Alfonso Villani

Cenni di Topologia Generale

per il corso di Complementi di Analisi Matematica
per gli studenti di Fisica
(a.a. 2006-07)

Università degli studi di Catania
Dipartimento di Matematica e Informatica

Indice

1. Spazi topologici.

Gli spazi topologici sono le strutture più generali nelle quali ha senso introdurre e studiare il concetto di funzione continua.

Vi sono vari modi equivalenti di dare la definizione di spazio topologico. La definizione adottata in questi appunti è quella basata sull'assegnazione, per ciascun punto dello spazio, della corrispondente famiglia degli intorni.

Definizione 1.1. (*Spazio topologico*). Si chiama *spazio topologico* una struttura costituita da un insieme non vuoto S, per ogni elemento (o *punto*) del quale sia assegnata una famiglia non vuota $\mathcal{U}(x)$ di sottoinsiemi di S (la *famiglia degli intorni* di x), in modo tale che siano soddisfatti i seguenti postulati:

u$_1$) $x \in U \quad \forall U \in \mathcal{U}(x)\,;$

u$_2$) $U \in \mathcal{U}(x)\,,\ U \subseteq V \subseteq S \implies V \in \mathcal{U}(x)\,;$

u$_3$) $U_1, U_2 \in \mathcal{U}(x) \implies U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}(x)\,;$

u$_4$) $U \in \mathcal{U}(x) \implies \exists V \in \mathcal{U}(x) \ :\ U \in \mathcal{U}(y) \quad \forall y \in V$
(postulato di *permanenza degli intorni*).

In maniera più formale, uno spazio topologico è una coppia $(S,\mathcal{U})$, formata da un insieme non vuoto S (il *sostegno* dello spazio topologico) e da un'applicazione $x \to \mathcal{U}(x)$ (la *mappa degli intorni*), definita nell'insieme S ed a valori in $\mathcal{P}(\mathcal{P}(S)) \setminus \{\emptyset\}$ (la collezione di tutte le famiglie non vuote di sottoinsiemi di S), verificante gli assiomi u$_1$) – u$_4$).

Nel seguito faremo uso della notazione $(S,\mathcal{U})$ solo quando sarà necessario indicare in maniera esplicita la mappa degli intorni, altrimenti parleremo semplicemente di spazio topologico S. Adopereremo inoltre il termine *topologia* (su un insieme S) come sinonimo di mappa degli intorni.

Esempi 1.1.

a) (*Topologia indiscreta*). Qualunque sia l'insieme $S \neq \emptyset$, è evidente che l'applicazione che ad ogni $x \in S$ associa, come famiglia degli intorni di x, la famiglia $\{S\}$, avente come unico elemento l'insieme S, verifica i postulati u$_1$) – u$_4$). Lo spazio topologico, che si viene così a determinare, si dice ottenuto introducendo nell'insieme S la *topologia indiscreta.* In maniera più concisa ci riferiremo a tale spazio chiamandolo "lo spazio topologico indiscreto S" oppure "lo spazio S, con la topologia indiscreta".

Notiamo che, per il postulato u$_2$), la famiglia $\{S\}$ è la più piccola famiglia – nel senso dell'inclusione insiemistica – che può essere assunta come famiglia degli intorni di un punto $x \in S$.

b) (*Topologia discreta*). Dato un qualunque insieme $S \neq \emptyset$, si verifica facilmente che per l'applicazione che ad ogni punto $x \in S$ fa corrispondere, come famiglia degli intorni di x, la famiglia di tutti i sottoinsiemi U di S che contengono il punto x, cioè:

$$\mathcal{U}(x) = \{U \in \mathcal{P}(S) \,:\, x \in U\} \quad ,$$

sono soddisfatti i postulati u$_1$) – u$_4$) (in particolare, per provare che vale u$_4$), basta prendere $V = U$). Lo spazio topologico così determinato si dice ottenuto dotando l'insieme S della *topologia discreta.* In maniera più concisa chiameremo tale spazio "lo spazio topologico discreto S" o "lo spazio S, con la topologia discreta".

Questa volta, per il postulato u$_1$), la famiglia $\mathcal{U}(x) = \{U \in \mathcal{P}(S) \,:\, x \in U\}$ è la massima famiglia di sottoinsiemi di S che può essere presa come famiglia degli intorni di un punto $x \in S$.

c) (*Topologia cofinita*). Dato un qualunque insieme $S \neq \emptyset$, è facile verificare che, prendendo come famiglia degli intorni di un punto $x \in S$ la famiglia di tutti i sottoinsiemi U di S che contengono x ed hanno complementare finito (eventualmente vuoto), cioè:

$$\mathcal{U}(x) = \{U \in \mathcal{P}(S) \,:\, x \in U \text{ e } S \setminus U \text{ è finito}\} \quad ,$$

sono soddisfatti i quattro postulati $u_1) - u_4)$ (in particolare, per verificare che vale $u_3)$, conviene usare le formule di De Morgan, mentre, per provare che è vero $u_4)$, basta prendere $V = U$). Lo spazio topologico così determinato si dice ottenuto dotando l'insieme S della *topologia cofinita*.

Ovviamente, se l'insieme S è un insieme finito, la topologia cofinita coincide con quella discreta, mentre ciò non è vero se S è infinito. Inoltre, nel caso particolare di un insieme unitario $S = \{c\}$, è chiaro che vi è un solo modo possibile di introdurre una topologia in S, dunque, in questo caso (e solo in questo), topologia indiscreta, discreta e cofinita sono la stessa cosa.

Esempio 1.2. (*Topologia indotta da una metrica*). Supponiamo che (S, d) sia uno spazio metrico. Allora, se si definisce la famiglia degli intorni $\mathcal{U}(x)$ di un qualsiasi punto $x \in S$ ponendo

$$\mathcal{U}(x) = \{U \in \mathcal{P}(S) \,:\, \exists r > 0 \text{ tale che } B(x, r) \subseteq U\} \quad ,$$

dove, come di consuetudine, $B(x, r)$ denota il disco aperto dello spazio metrico (S, d) di centro x e raggio r:

$$B(x, r) \;=\; \{z \in S \,:\, d(z, x) < r\} \quad ,$$

si ha che la famiglia $\mathcal{U}(x)$ non è vuota, qualunque sia il punto $x \in S$, e sono soddisfatti i postulati $u_1) - u_4)$. In particolare, per verificare che vale $u_3)$, basta tenere presente che l'intersezione $B(x, r_1) \cap B(x, r_2)$ di due dischi aperti aventi lo stesso centro x è uguale al disco aperto $B(x, r)$ di centro x e raggio $r = \min\{r_1, r_2\}$. Invece, per provare che vale $u_4)$, si ragiona nel seguente modo: se $U \in \mathcal{U}(x)$, esiste $r > 0$ tale che $B(x, r) \subseteq U$; inoltre anche l'insieme $V = B(x, r)$ appartiene a $\mathcal{U}(x)$ ed è vero che $U \in \mathcal{U}(y)$ per ogni $y \in V$; infatti, se $y \in V$, cioè $d(y, x) < r$, posto $\delta = r - d(y, x)$, per la disuguaglianza triangolare si ha $B(y, \delta) \subseteq B(x, r) \subseteq U$, dunque $U \in \mathcal{U}(y)$.

Lo spazio topologico, che rimane così individuato, si dice ottenuto dotando l'insieme S della *topologia indotta* (o *determinata*) *dalla metrica d*.

Ad esempio, è facile verificare che, per un qualsiasi insieme $S \neq \emptyset$, lo spazio topologico discreto S coincide con lo spazio che si ottiene dotando l'insieme S della topologia indotta dalla *metrica discreta* d su S, cioè $d : S \times S \to \mathbb{R}$ data da:

$$d(x, y) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{se } x = y, \\ 1 & \text{se } x \neq y. \end{cases}$$

Definizione 1.2. (*Spazio metrizzabile*). Uno spazio topologico $(S, \mathcal{U})$ si dice *metrizzabile* se esiste una metrica d su S tale che la topologia indotta dalla metrica d coincide con la topologia $\mathcal{U}$.

Abbiamo già osservato che uno spazio topologico discreto è metrizzabile. Invece, gli spazi topologici indiscreti e quelli dotati della topologia cofinita, se non sono anche spazi discreti, non sono metrizzabili. Per verificare questa affermazione anticipiamo il concetto di spazio topologico di Hausdorff.

Definizione 1.3. (*Spazio di Hausdorff*). Si dice che uno spazio topologico S è uno *spazio di Hausdorff* (o *spazio T_2* o anche *spazio separato*) se è soddisfatto il seguente assioma di separazione:

$$\forall x_1, x_2 \in S\,,\; x_1 \neq x_2 \quad \exists U_1 \in \mathcal{U}(x_1),\; \exists U_2 \in \mathcal{U}(x_2) \;:\; U_1 \cap U_2 = \emptyset \tag{1.1}$$

(cioè: punti distinti di S possiedono intorni disgiunti).

Ovviamente, né gli spazi indiscreti (purché dotati di più di un punto) né gli spazi muniti della topologia cofinita (purché aventi sostegno infinito) sono spazi di Hausdorff.

Invece tutti gli spazi metrizzabili sono spazi di Hausdorff. Infatti, denotata con d una metrica su S che determina la topologia di S e considerati due qualsiasi punti distinti di S, x_1 e x_2, per avere due intorni disgiunti di tali punti basta prendere due dischi aperti $B(x_1, r_1)$ e $B(x_2, r_2)$, i cui raggi verificano la disuguaglianza $r_1 + r_2 \leq d(x_1, x_2)$.

Possiamo pertanto concludere che gli spazi topologici indiscreti (con più di un punto) e gli spazi con la topologia cofinita (con infiniti punti) non sono metrizzabili.

Osserviamo infine che, se lo spazio topologico S è metrizzabile ed ha più di un punto, allora vi sono infinite metriche distinte sull'insieme S che determinano la topologia di S. Per convincersi di ciò, basta pensare che, se d è una metrica su S, allora, moltiplicando d per una qualunque costante positiva, si ottiene un'altra metrica su S, ma, come è facile verificare, le due metriche inducono su S la stessa topologia.

Ritorneremo più avanti sull'argomento "metriche che inducono la stessa topologia".

