successione $\{B_n\}$ la stessa successione $\{A_n\}$ della Definizione 2.

ii) $\Longrightarrow$ iii). Basta prendere come successione $\{C_n\}$ la successione definita nel modo seguente:

$$C_n = \begin{cases} B_1 & \text{se } n = 1\ , \\ B_n \setminus (B_1 \cup \ldots \cup B_{n-1}) & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

(la monotonia di μ implica che $\mu(C_n) \leq \mu(B_n) < +\infty\ \forall n \in \mathbb{N}$).

iii) $\Longrightarrow$ i). Basta prendere come successione $\{A_n\}$ la successione $\{C_1 \cup \ldots \cup C_n\}$ (il fatto che sia $\mu(A_n) < +\infty\ \forall n \in \mathbb{N}$ si ottiene grazie alla proprietà di finita subadditività di μ).

Esempi 4.

1) La misura di Lebesgue m_h è σ-finita. Per verificare ciò basta considerare la successione $\{A_n\} = \{[-n, n]^h\}$.

Abbiamo così un esempio di misura σ-finita ma non finita.

2) Sia Ω un insieme non vuoto e consideriamo, sulla σ-algebra $\mathcal{P}(\Omega)$, la misura ν "che conta i punti" (Esempio 3).

Proviamo che ν è σ-finita se e soltanto se l'insieme Ω è finito oppure numerabile.

Infatti, se Ω è finito, la tesi segue dalla Proposizione 1. Se, invece, Ω è numerabile, allora, considerata una qualunque bigezione $n \to \omega_n$ tra $\mathbb{N}$ e Ω, per verificare la Definizione 2 basta prendere come successione $\{A_n\}$ quella definita nel seguente modo: $A_n = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Viceversa, se ν è σ-finita, cioè se esiste una successione $\{A_n\}$ avente le caratteristiche indicate nella Definizione 2, allora ogni insieme A_n, $n \in \mathbb{N}$, è finito (o vuoto), dunque l'insieme $\Omega = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ è finito oppure numerabile.