2. Insiemi aperti. Interno di un insieme.

Definizione 2.1. (*Insieme aperto*). Sia $(S,\mathcal{U})$ uno spazio topologico. Si dice che un insieme $A \subseteq S$ è un *insieme aperto* se $A = \emptyset$ oppure $A \neq \emptyset$ ed ogni punto di A possiede almeno un intorno contenuto in A:

$$\forall x \in A \quad \exists U \in \mathcal{U}(x) \ : \ U \subseteq A \quad . \tag{2.1}$$

Tenuto conto del postulato u_2), possiamo dire, in maniera del tutto equivalente, che un insieme $A \subseteq S$ è aperto se, e soltanto se, $A = \emptyset$ oppure $A \neq \emptyset$ e A è intorno di ogni suo punto:

$$A \in \mathcal{U}(x) \quad \forall x \in A \quad . \tag{2.2}$$

Proposizione 2.1. (Proprietà essenziali della famiglia degli insiemi aperti). *La famiglia $\mathcal{T}$ degli insiemi aperti di uno spazio topologico $(S,\mathcal{U})$ ha le seguenti proprietà:*

a_1) $\emptyset, S \in \mathcal{T}$;

a_2) *se $\{A_i \ : \ i \in I\}$ è una qualunque famiglia di insiemi appartenenti a $\mathcal{T}$, allora anche l'unione $\bigcup_{i\in I} A_i$ appartiene a $\mathcal{T}$;*

a_3) $A_1, A_2 \in \mathcal{T} \implies A_1 \cap A_2 \in \mathcal{T}$.

Dimostrazione. L'insieme vuoto appartiene a $\mathcal{T}$ per definizione; inoltre, dato che, per definizione, la famiglia $\mathcal{U}(x)$ è non vuota (qualunque sia il punto $x \in S$), l'assioma u_2) implica che anche l'insieme S appartiene a $\mathcal{T}$. Ciò prova la validità della a_1). Le proprietà a_2) e a_3) seguono subito dalla definizione di insieme aperto, teuto conto, per quanto riguarda la a_3), dell'assioma u_3).

Dalla a_3), ragionando per induzione, si deduce in modo ovvio il

Corollario 2.1. *L'intersezione di una famiglia finita di insiemi aperti di uno spazio topologico S è un aperto di S.*

Abbiamo chiamato "essenziali" le tre proprietà a_1) – a_3) poiché, come vedremo (cfr. la successiva Osservazione 4.1), una definizione equivalente di spazio topologico è quella basata sulla famiglia degli aperti anziché sulla mappa degli intorni; rispetto a tale definizione, che assume come concetto primitivo quello di insieme aperto anziché quello di intorno, le a_1) – a_3) non sono più proprietà che si dimostrano, ma diventano esse stesse gli assiomi.

Esempi 2.1.

a) (*Topologia indiscreta*). La famiglia degli insiemi aperti di uno spazio topologico indiscreto S è $\{\emptyset, S\}$.

b) (*Topologia discreta*). La famiglia degli insiemi aperti di uno spazio topologico discreto S coincide con $\mathcal{P}(S)$.

c) (*Topologia cofinita*). Se S ha la topologia cofinita, la famiglia $\mathcal{T}$ degli aperti di S è costituita dagli insiemi $\emptyset$, S e da tutti i sottoinsiemi A di S il cui complementare $S \setminus A$ è un insieme finito.

Definizione 2.2. (*Interno di un insieme*). Sia $(S,\mathcal{U})$ uno spazio topologico e sia $X \subseteq S$. Dato un elemento $x_0 \in S$, si dice che x_0 è un *punto interno* a X se

$$\exists U \in \mathcal{U}(x_0) \ : \ U \subseteq X \quad . \tag{2.3}$$

L'insieme costituito da tutti i punti $x_0 \in S$ che sono interni all'insieme X si chiama *interno* di X e si denota con il simbolo $\overset{\circ}{X}$.

Ovviamente risulta

$$\overset{\circ}{X} \subseteq X \tag{2.4}$$

per qualunque insieme $X \subseteq S$; inoltre

$$X \subseteq Y \subseteq S \quad \Longrightarrow \quad \overset{\circ}{X} \subseteq \overset{\circ}{Y} \quad . \tag{2.5}$$

Dalle definizioni di insieme aperto e di interno di un insieme si ha subito la seguente

Proposizione 2.2. (Caratterizzazione degli insiemi aperti). *Un sottoinsieme A di uno spazio topologico S è aperto se, e soltanto se,*

$$\overset{\circ}{A} = A \quad . \tag{2.6}$$

Proviamo adesso la

Proposizione 2.3. (Caratterizzazione dell'interno di un insieme). *Sia $(S,\mathcal{U})$ uno spazio topologico e sia $X \subseteq S$.*

L'insieme $\overset{\circ}{X}$ è il massimo – rispetto all'inclusione insiemistica – *insieme aperto di S contenuto in X .*

Dimostrazione. Occorre provare che sono veri i seguenti due fatti:

i) $\overset{\circ}{X}$ è un insieme aperto;

ii) $B \subseteq X$, B aperto $\Longrightarrow$ $B \subseteq \overset{\circ}{X}$.

Dimostriamo che $\overset{\circ}{X}$ è un insieme aperto. Supposto che sia $\overset{\circ}{X} \neq \emptyset$ e considerato un qualsiasi elemento x_0 di $\overset{\circ}{X}$, facciamo vedere che

$$\exists V \in \mathcal{U}(x_0) \ : \ V \subseteq \overset{\circ}{X} \quad .$$

Infatti, dato che $x_0 \in \overset{\circ}{X}$, esiste $U \in \mathcal{U}(x_0)$ tale che $U \subseteq X$; ma, per il postulato u_4), esiste $V \in \mathcal{U}(x_0)$ tale che $U \in \mathcal{U}(y)$ $\forall y \in V$, dunque ogni elemento $y \in V$ appartiene pure a $\overset{\circ}{X}$, cioè $V \subseteq \overset{\circ}{X}$, come dovevamo dimostrare.

La ii) segue subito dalla Proposizione 2.2 e dalla (2.5).

Abbiamo dato la definizione di insieme aperto tramite gli intorni dei punti. Viceversa, si ha la seguente

Proposizione 2.4. (Caratterizzazione degli intorni mediante gli aperti). *Sia $(S,\mathcal{U})$ uno spazio topologico e sia $\mathcal{T}$ la famiglia degli insiemi aperti di S.*

Dati comunque un punto $x_0 \in S$ ed un insieme $U \in \mathcal{P}(S)$, si ha l'equivalenza

$$U \in \mathcal{U}(x_0) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists A \in \mathcal{T} \ : \ x_0 \in A \subseteq U \tag{2.7}$$

Dimostrazione. Se $U \in \mathcal{U}(x_0)$, allora $x_0 \in \overset{\circ}{U}$ e quindi, grazie alla Proposizione 2.3, si ha la tesi, prendendo $A = \overset{\circ}{U}$. Viceversa, se esiste $A \in \mathcal{T}$ tale che $x_0 \in A \subseteq U$, allora, per la Proposizione 2.2 e per la (2.5), si ha $x_0 \in \overset{\circ}{A} \subseteq \overset{\circ}{U}$ e quindi, per la definizione di $\overset{\circ}{U}$ e per il postulato u$_2$), risulta $U \in \mathcal{U}(x_0)$.

Proposizione 2.5. (Proprietà essenziali dell'operatore "interno di un insieme"). *Sia* $(S,\mathcal{U})$ *uno spazio topologico. L'applicazione* $X \to \overset{\circ}{X}$ *, da* $\mathcal{P}(S)$ *in* $\mathcal{P}(S)$*, ha le seguenti proprietà:*

o$_1$) $\overset{\circ}{X} \subseteq X \quad \forall X \in \mathcal{P}(S)\,;$

o$_2$) $\overset{\circ}{S} = S\,;$

o$_3$) $\overset{\circ}{\overset{\circ}{X}} = \overset{\circ}{X} \quad \forall X \in \mathcal{P}(S)\,;$

o$_4$) $\overset{\circ}{\overbrace{X \cap Y}} = \overset{\circ}{X} \cap \overset{\circ}{Y} \quad \forall X, Y \in \mathcal{P}(S)\,.$

Dimostrazione. La o$_1$) è la (2.4). La o$_2$) segue dalle Proposizioni 2.1 e 2.2. La o$_3$) segue dalle Proposizioni 2.3 e 2.2. Proviamo la o$_4$). Dalla (2.5) segue che valgono le inclusioni $\overset{\circ}{\overbrace{X \cap Y}} \subseteq \overset{\circ}{X}$, $\overset{\circ}{\overbrace{X \cap Y}} \subseteq \overset{\circ}{Y}$, dunque è vero che $\overset{\circ}{\overbrace{X \cap Y}} \subseteq \overset{\circ}{X} \cap \overset{\circ}{Y}$. Viceversa, dato che $\overset{\circ}{X} \cap \overset{\circ}{Y}$ è un aperto (proprietà a$_3$) della Proposizione 2.1) contenuto in $X \cap Y$, per la Proposizione 2.3 si ha pure $\overset{\circ}{X} \cap \overset{\circ}{Y} \subseteq \overset{\circ}{\overbrace{X \cap Y}}$.

Anche in questo caso abbiamo parlato di proprietà "essenziali" poichè vi è (cfr. l'Osservazione 4.3) un'altra definizione, equivalente, di spazio topologico, basata sull'operatore "interno di un insieme", rispetto alla quale le proprietà o$_1$) – o$_4$) diventano gli assiomi.

3. Insiemi chiusi. Chiusura di un insieme.

Definizione 3.1. (*Insieme chiuso*). Sia S uno spazio topologico. Si dice che un insieme $C \subseteq S$ è un *insieme chiuso* se il suo complementare $S \setminus C$ è un insieme aperto.

Proposizione 3.1. (Proprietà essenziali della famiglia degli insiemi chiusi). *La famiglia* $\mathcal{C}$ *degli insiemi chiusi di uno spazio topologico* S *ha le seguenti proprietà:*

c$_1$) $\emptyset, S \in \mathcal{C}\,;$

c$_2$) *se* $\{C_i\,:\, i \in I\}$ *è una qualunque famiglia di insiemi appartenenti a* $\mathcal{C}$*, allora anche l'intersezione* $\bigcap_{i \in I} C_i$ *appartiene a* $\mathcal{C}$ *;*

c$_3$) $C_1, C_2 \in \mathcal{C} \implies C_1 \cup C_2 \in \mathcal{C}\,.$

Dimostrazione. Le proprietà c$_1$) – c$_3$) seguono subito dalle analoghe proprietà a$_1$) – a$_3$) della famiglia degli insiemi aperti, tenendo presente la definizione di insieme chiuso ed utilizzando opportunamente le formule di De Morgan.

Corollario 3.1. *L'unione di una famiglia finita di insiemi chiusi di uno spazio topologico* S *è un insieme chiuso di* S*.*

Le proprietà c$_1$) – c$_3$) diventano assiomi nella definizione di spazio topologico che assume come primitivo il concetto di insieme chiuso (cfr. il Teorema 4.2).

Esempi 3.1.

a) (*Topologia indiscreta*). La famiglia degli insiemi chiusi di uno spazio topologico indiscreto S è $\{\emptyset, S\}$.

b) (*Topologia discreta*). La famiglia degli insiemi chiusi di uno spazio topologico discreto S coincide con $\mathcal{P}(S)$.

c) (*Topologia cofinita*). Se S ha la topologia cofinita, la famiglia $\mathcal{C}$ degli insiemi chiusi di S è costituita dagli insiemi $\emptyset$, S e da tutti i sottoinsiemi finiti C di S.

Definizione 3.2. (*Frontiera di un insieme*). Sia S uno spazio topologico e sia $X \subseteq S$. Si chiama *frontiera* dell'insieme X, e si denota con il simbolo ∂X, l'insieme dei punti di S che non sono interni né all'insieme X né al suo complementare $S \setminus X$, cioè

$$\partial X \;=\; S \setminus \left(\overset{\circ}{X} \cup \overset{\circ}{\overbrace{(S \setminus X)}} \right) \;.$$

Gli elementi di ∂X si chiamano *punti di frontiera* per l'insieme X.

Una prima immediata conseguenza della definizione di frontiera di un insieme è la seguente

Proposizione 3.2. (Caratterizzazione dei punti di frontiera). *Sia* $(S,\mathcal{U})$ *uno spazio topologico e sia* $X \subseteq S$. *Un punto* $x_0 \in S$ *appartiene alla frontiera di* X *se e soltanto se*

$$\forall U \in \mathcal{U}(x_0) \implies U \cap X \neq \emptyset \;\text{ e }\; U \setminus X \neq \emptyset \tag{3.1}$$

(ogni intorno del punto x_0 contiene sia punti appartenenti all'insieme X che punti non appartenenti a X).

Altre conseguenze immediate della definizione sono che ∂X è un insieme chiuso (infatti il suo complementare è l'unione di due aperti) e che X e $S \setminus X$ hanno la stessa frontiera.

Proposizione 3.3. (Proprietà della frontiera di un insieme). *La frontiera* ∂X *di un qualunque sottoinsieme* X *di uno spazio topologico* S *è un insieme chiuso ed è uguale alla frontiera dell'insieme complementare* $S \setminus X$*:*

$$\partial X \;=\; \partial(S \setminus X) \;. \tag{3.2}$$

Definizione 3.3. (*Punti di accumulazione*). Sia $(S,\mathcal{U})$ uno spazio topologico e sia $X \subseteq S$. Si dice che un punto $x_0 \in S$ è un *punto di accumulazione* per l'insieme X se ogni intorno di x_0 contiene punti dell'insieme X diversi da x_0:

$$\forall U \in \mathcal{U}(x_0) \implies U \cap X \setminus \{x_0\} \neq \emptyset \;. \tag{3.3}$$

L'insieme di tutti i punti $x_0 \in S$ che sono di accumulazione per X si chiama il *derivato* di X e si indica con $\mathrm{D}X$.

È noto dal corso di Analisi I che in uno spazio metrizzabile S il derivato di un qualunque insieme X è un insieme chiuso. Ciò non è più vero, in generale, negli spazi topologici.

Esempio 3.2. Sia S uno spazio topologico indiscreto con più di un punto. Fissato un punto $c \in S$, consideriamo l'insieme unitario $X = \{c\}$. Si ha allora $\mathrm{D}X = S \setminus \{c\}$ e quindi $\mathrm{D}X$ non è un insieme chiuso (ricordiamo che gli unici chiusi di uno spazio indiscreto S sono S e $\emptyset$).

Vedremo più avanti (Proposizione 5.3) che l'affermazione "Il derivato di un qualunque insieme è un insieme chiuso" è vera in tutti gli spazi topologici che soddisfano un certo assioma di separazione (i cosiddetti spazi topologici T_1).

Definizione 3.4. (*Chiusura di un insieme*). Sia S uno spazio topologico e sia $X \subseteq S$. Si chiama *chiusura* di X, e si indica con il simbolo $\overline{X}$, l'insieme costituito da tutti i punti di S che non sono interni all'insieme complementare $S \setminus X$:

$$\overline{X} \;=\; S \setminus \big(\overbrace{S \setminus X}^{\circ} \big) \quad . \tag{3.4}$$

Proposizione 3.4. (Caratterizzazioni della chiusura di un insieme). *Sia* $(S, \mathcal{U})$ *uno spazio topologico e sia* X *un qualunque sottoinsieme di* S*. Ognuno dei seguenti sottoinsiemi di* S *è uguale alla chiusura di* X*:*

$$\text{i) } X \cup \partial X \quad , \quad \text{ii) } \{x_0 \in S : \forall U \in \mathcal{U}(x_0) \implies U \cap X \neq \emptyset\} \quad , \quad \text{iii) } X \cup \mathrm{D}X \quad .$$

Inoltre $\overline{X}$ *è il minimo insieme chiuso che contiene* X*.*

Dimostrazione. Dalla definizione di frontiera di un insieme e dalla o_1) della Proposizione 2.5 segue che l'intero spazio S è uguale all'unione dei tre insiemi:

$$\partial X \quad , \quad \overset{\circ}{X} \quad , \quad \overbrace{S \setminus X}^{\circ}$$

e che tali insiemi sono a due a due disgiunti; pertanto si ha

$$\overline{X} \;=\; \overset{\circ}{X} \cup \partial X \quad ;$$

inoltre, dato che $\overbrace{S \setminus X}^{\circ} \subseteq S \setminus X$, si ha pure $X \setminus (\partial X) \subseteq \overset{\circ}{X}$ e quindi, dato che l'inclusione contraria $\overset{\circ}{X} \subseteq X \setminus (\partial X)$ è ovviamente vera, risulta

$$X \setminus (\partial X) \;=\; \overset{\circ}{X} \quad ;$$

di conseguenza si ha

$$\overline{X} \;=\; \overset{\circ}{X} \cup \partial X \;=\; X \cup \partial X \quad .$$

È poi facile verificare (lasciamo per esercizio la verifica allo studente) che l'insieme $X \cup \partial X$ è uguale a ciascuno dei due insiemi ii) e iii).

Proviamo infine che $\overline{X}$ è il minimo insieme chiuso contenente X. Infatti $\overline{X}$ è un insieme chiuso (è, per definizione, il complementare di un aperto) e contiene X (dato che $\overline{X} = X \cup \partial X$). D'altra parte, se C è un qualunque insieme chiuso che contiene X, allora $S \setminus C$ è un aperto contenuto in $S \setminus X$, dunque si ha (Proposizione 2.3)

$$S \setminus C \subseteq \overbrace{S \setminus X}^{\circ}$$

e quindi, passando ai complementari, $C \supseteq \overline{X}$.

Esercizio 3.1. Dimostrare che per un qualsiasi sottoinseme X di uno spazio topologico S i tre insiemi i), ii) e iii) sono uguali.

Gli elementi dell'insieme ii) si chiamano *punti aderenti* all'insieme X.

Proposizione 3.5. (Caratterizzazioni degli insiemi chiusi). *Sia* S *uno spazio topologico e sia* $C \subseteq S$*. Sono fatti equivalenti:*

i) C *è un insieme chiuso;*
ii) $C = \overline{C}$ *;*
iii) $C \supseteq \partial C$ *;*
iv) $C \supseteq \mathrm{D}C$ *.*

Dimostrazione. L'equivalenza i) $\iff$ ii) segue subito dal fatto che $\overline{C}$ è il minimo insieme chiuso contenente C. Le equivalenze ii) $\iff$ iii) e ii) $\iff$ iv) seguono subito dalle uguaglianze $\overline{C} = C \cup \partial C = C \cup \mathrm{D}C$.

Esercizio 3.2. Dimostrare che in un qualunque spazio topologico il derivato di un insieme chiuso è un insieme chiuso.

Proposizione 3.6. (Proprietà essenziali dell'operatore "chiusura di un insieme"). *Sia $(S,\mathcal{U})$ uno spazio topologico. L'applicazione $X \to \overline{X}$, da $\mathcal{P}(S)$ in $\mathcal{P}(S)$, ha le seguenti proprietà:*

k$_1$) $X \subseteq \overline{X} \quad \forall X \in \mathcal{P}(S)$;

k$_2$) $\overline{\emptyset} = \emptyset$;

k$_3$) $\overline{\overline{X}} = \overline{X} \quad \forall X \in \mathcal{P}(S)$;

k$_4$) $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y} \quad \forall X, Y \in \mathcal{P}(S)$.

Dimostrazione. La k$_1$) e la k$_2$) seguono subito dalla Proposizione 3.4. La k$_3$) segue dalle Proposizioni 3.4 e 3.5. Proviamo la k$_4$). Poichè la chiusura di un insieme X è il minimo insieme chiuso che contiene X vale l'implicazione

$$X \subseteq Y \subseteq S \implies \overline{X} \subseteq \overline{Y} \ . \tag{3.5}$$

Di conseguenza si ha

$$\overline{X} \subseteq \overline{X \cup Y} \quad , \quad \overline{Y} \subseteq \overline{X \cup Y}$$

e quindi

$$\overline{X} \cup \overline{Y} \subseteq \overline{X \cup Y} \ .$$

Viceversa, poiché $\overline{X} \cup \overline{Y}$ è un insieme chiuso (per la proprietà c$_3$) della Proposizione 3.1) e contiene $X \cup Y$, per la Proposizione 3.4 si ha pure $\overline{X} \cup \overline{Y} \supseteq \overline{X \cup Y}$.

Le proprietà k$_1$) − k$_4$) diventano postulati nella definizione di spazio topologico che assume come primitivo il concetto di chiusura di un insieme (cfr. l'Osservazione 4.5).

4. Altre definizioni di spazio topologico.

Abbiamo accennato nei precedenti paragrafi ad altre possibili definizioni di spazio topologico. La possibilità di tali definizioni è fornita dai seguenti quattro teoremi, in base ai quali, per rendere un insieme non vuoto S uno spazio topologico, anziché assegnare la mappa degli intorni, basta fare una delle seguenti cose:

- fissare la famiglia degli insiemi aperti;
- fissare la famiglia degli insiemi chiusi;
- specificare qual è l'interno di un qualunque sottoinsieme di S;
- specificare qual è la chiusura di un qualunque sottoinsieme di S,

avendo cura, in ognuno dei quattro casi, di far sì che siano verificate le corrispondenti "proprietà essenziali".

Teorema 4.1. (Assegnazione della topologia mediante la famiglia degli insiemi aperti). *Sia S un insieme non vuoto e sia $\mathcal{T}'$ una famiglia di sottoinsiemi di S verificante le seguenti ipotesi:*

a$_1$) $\emptyset, S \in \mathcal{T}'$;

a$_2$) *se $\{A'_i \,:\, i \in I\}$ è una qualunque famiglia di insiemi appartenenti a $\mathcal{T}'$, allora anche l'unione $\bigcup_{i \in I} A'_i$ appartiene a $\mathcal{T}'$;*

a$_3$) $A'_1, A'_2 \in \mathcal{T}' \implies A'_1 \cap A'_2 \in \mathcal{T}'$.

Esiste una ed una sola mappa degli intorni $\mathcal{U}$ su S tale che la famiglia $\mathcal{T}$ degli insiemi aperti dello spazio topologico $(S,\mathcal{U})$ coincida con la famiglia assegnata $\mathcal{T}'$.

Dimostrazione. Poiché in uno spazio topologico un insieme U è intorno di un punto x se e soltanto se U contiene un insieme aperto contenente il punto x (Proposizione 2.4), l'unica possibile mappa degli intorni $\mathcal{U}$ su S compatibile con la richiesta che sia $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$ è quella definita nel seguente modo:

$$\mathcal{U}(x) \ = \ \{U \in \mathcal{P}(S) \, : \, \exists A' \in \mathcal{T}' \text{ tale che } x \in A' \subseteq U\} \quad \forall x \in S \ . \tag{4.1}$$

A questo punto, per completare la dimostrazione, basta provare che sono veri i seguenti due fatti:

i) la $\mathcal{U}$ definita dalla (4.1) è effettivamente una mappa degli intorni su S, cioè la famiglia $\mathcal{U}(x)$ è non vuota, qualunque sia $x \in S$, e sono soddisfatti i postulati $\mathrm{u}_1) - \mathrm{u}_4)$;

ii) la famiglia $\mathcal{T}$ degli insiemi aperti dello spazio topologico $(S,\mathcal{U})$, così ottenuto, coincide con la famiglia $\mathcal{T}'$.

Verifichiamo le precedenti affermazioni.

i) L'ipotesi che S appartenga a $\mathcal{T}'$ assicura che, per ogni $x \in S$, risulta $S \in \mathcal{U}(x)$, dunque la famiglia $\mathcal{U}(x)$ non è vuota.
La validità di $\mathrm{u}_1)$ e $\mathrm{u}_2)$ è un'ovvia conseguenza della definizione di $\mathcal{U}$.
Anche la $\mathrm{u}_4)$ segue facilmente dalla definizione di $\mathcal{U}$. Infatti, presi comunque $x \in S$ e $U \in \mathcal{U}(x)$, per la definizione di $\mathcal{U}$ esiste $A' \in \mathcal{T}'$ tale che $x \in A' \subseteq U$; allora, posto $V = A'$, sempre per la definizione di $\mathcal{U}$ si ha $V \in \mathcal{U}(x)$ e $U \in \mathcal{U}(y)$ per ogni $y \in V$.
Infine, per provare $\mathrm{u}_3)$, basta tenere presente l'ipotesi $\mathrm{a}_3)$.

ii) Se $A' \in \mathcal{T}'$, $A' \neq \emptyset$, allora, per la definizione di $\mathcal{U}$, risulta $A' \in \mathcal{U}(x)$ $\forall x \in A'$ e quindi $A' \in \mathcal{T}$. Pertanto $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$.
Viceversa, se $A \in \mathcal{T}$, $A \neq \emptyset$, allora, per ogni $x \in A$, esiste $U_x \in \mathcal{U}(x)$ tale che $U_x \subseteq A$ e quindi esiste pure $A'_x \in \mathcal{T}'$ tale che $x \in A'_x \subseteq A$. Ovviamente risulta $A = \bigcup_{x \in A} A'_x$, pertento, per l'ipotesi $\mathrm{a}_2)$, A appartiene a $\mathcal{T}'$. Poiché l'insieme vuoto appartiene a $\mathcal{T}'$ per ipotesi, possiamo allora concludere che è $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$ e dunque $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$.

Osservazione 4.1. (*La definizione di spazio topologico mediante la famiglia degli insiemi aperti*). Dal precedente Teorema 4.1 segue che una definizione equivalente di spazio topologico è quella secondo la quale uno spazio topologico è una coppia $(S,\mathcal{T})$ formata da un insieme non vuoto S e da una famiglia $\mathcal{T}$ di sottoinsiemi di S (gli insiemi aperti) avente le proprietà $\mathrm{a}_1) - \mathrm{a}_3)$ della Proposizione 2.1. Se si adotta questa definizione le proprietà $\mathrm{a}_1) - \mathrm{a}_3)$ diventano postulati, mentre le $\mathrm{u}_1) - \mathrm{u}_4)$ sono proprietà della mappa degli intorni $\mathcal{U}$, che viene definita ponendo:

$$\mathcal{U}(x) \ = \ \{U \in \mathcal{P}(S) \, : \, \exists A \in \mathcal{T} \text{ tale che } x \in A \subseteq U\} \quad \forall x \in S \ ; \tag{4.2}$$

tali proprietà si dimostrano, a partire dai postulati $\mathrm{a}_1) - \mathrm{a}_3)$, proprio come viene fatto nella dimostrazione del Teorema 4.1.
Questa definizone di spazio topologico è abbastanza frequente (forse la più frequente). In tale contesto il termine topologia è sinonimo di famiglia degli insiemi aperti; per questo motivo abbiamo adottato la notazione $\mathcal{T}$ per indicare la famiglia degli insiemi aperti di uno spazio topologico.

Teorema 4.2. (Assegnazione della topologia mediante la famiglia degli insiemi chiusi). *Sia S un insieme non vuoto e sia $\mathcal{C}'$ una famiglia di sottoinsiemi di S verificante le seguenti ipotesi:*

$\mathrm{c}_1)$ $\emptyset, S \in \mathcal{C}'$;

$\mathrm{c}_2)$ *se $\{C'_i \, : \, i \in I\}$ è una qualunque famiglia di insiemi appartenenti a $\mathcal{C}'$, allora anche l'intersezione $\bigcap_{i \in I} C'_i$ appartiene a $\mathcal{C}'$;*

$\mathrm{c}_3)$ $C'_1, C'_2 \in \mathcal{C}' \implies C'_1 \cup C'_2 \in \mathcal{C}'$.

Esiste una ed una sola mappa degli intorni $\mathcal{U}$ su S tale che la famiglia $\mathcal{C}$ degli insiemi chiusi dello spazio topologico $(S,\mathcal{U})$ coincida con la famiglia assegnata $\mathcal{C}'$.

Dimostrazione. Dal momento che gli insiemi chiusi di uno spazio topologico sono i complementari degli insiemi aperti, la richiesta che, per una data mappa degli intorni $\mathcal{U}$ su S, la famiglia $\mathcal{C}$ degli insiemi chiusi dello spazio topologico $(S,\mathcal{U})$ coincida con la famiglia assegnata $\mathcal{C}'$ equivale alla richiesta che la famiglia $\mathcal{T}$ degli insiemi aperti di $(S,\mathcal{U})$ coincida con la famiglia

$$\mathcal{T}' \ = \ \{S \setminus C' \ : \ C' \in \mathcal{C}'\} \quad , \tag{4.3}$$

costituita dai complementari degli insiemi appartenenti a $\mathcal{C}'$. Per dimostrare il teorema è allora sufficiente, grazie al precedente Teorema 4.1, provare che la famiglia $\mathcal{T}'$, data dalla (4.3), verifica le ipotesi $\mathrm{a}_1) - \mathrm{a}_3)$. Ciò si ricava subito dalle ipotesi $\mathrm{c}_1) - \mathrm{c}_3)$, applicando le formule di De Morgan.

Osservazione 4.2. (*La definizione di spazio topologico mediante la famiglia degli insiemi chiusi*). Dal Teorema 4.2 segue che un'altra definizione equivalente di spazio topologico è quella secondo la quale uno spazio topologico è una coppia $(S,\mathcal{C})$ formata da un insieme non vuoto S e da una famiglia $\mathcal{C}$ di sottoinsiemi di S (gli insiemi chiusi) avente le proprietà $\mathrm{c}_1) - \mathrm{c}_3)$ della Proposizione 3.1. In questo contesto le proprietà $\mathrm{c}_1) - \mathrm{c}_3)$ diventano postulati, gli insiemi aperti sono, per definizione, i complementari degli insiemi chiusi (e si verifica immediatamente, come nella dimostrazione del Teorema 4.2, che la loro famiglia $\mathcal{T}$ ha le proprietà $\mathrm{a}_1) - \mathrm{a}_3)$), la mappa degli intorni $\mathcal{U}$ viene definita tramite la (4.2) e per essa si provano, come già sappiamo dall'Osservazione 4.1, le proprietà $\mathrm{u}_1) - \mathrm{u}_4)$.

Teorema 4.3. (Assegnazione della topologia mediante l'assegnazione dell'interno di un qualunque insieme). *Sia S un insieme non vuoto e sia $X \to \overset{\star}{X}$ un'applicazione da $\mathcal{P}(S)$ in $\mathcal{P}(S)$ verificante le seguenti ipotesi:*

$\mathrm{o}_1)$ $\overset{\star}{X} \subseteq X \quad \forall X \in \mathcal{P}(S)$; $\qquad$ $\mathrm{o}_2)$ $\overset{\star}{S} = S$;

$\mathrm{o}_3)$ $\overset{\star}{\overset{\star}{X}} = \overset{\star}{X} \quad \forall X \in \mathcal{P}(S)$; $\qquad$ $\mathrm{o}_4)$ $\overset{\star}{\overbrace{X \cap Y}} = \overset{\star}{X} \cap \overset{\star}{Y} \quad \forall X, Y \in \mathcal{P}(S)$.

Esiste una ed una sola topologia $\mathcal{U}$ su S tale che

$$\overset{\circ}{X} \ = \ \overset{\star}{X} \qquad \forall X \in \mathcal{P}(S) \tag{4.4}$$

(cioè: nello spazio topologico $(S,\mathcal{U})$ l'interno di un qualunque insieme $X \in \mathcal{P}(S)$ coincide con l'insieme $\overset{\star}{X}$).

Dimostrazione. Poiché un sottoinsieme di uno spazio topologico è aperto se e soltanto se esso coincide con il suo interno (Proposizione 2.2), abbiamo che, se per una topologia $\mathcal{U}$ su S è verificata la (4.4), allora la famiglia $\mathcal{T}$ degli insiemi aperti dello spazio topologico $(S,\mathcal{U})$ coincide, necessariamente, con la seguente famiglia di sottoinsiemi di S:

$$\mathcal{T}' \ = \ \{B \in \mathcal{P}(S) \ : \ B = \overset{\star}{B}\} \quad . \tag{4.5}$$

Per il Teorema 4.1 è allora sufficiente provare, per completare la dimostrazione, che sono veri i seguenti due fatti:

i) la famiglia di insiemi $\mathcal{T}'$, definita dalla (4.5), soddisfa le ipotesi $\mathrm{a}_1) - \mathrm{a}_3)$ del Teorema 4.1;

ii) nello spazio topologico $(S,\mathcal{U})$, individuato, a norma del Teorema 4.1, dalla famiglia di insiemi $\mathcal{T}'$, è vera la (4.4).

A tale scopo, osserviamo dapprima che dalle ipotesi sull'operatore $X \to \overset{\star}{X}$ (in particolare dall'ipotesi $\mathrm{o}_4)$) si ricava che vale la seguente implicazione:

$$X \subseteq Y \subseteq S \implies \overset{\star}{X} \subseteq \overset{\star}{Y} \quad ; \tag{4.6}$$

infatti si ha:

$$X \subseteq Y \iff X \cap Y = X \implies \overbrace{X \cap Y}^{\star} = \overset{\star}{X} \iff$$

$$\iff \overset{\star}{X} \cap \overset{\star}{Y} = \overset{\star}{X} \iff \overset{\star}{X} \subseteq \overset{\star}{Y} \quad .$$

Proviamo che è vera l'affermazione i). L'insieme S appartiene a $\mathcal{T}'$ per l'ipotesi o_2); inoltre, per l'ipotesi o_1), anche l'insieme vuoto appartiene a $\mathcal{T}'$; pertanto la famiglia $\mathcal{T}'$ soddisfa l'ipotesi a_1). Proviamo che è soddisfatta la a_2): sia $\{B_i \, : \, i \in I\}$ una qualunque famiglia di insiemi appartenenti a $\mathcal{T}'$; per la (4.6) si ha

$$B_j \; = \; \overset{\star}{B_j} \; \subseteq \; \overbrace{\bigcup_{i \in I} B_i}^{\star} \qquad \forall j \in I$$

e quindi, grazie all'ipotesi o_1),

$$\bigcup_{j \in I} B_j \; = \; \bigcup_{j \in I} \overset{\star}{B_j} \; \subseteq \; \overbrace{\bigcup_{i \in I} B_i}^{\star} \; \subseteq \; \bigcup_{i \in I} B_i \quad ,$$

dunque

$$\overbrace{\bigcup_{i \in I} B_i}^{\star} = \bigcup_{i \in I} B_i$$

e pertanto $\bigcup_{i \in I} B_i$ appartiene a $\mathcal{T}'$. Proviamo che è soddisfatta pure la a_3): siano B_1, B_2 due insiemi appartenenti a $\mathcal{T}'$, cioè $B_1 = \overset{\star}{B_1}$, $B_2 = \overset{\star}{B_2}$; allora, per l'ipotesi o_4), si ha

$$B_1 \cap B_2 \; = \; \overset{\star}{B_1} \cap \overset{\star}{B_2} \; = \; \overbrace{B_1 \cap B_2}^{\star}$$

e quindi $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{T}'$.

Proviamo, infine, che è vera la ii). Osserviamo dapprima che risulta

$$\mathcal{T}' \; = \; \{\overset{\star}{X} \, : \, X \in \mathcal{P}(S)\} \quad . \tag{4.7}$$

Infatti:

$$B \in \mathcal{T}' \iff B = \overset{\star}{B} \implies B \in \{\overset{\star}{X} \, : \, X \in \mathcal{P}(S)\} \quad ;$$

viceversa, se $B = \overset{\star}{X}$ per qualche $X \in \mathcal{P}(S)$, allora, per l'ipotesi o_3), si ha

$$\overset{\star}{B} \; = \; \overset{\star}{\overset{\star}{X}} \; = \; \overset{\star}{X} \; = \; B \quad ,$$

dunque $B \in \mathcal{T}'$. Ne segue che, per ogni insieme $X \in \mathcal{P}(S)$, l'insieme $\overset{\star}{X}$ è aperto (per la (4.7)) ed è contenuto in X (per l'ipotesi o_3)); inoltre, se B è un qualunque insieme aperto contenuto in X, per la (4.6) si ha

$$B \; = \; \overset{\star}{B} \; \subseteq \; \overset{\star}{X} \quad ,$$

pertanto $\overset{\star}{X}$ è il massimo insieme aperto contenuto in X, cioè $\overset{\star}{X} = \overset{\circ}{X}$.

Osservazione 4.3. (*La definizione di spazio topologico mediante l'operatore "interno di un insieme"*). Dal Teorema 4.3 si ricava un'altra definizione equivalente di spazio topologico: uno spazio topologico è una coppia $(S, \circ)$ formata da un insieme non vuoto S e da un'applicazione $X \to \overset{\circ}{X}$ (l'operatore "interno di un insieme"), da $\mathcal{P}(S)$ in $\mathcal{P}(S)$, per la quale sono verificate le ipotesi $\mathrm{o}_1) - \mathrm{o}_4)$ della Proposizione 2.5. In questo contesto gli insiemi aperti sono, per definizione, gli insiemi $A \in \mathcal{P}(S)$ tali che $A = \overset{\circ}{A}$ e si prova, come nella dimostrazione del Teorema 4.3, che la loro famiglia $\mathcal{T}$ ha le proprietà $\mathrm{a}_1) - \mathrm{a}_3)$). Dopo di ciò la mappa degli intorni è data, per definizione, dalla (4.2) e per essa valgono (cfr. l'Osservazione 4.1) le proprietà $\mathrm{u}_1) - \mathrm{u}_4)$).

Teorema 4.4. (Assegnazione della topologia mediante l'assegnazione della chiusura di un qualunque insieme). *Sia S un insieme non vuoto e sia $X \to \widetilde{X}$ un'applicazione da $\mathcal{P}(S)$ in $\mathcal{P}(S)$ verificante le seguenti ipotesi:*

$\mathrm{k}_1)$ $X \subseteq \widetilde{X} \quad \forall X \in \mathcal{P}(S)\,;$ $\qquad$ $\mathrm{k}_2)$ $\widetilde{\emptyset} = \emptyset\,;$

$\mathrm{k}_3)$ $\widetilde{\widetilde{X}} = \widetilde{X} \quad \forall X \in \mathcal{P}(S)\,;$ $\qquad$ $\mathrm{k}_4)$ $\widetilde{X \cup Y} = \widetilde{X} \cup \widetilde{Y} \quad \forall X, Y \in \mathcal{P}(S)\,.$

Esiste una ed una sola topologia $\mathcal{U}$ su S per la quale si ha:

$$\overline{X} \;=\; \widetilde{X} \qquad \forall X \in \mathcal{P}(S) \tag{4.8}$$

(la chiusura, nello spazio topologico $(S,\mathcal{U})$, di un qualunque insieme $X \in \mathcal{P}(S)$ coincide con l'insieme $\widetilde{X}$).

Dimostrazione. Ricordiamo che un sottoinsieme di uno spazio topologico è chiuso se e soltanto se esso coincide con la sua chiusura (Proposizione 3.5). Ne segue che, se $\mathcal{U}$ è una topologia su S per la quale è verificata la (4.8), allora la famiglia $\mathcal{C}$ degli insiemi chiusi dello spazio topologico $(S,\mathcal{U})$ deve necessariamente coincidere con la seguente famiglia di sottoinsiemi di S:

$$\mathcal{C}' \;=\; \{D \in \mathcal{P}(S) \,:\, D = \widetilde{D}\} \quad . \tag{4.9}$$

Tenuto conto del Teorema 4.2, per completare la dimostrazione basta provare che sono veri i seguenti due fatti:

i) la famiglia di insiemi $\mathcal{C}'$, definita dalla (4.9), soddisfa le ipotesi $\mathrm{c}_1) - \mathrm{c}_3)$ del Teorema 4.2;

ii) per lo spazio topologico $(S,\mathcal{U})$, individuato, a norma del Teorema 4.2, dalla famiglia di insiemi $\mathcal{C}'$, è vera la (4.8).

La verifica di i) e ii) è lasciata per esercizio allo studente.

Esercizio 4.1. Completare la dimostrazione del Teorema 4.4.

Osservazione 4.4. In un qualunque spazio topologico $(S,\mathcal{U})$ si ha:

$$\overset{\circ}{X} \;=\; S \setminus (\overline{S \setminus X}) \qquad \forall X \in \mathcal{P}(S) \quad ; \tag{4.10}$$

infatti, per definizione, è $\overline{S \setminus X} \;=\; S \setminus \overset{\circ}{X}$ e quindi, passando ai complementari, si ottiene la (4.10). Ne segue che è possibile dimostrare il Teorema 4.4 a partire dal Teorema 4.3, anziché dal 4.2: basta osservare che, grazie alla (4.10), la (4.8) equivale a

$$\overset{\circ}{X} \;=\; S \setminus (\widetilde{S \setminus X}) \qquad \forall X \in \mathcal{P}(S)$$

e verificare quindi che l'applicazione $X \to \overset{\star}{X}$, da $\mathcal{P}(S)$ in $\mathcal{P}(S)$, definita ponendo

$$\overset{\star}{X} \;=\; S \setminus (\widetilde{S \setminus X}) \qquad \forall X \in \mathcal{P}(S) \quad ,$$

soddisfa le ipotesi $\mathrm{o}_1) - \mathrm{o}_4)$ del Teorema 4.3. Lasciamo per esercizio allo studente i dettagli di questa verifica.

Esercizio 4.2. Svolgere in dettaglio la dimostrazione del Teorema 4.4 basata sul Teorema 4.3.

Osservazione 4.5. (*La definizione di spazio topologico mediante l'operatore "chiusura di un insieme"*). Dal precedente teorema segue che, analogamente a quanto si è osservato a proposito dell'operatore "interno di un insieme", un altro modo equivalente di definire uno spazio topologico è quello di chiamare spazio topologico una coppia $(S, {}^{-})$, formata da un insieme non vuoto S e da un'applicazione $X \to \overline{X}$, da $\mathcal{P}(S)$ in $\mathcal{P}(S)$ (l'operatore "chiusura di un insieme"), per la quale sono verificate le ipotesi $\mathrm{k}_1) - \mathrm{k}_4)$ della Proposizione 3.6. A partire dall'operatore di chiusura si possono poi definire gli insiemi chiusi (mediante la ii) della Proposizione 3.5) e, di conseguenza, gli insiemi aperti e la mappa degli intorni.

5. Gli assiomi di separazione.

Abbiamo già introdotto, nel n. 1, il concetto di spazio topologico di Hausdorff (o spazio T_2). La proprietà di essere uno spazio T_2 si può anche enunciare, in maniera più pittoresca, dicendo che: "Due qualsiasi punti distinti dello spazio sono *separati* da intorni disgiunti". Per questo motivo si suole dire che tale proprietà è un *assioma di separazione.*

Vi sono vari assiomi di separazione oltre all'assioma T_2. Noi, però, non approfondiremo l'argomento e ci limiteremo a menzionare, a livello di definizione, solo due di questi assiomi (T_0 e T_1). Per comodità del lettore ripetiamo, accanto alle altre, anche la definizione di spazio T_2.

Definizione 5.1. (*Assiomi di separazione*). Si dice che uno spazio topologico $(S,\mathcal{U})$ è

- uno *spazio* T_0 se

$$\forall x_1, x_2 \in S\,,\; x_1 \neq x_2 \quad \Longrightarrow \quad \Longrightarrow\; \exists U_1 \in \mathcal{U}(x_1) \;:\; x_2 \notin U_1 \quad \text{oppure} \quad \exists U_2 \in \mathcal{U}(x_2) \;:\; x_1 \notin U_2$$

(comunque si prendano due punti distinti di S, almeno uno di tali punti possiede un intorno che non contiene l'altro);

- uno *spazio* T_1 se

$$\forall x_1, x_2 \in S\,,\; x_1 \neq x_2 \quad \exists U_1 \in \mathcal{U}(x_1),\; \exists U_2 \in \mathcal{U}(x_2),\; :\; x_2 \notin U_1 \;\text{ e }\; x_1 \notin U_2$$

(comunque si prendano due punti distinti di S, ciascuno di tali punti possiede un intorno che non contiene l'altro);

- uno *spazio* T_2 se

$$\forall x_1, x_2 \in S\,,\; x_1 \neq x_2 \quad \exists U_1 \in \mathcal{U}(x_1),\; \exists U_2 \in \mathcal{U}(x_2) \;:\; U_1 \cap U_2 = \emptyset$$

(due qualsiasi punti distinti di S possiedono intorni disgiunti).

Il confronto tra i tre assiomi di separazione T_0, T_1 e T_2 è immediato.

Proposizione 5.1. *Ogni spazio T_2 è anche uno spazio T_1 e ogni spazio T_1 è anche uno spazio T_0.*

Esempi 5.1. 1) Sappiamo già, dal n.1, che ogni spazio metrizzabile è uno spazio T_2.

2) Un insieme infinito S dotato della topologia cofinita è uno spazio T_1, ma non è uno spazio T_2. Infatti, presi comunque $x_1, x_2 \in S$, $x_1 \neq x_2$, gli insiemi $V_1 = S\setminus\{x_2\}$ e $V_2 = S\setminus\{x_1\}$ sono, rispettivamente, un intorno di x_1 che non contiene x_2 e un intorno di x_2 che non contiene x_1. D'altra parte i punti x_1, x_2 non possiedono intorni disgiunti; infatti, fissati comunque gli intorni $U_1 \in \mathcal{U}(x_1)$ e $U_2 \in \mathcal{U}(x_2)$, dato che i loro complementari $F_1 = S \setminus U_1$ e $F_2 = S \setminus U_2$ sono insiemi finiti, l'intersezione $U_1 \cap U_2 = (S \setminus F_1) \cap (S \setminus F_2) = S \setminus (F_1 \cup F_2)$ (differenza tra un insieme infinito ed uno finito) non è vuota.

3) Per avere un esempio di spazio topologico T_0, che non è uno spazio T_1, basta considerare un insieme avente due elementi, $S = \{a, b\}$, con la topologia $\mathcal{U}$ così definita: $\mathcal{U}(a) = \{S\}$, $\mathcal{U}(b) = \{\{b\}, S\}$.

4) Osserviamo, infine, che uno spazio indiscreto con più di un punto costituisce un esempio di spazio topologico che non è T_0.

Proposizione 5.2. *Uno spazio topologico $(S,\mathcal{U})$ è uno spazio T_1 se e soltanto se ogni insieme unitario $\{c\}$, $c \in S$, è un insieme chiuso.*

Dimostrazione. Se $(S,\mathcal{U})$ è uno spazio T_1, allora ogni insieme $S \setminus \{c\}$, $c \in S$, è aperto e quindi $\{c\}$ è chiuso; infatti, supposto $S \setminus \{c\} \neq \emptyset$ e fissato un qualunque punto $x \in S \setminus \{c\}$, dato che lo spazio S è T_1, esiste $U \in \mathcal{U}(x)$ tale che $c \notin U$, cioè $U \subseteq S \setminus \{c\}$, pertanto $S \setminus \{c\}$ è intorno di un suo qualunque punto x.

Viceversa, se ogni insieme unitario $\{c\}$, $c \in S$, è chiuso, allora S è uno spazio T_1; infatti, presi comunque $x_1, x_2 \in S$, $x_1 \neq x_2$, gli insiemi $V_1 = S \setminus \{x_2\}$ e $V_2 = S \setminus \{x_1\}$ sono aperti e quindi sono, rispettivamente, un intorno di x_1 che non contiene x_2 e un intorno di x_2 che non contiene x_1.

Proposizione 5.3. *In uno spazio topologico T_1 il derivato di un qualunque insieme è un insieme chiuso.*

Dimostrazione. Sia $(S,\mathcal{U})$ uno spazio topologico T_1 e sia X un qualunque sottoinsieme di S. Proviamo che $\mathrm{D}(\mathrm{D}(X) \subseteq \mathrm{D}X$. Fissato un qualunque punto $x \in \mathrm{D}(\mathrm{D}(X)$, consideriamo un suo qualunque intorno U e prendiamo un insieme aperto A tale che $x \in A \subseteq U$. Poiché $x \in \mathrm{D}(\mathrm{D}(X)$ esiste $y \in A \cap (\mathrm{D}X) \setminus \{x\}$ e, poiché lo spazio S è T_1, esiste $V \in \mathcal{U}(y)$ tale che $x \notin V$. Infine, dato che $y \in \mathrm{D}X$ e che $A \cap V \in \mathcal{U}(y)$, esiste $z \in A \cap V \cap X \setminus \{y\} \subseteq A \cap V \cap X$. Tale punto z appartiene a U (dato che $z \in A \subseteq U$) ed è diverso da x (poiché $x \notin V$), dunque $z \in U \cap X \setminus \{x\}$. Abbiamo così provato che

$$\forall U \in \mathcal{U}(x) \implies U \cap X \setminus \{x\} \neq \emptyset \quad ,$$

cioè $x \in \mathrm{D}X$.

6. Funzioni continue.

Definizione 6.1. (*Funzione continua*). Siano dati due spazi topologici $(S,\mathcal{U})$ e $(S',\mathcal{U}')$ ed una funzione $f : S \to S'$.

Fissato $x_0 \in S$, si dice che la funziome f è *continua nel punto x_0* se

$$\forall U' \in \mathcal{U}'(f(x_0)) \quad \exists U \in \mathcal{U}(x_0) \ : \ f(U) \subseteq U' \tag{6.1}$$

(ogni intorno del punto immagine $f(x_0)$ contiene l'immagine, tramite f, di un opportuno intorno di x_0).

Si dice poi che la funzione f è *continua* se essa è continua in ogni punto $x_0 \in S$.

Proposizione 6.1. (Continuità della funzione composta). *Siano dati tre spazi topologici $(S,\mathcal{U})$, $(S',\mathcal{U}')$ e $(S'',\mathcal{U}'')$ e due funzioni $f : S \to S'$ e $g : S' \to S''$. Sia inoltre x_0 un punto di S.*

Supponiamo che la funzione f sia continua nel punto x_0 e la funzione g sia continua nel punto $f(x_0)$. Allora anche la funzione composta $g \circ f : S \to S''$ è continua in x_0.

Dimostrazione. Sia U'' un qualunque intorno di $(g \circ f)(x_0) = g(f(x_0))$; per la continuità di g nel punto $f(x_0)$ esiste $U' \in \mathcal{U}'(f(x_0))$ tale che $g(U') \subseteq U''$; ma, per la continuità di f nel punto x_0, in corrispondenza dell'intorno $U' \in \mathcal{U}'(f(x_0))$, così determinato, esiste $U \in \mathcal{U}(x_0)$ tale che $f(U) \subseteq U'$. In conclusione, dato che $(g \circ f)(U) = g(f(U))$, possiamo affermare che in corrispondenza di un qualunque intorno $U'' \in \mathcal{U}''((g \circ f)(x_0))$ esiste $U \in \mathcal{U}(x_0)$ tale che

$$(g \circ f)(U) \ = \ g(f(U)) \ \subseteq \ g(U') \ \subseteq \ U'' \quad ,$$

dunque $g \circ f$ è continua in x_0.

Definizione 6.2. (*Insieme controimmagine*). Siano dati due insiemi non vuoti S e S' ed una funzione $f : S \to S'$.

Se A' è un qualunque sottoinsieme di S', si chiama *controimmagine* dell'insieme A', tramite la funzione f, il sottoinsieme $f^{-1}(A')$ di S definito nel seguente modo:

$$f^{-1}(A') \;=\; \{x \in S \,:\, f(x) \in A'\} \quad .$$

Così, per esempio, se $S = S' = \mathbb{R}$ e $f(x) = x^2\ \forall x \in \mathbb{R}$, si ha:

$$f^{-1}([0,2]) = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \quad , \quad f^{-1}([-1,2]) = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \quad , \quad f^{-1}([-2,-1]) = \emptyset \quad .$$

Proposizione 6.2. (Proprietà delle controimmagini). *Siano dati due insiemi non vuoti S e S' ed una funzione $f : S \to S'$.*

Allora:

i) $f^{-1}(f(A)) \supseteq A \quad \forall A \in \mathcal{P}(S)$ *;*

ii) $f(f^{-1}(A')) \subseteq A' \quad \forall A' \in \mathcal{P}(S')$ *;*

iii) *per ogni famiglia $\{A'_i \,:\, i \in I\}$ di sottoinsiemi di S' risulta:*

$$f^{-1}\Big(\bigcap_{i\in I} A'_i\Big) \;=\; \bigcap_{i\in I} f^{-1}(A'_i) \quad , \tag{6.2}$$

$$f^{-1}\Big(\bigcup_{i\in I} A'_i\Big) \;=\; \bigcup_{i\in I} f^{-1}(A'_i) \quad ; \tag{6.3}$$

iv) $f^{-1}(A' \setminus B') \;=\; f^{-1}(A') \setminus f^{-1}(B') \quad \forall A', B' \in \mathcal{P}(S)$ *;*

v) *siano $A \in \mathcal{P}(S)$, $A' \in \mathcal{P}(S')$; allora*

$$f(A) \subseteq A' \quad \iff \quad A \subseteq f^{-1}(A') \quad .$$

Dimostrazione. Proviamo, a titolo di esemplificazione, la (6.3), lasciando al lettore, per esercizio, le altre verifiche. Si ha:

$$x \in f^{-1}\Big(\bigcup_{i\in I} A'_i\Big) \quad \iff \quad x \in S \quad \text{e} \quad f(x) \in \bigcup_{i\in I} A'_i \quad \iff$$

$$\iff \quad x \in S \quad \text{e} \quad \exists i^* \in I \quad : \quad f(x) \in A'_{i^*} \quad \iff$$

$$\iff \quad \exists i^* \in I \quad : \quad x \in S \quad \text{e} \quad f(x) \in A'_{i^*} \quad \iff$$

$$\iff \quad \exists i^* \in I \quad : \quad x \in f^{-1}\big(A'_{i^*}\big) \quad \iff \quad x \in \bigcup_{i\in I} f^{-1}(A'_i) \quad .$$

Esercizio 6.1. Completare la dimostrazione della Proposizione 6.2.

Osserviamo che le due inclusioni insiemistiche i) e ii) della precedente proposizione possono essere strette; ciò accade, ad esempio, se $S = S' = \mathbb{R}$, $f(x) = x^2\ \forall x \in \mathbb{R}$, e si considera $A = [0, \sqrt{2}]$ e $A' = [-1, 2]$.

Osserviamo ancora, a proposito della ii), che in realtà vale l'uguaglianza

ii') $f(f^{-1}(A')) = A' \cap f(S) \quad \forall A' \in \mathcal{P}(S')$.

La continuità (globale) di una funzione f si caratterizza mediante una condizione sulle controimmagini degli insiemi aperti (Teorema 6.1) ovvero degli insiemi chiusi (Teorema 6.2).

Teorema 6.1. (Caratterizzazione della continuità con le controimmagini degli insiemi aperti). *Siano* $(S,\mathcal{U})$, $(S',\mathcal{U}')$ *spazi topologici e siano* $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}'$ *le rispettive famiglie degli insiemi aperti.*

Una funzione $f : S \to S'$ *è continua se e soltanto se*

$$\forall A' \in \mathcal{T}' \implies f^{-1}(A') \in \mathcal{T} \tag{6.4}$$

(la controimmmagine, tramite f, di un qualunque insieme aperto di S' è un insieme aperto di S).

Dimostrazione. Sia $f : S \to S'$ una funzione continua e sia $A' \in \mathcal{T}'$ un qualunque insieme aperto di S'. Proviamo che l'insieme $A = f^{-1}(A')$ è un aperto di S. Infatti, supposto $A \neq \emptyset$ e fissato un qualunque punto $x_0 \in A$, si ha $f(x_0) \in A'$, quindi $A' \in \mathcal{U}'(f(x_0))$, e pertanto, per la continuità di f nel punto x_0, esiste $U \in \mathcal{U}(x_0)$ tale che $f(U) \subseteq A'$, vale a dire, per la v) della proposizione 6.2, $U \subseteq f^{-1}(A') = A$, dunque $A \in \mathcal{U}(x_0)$. Abbiamo così provato che $A \in \mathcal{U}(x_0) \ \ \forall x_0 \in A$, dunque A è un insieme aperto.

Viceversa, facciamo vedere che, se una funzione $f : S \to S'$ verifica la (6.4), allora f è continua. Sia x_0 un qualunque punto di S e sia $U' \in \mathcal{U}'(f(x_0))$ un qualunque intorno di $f(x_0)$. In corrispondenza di U' esiste $A' \in \mathcal{T}'$ tale che $f(x_0) \in A' \subseteq U'$. Poiché vale la (6.4), l'insieme $A = f^{-1}(A')$ appartiene a $\mathcal{T}$ e quindi, dato che $x_0 \in A$, possiamo asserire che A è un intorno di x_0; inoltre dalla definizione di A segue subito che $f(A) \subseteq A' \subseteq U'$. Ciò prova che la funzione f è continua nel punto x_0.

Teorema 6.2. (Caratterizzazione della continuità con le controimmagini degli insiemi chiusi). *Siano* S, S' *spazi topologici e siano* $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ *le rispettive famiglie degli insiemi chiusi.*

Una funzione $f : S \to S'$ *è continua se e soltanto se*

$$\forall C' \in \mathcal{C}' \implies f^{-1}(C') \in \mathcal{C} \ . \tag{6.5}$$

Dimostrazione. Basta provare che la (6.5) è equivalente alla (6.4). E infatti, se è vera la (6.4), allora, per ogni $C' \in \mathcal{C}'$, si ha $f^{-1}(S' \setminus C') \in \mathcal{T}$, cioè, per la iv) della Proposizione 6.2, $S \setminus f^{-1}(C') \in \mathcal{T}$ e quindi $f^{-1}(C') \in \mathcal{C}$; pertanto è vera anche la (6.5). In maniera del tutto analoga si prova che vale l'implicazione (6.5) $\implies$ (6.4).

Un'altra caratterizzazione della continuità (globale) di una funzione $f : S \to S'$ si ottiene mettendo in relazione, per ogni $X \subseteq S$, l'insieme $f\left(\overline{X}\right)$, immagine della chiusura, con l'insieme $\overline{f(X)}$, chiusura dell'immagine.

Teorema 6.3. (Caratterizzazione della continuità mediante la chiusura). *Siano* S, S' *due spazi topologici.*

Una funzione $f : S \to S'$ *è continua se e soltanto se*

$$\forall X \in \mathcal{P}(S) \implies f\left(\overline{X}\right) \subseteq \overline{f(X)} \ . \tag{6.6}$$

Dimostrazione. Proviamo che la (6.6) è equivalente alla (6.5).

Proviamo dapprima che la (6.5) implica la (6.6). Per ogni insieme $X \in \mathcal{P}(S)$, per la i) della Proposizione 6.2 e per la ovvia osservazione che l'inclusione tra due sottoinsiemi di S' si conserva passando alle controimmagini, si ha

$$X \subseteq f^{-1}(f(X)) \subseteq f^{-1}\left(\overline{f(X)}\right) \ ;$$

ma, per l'ipotesi (6.5), l'insieme $f^{-1}\left(\overline{f(X)}\right)$, controimmagine di un insieme chiuso, è un insieme chiuso, pertanto si ha

$$\overline{X} \subseteq f^{-1}\left(\overline{f(X)}\right) \ ,$$

cioè, per la v) della Proposizione 6.2,

$$f\left(\overline{X}\right) \subseteq \overline{f(X)} \ .$$

Abbiamo così dimostrato che è vera la (6.6).

Proviamo adesso che dalla (6.6) segue la (6.5). Sia H un qualunque insieme chiuso di S'. Per la ii) della Proposizione 6.2 si ha

$$f(f^{-1}(H)) \subseteq H$$

e quindi, essendo H chiuso,

$$\overline{f(f^{-1}(H))} \subseteq H \quad ,$$

da cui, per l'ipotesi (6.6), si ricava

$$f\big(\overline{f^{-1}(H)}\big) \subseteq H \quad ,$$

che, per la v) della Proposizione 6.2, equivale a

$$\overline{f^{-1}(H)} \subseteq f^{-1}(H) \quad ,$$

dunque l'insieme $f^{-1}(H)$ è chiuso.

7. Confronto tra topologie.

Definizione 7.1. (*Confronto tra topologie*). Siano $(S,\mathcal{U}_1)$, $(S,\mathcal{U}_2)$ due spazi topologici aventi lo stesso sostegno S.

Si dice che la topologia $\mathcal{U}_1$ è *più fine* della topologia $\mathcal{U}_2$ (o che $\mathcal{U}_2$ è *meno fine* di $\mathcal{U}_1$) se accade che

$$\mathcal{U}_1(x) \supseteq \mathcal{U}_2(x) \qquad \forall x \in S$$

(cioè: qualunque sia il punto $x \in S$, ogni intorno di x nello spazio topologico $(S,\mathcal{U}_2)$ è intorno dello stesso punto x anche nello spazio topologico $(S,\mathcal{U}_1)$).

Esempio 7.1. In un qualunque insieme S la topologia discreta e quella indiscreta sono, rispettivamente, più fine e meno fine di qualunque altra topologia.

Diciamo che la topologia $\mathcal{U}_1$ è *strettamente più fine* della topologia $\mathcal{U}_2$ per significare che $\mathcal{U}_1$ è più fine di $\mathcal{U}_2$ e inoltre $\mathcal{U}_1 \neq \mathcal{U}_2$.

Esempio 7.2. Nell'insieme $\mathbb{R}$ la topologia usuale (cioè quella indotta dalla metrica usuale: $d(x,y) = |x-y| \ \ \forall x,y \in \mathbb{R}$) è strettamente più fine della topologia cofinita ed è strettamente meno fine di ciascuna delle due topologie $\mathcal{U}_1$ e $\mathcal{U}_2$ così definite:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_1(x) &= \{U \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : \exists \delta > 0 \text{ tale che } U \supseteq [x, x+\delta[\,\} \quad , \\ \mathcal{U}_2(x) &= \{U \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : \exists \delta > 0 \text{ tale che } U \supseteq \,]x-\delta, x]\,\} \end{aligned} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

(lasciamo allo studente la facile verifica del fatto che $\mathcal{U}_1$ e $\mathcal{U}_2$ sono effettivamente topologie su $\mathbb{R}$).

Invece, le due topologie $\mathcal{U}_1$ e $\mathcal{U}_2$ non sono tra loro confrontabili, cioè nessuna delle due è più fine dell'altra.

Poiché in uno spazio topologico, per definizione, un insieme non vuoto è aperto se e soltanto se esso è intorno di ogni suo punto, mentre un insieme è chiuso se e soltanto se esso è il complementare di un insieme aperto, si ha, ovviamente, la seguente

Proposizione 7.1. (Caratterizzazioni del confronto tra topologie mediante gli insiemi aperti e mediante gli insiemi chiusi). *Siano $(S,\mathcal{U}_1)$, $(S,\mathcal{U}_2)$ due spazi topologici con lo stesso sostegno S e siano $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ e $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ le corrispondenti famiglie degli insiemi aperti e degli insiemi chiusi.*

Sono fatti equivalenti:

i) *la topologia $\mathcal{U}_1$ è più fine della topologia $\mathcal{U}_2$;*

ii) $\mathcal{T}_1 \supseteq \mathcal{T}_2$ *;*

iii) $\mathcal{C}_1 \supseteq \mathcal{C}_2$.

Fissato l'insieme non vuoto S e considerato l'insieme $\mathbf{U}(S)$ di tutte le possibili topologie su S, è chiaro che la relazione $\preceq$ nell'insieme $\mathbf{U}(S)$, definita ponendo

$$\mathcal{U}_2 \preceq \mathcal{U}_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{U}_2 \text{ è meno fine di } \mathcal{U}_1 \quad ,$$

è una relazione di ordinamento parziale.

Nell'insieme parzialmente ordinato $(\mathbf{U}(S), \preceq)$, la topologia indiscreta e quella discreta sono, rispettivamente, il minimo ed il massimo elemento (Esempio 7.1). Inoltre, eccettuato il caso banale in cui l'insieme S è un insieme unitario (e quindi anche $(\mathbf{U}(S)$ è un insieme unitario), la relazione $\preceq$ non è una relazione d'ordine totale. Infatti, se l'insieme S ha almeno due elementi, allora, fissato comunque un punto $c \in S$, si ottiene, in corrispondenza, una mappa degli intorni $\mathcal{U}_c$ su S ponendo

$$\mathcal{U}_c(x) = \{S\} \quad \forall x \in S \setminus \{c\} \quad , \quad \mathcal{U}_c(c) = \{U \in \mathcal{P}(S) \,:\, c \in U\}$$

(la verifica dei postulati $\mathrm{u}_1) - \mathrm{u}_4)$ è immediata). Ovviamente, se c_1, c_2 sono due punti distinti di S, le corrispondenti topologie $\mathcal{U}_{c_1}$ e $\mathcal{U}_{c_2}$ non sono confrontabili.

Le due proposizioni seguenti si dimostrano facilmente usando il Teorema 6.1.

Proposizione 7.2. (Caratterizzazione del confronto tra topologie mediante la continuità dell'applicazione identica). *Siano $(S,\mathcal{U}_1)$, $(S,\mathcal{U}_2)$ spazi topologici con lo stesso sostegno S.*

La topologia $\mathcal{U}_1$ è più fine della topologia $\mathcal{U}_2$ se e soltanto se l'applicazione identica $i : S \to S$ è una funzione continua dallo spazio topologico $(S,\mathcal{U}_1)$ nello spazio topologico $(S,\mathcal{U}_2)$.

Proposizione 7.3. (Permanenza della continuità al variare della topologia). *Siano S, S' due spazi topologici e sia $f : S \to S'$ una funzione continua.*

La funzione f rimane continua se si sostituisce

- *la topologia di S con una topologia più fine,*

oppure

- *la topologia di S' con una topologia meno fine.*

Occupiamoci adesso del confronto tra topologie indotte da metriche.

Proposizione 7.4. *Siano d_1, d_2 due metriche sullo stesso insieme S e siano $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_2$ le topologie da esse indotte.*

Se esiste una costante positiva k tale che

$$d_2(x,y) \le k\, d_1(x,y) \qquad \forall x,y \in S \quad , \tag{7.1}$$

la topologia $\mathcal{U}_1$ è più fine della $\mathcal{U}_2$.

Dimostrazione. Dalla (7.1) segue che, per ogni $x_0 \in S$ ed ogni $r > 0$, il disco $B_2(x_0, r)$ di centro x_0 e raggio r dello spazio metrico (S, d_2) contiene il disco $B_1(x_0, \frac{r}{k})$ di (S, d_1), quindi ogni intorno di x_0 nello spazio topologico $(S,\mathcal{U}_2)$ è intorno di x_0 anche in $(S,\mathcal{U}_1)$.

Corollario 7.1. *Siano d_1, d_2 due metriche sullo stesso insieme S.*

Se esistono due costanti positive h e k tali che

$$h\, d_1(x,y) \le d_2(x,y) \le k\, d_1(x,y) \qquad \forall x,y \in S \quad , \tag{7.2}$$

le due metriche inducono su S la stessa topologia.

È uso abbastanza diffuso dire che due metriche d_1, d_2 su uno stesso insieme S sono *equivalenti* se per tali metriche sono soddisfatte le ipotesi del Corollario 7.1; è infatti facile verificare che, nell'insieme di tutte le metriche su S, la relazione $\sim$, definita ponendo $d_1 \sim d_2$ se e soltanto se esistono due costanti positive h

e k per le quali è verificata la (7.2), è una relazione di equivalenza. Le due metriche d_1, d_2 si dicono invece *topologicamente equivalenti* se esse inducono su S la stessa topologia. Il Corollario 7.1 può allora enunciarsi dicendo che:

"Se due metriche (sullo stesso insieme) *sono equivalenti, allora esse sono pure topologicamente equivalenti".*

Il viceversa della precedente implicazione non è vero. Infatti la successiva Proposizione 7.5 assicura che, fissata una qualunque metrica d sull'insieme S, esiste sempre una metrica d', topologicamente equivalente a d, che è limitata, precisamente: $d'(x,y) < 1 \ \forall x, y \in S$; di conseguenza, se la metrica di partenza d non è limitata, cioè $\sup_{x,y\in S} d(x,y) = +\infty$, è chiaro che le due metriche d e d' non sono equivalenti (giacché non esiste $k > 0$ tale che $d(x,y) \le k\, d'(x,y) \ \forall x, y \in S$).

Proposizione 7.5. *Sia* (S,d) *un qualunque spazio metrico.*

Ponendo

$$d'(x,y) \;=\; \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \qquad \forall x,y \in S \quad , \tag{7.3}$$

si ottiene una metrica d' *su* S *topologicamente equivalente alla metrica* d.

Dimostrazione. La d' verifica, ovviamente, i postulati

$$d'(x,y) \ge 0 \quad \forall x,y \in S \quad , \quad d'(x,y) = 0 \iff x = y \quad ,$$

$$d'(x,y) = d'(y,x) \quad \forall x,y \in S \quad .$$

Proviamo che vale anche la disuguaglianza triangolare

$$d'(x,y) \le d'(x,z) + d'(z,y) \qquad \forall x,y,z \in S \quad .$$

Consideriamo, a tale scopo, la funzione reale di variabile reale

$$g(t) = \frac{t}{1+t}$$

ed cosserviamo che essa è crescente in ogni intervallo contenuto nel suo dominio $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$; infatti

$$g'(t) = \mathrm{D}\left[1 - \frac{1}{1+t}\right] = \frac{1}{(1+t)^2} > 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \quad .$$

In particolare, è crescente la restrizione di g all'intervallo $[0,+\infty[$. Di conseguenza, per ogni $x, y, z \in S$, dato che

$$d(x,y) \;\le\; d(x,z) + d(z,y) \quad ,$$

si ha pure

$$d'(x,y) \;=\; g(d(x,y)) \;\le\; g(d(x,z) + d(z,y)) \;=$$

$$= \frac{d(x,z) + d(z,y)}{1 + d(x,z) + d(z,y)} \;=\; \frac{d(x,z)}{1 + d(x,z) + d(z,y)} + \frac{d(z,y)}{1 + d(x,z) + d(z,y)} \;\le$$

$$\le \frac{d(x,z)}{1 + d(x,z)} + \frac{d(z,y)}{1 + d(z,y)} \;=\; d'(x,z) \;+\; d'(z,y) \quad .$$

Poiché $d'(x,y) \leq d(x,y)$ $\forall x,y \in S$, per la Proposizione 7.4 la topologia indotta da d è più fine della topologia indotta da d'. Viceversa, per ogni $x_0 \in S$ ed ogni $r > 0$, dato che

$$d(x,x_0) < r \quad \Longleftrightarrow \quad g(d(x,x_0)) < g(r) \quad \Longleftrightarrow \quad d'(x,x_0) < \frac{r}{1+r} \quad ,$$

il disco aperto $B(x_0, r)$, di centro x_0 e raggio r, dello spazio metrico (S,d) coincide con il disco $B'(x_0, \frac{r}{1+r})$ dello spazio (S,d'); pertanto ogni intorno di x_0 nella topologia indotta da d è intorno di x_0 anche nella topologia indotta da d', dunque le due topologie coincidono.

Osservazione 7.1. Notiamo che le due metriche topologicamente equivalenti d e d' considerate nella precedente proposizione (le quali, come abbiamo già rilevato, non sono equivalenti se $\sup_{x,y\in S} d(x,y) = +\infty$) soddisfano, in ogni caso, una delle due disuguaglianze (7.2); infatti $d'(x,y) \leq d(x,y)$ $\forall x,y \in S$.

Il successivo Esercizio 7.1 mostra che, se la metrica d, oltre alla condizione

$$\sup_{x,y\in S} d(x,y) = +\infty \quad ,$$

verifica anche l'altra:

$$\inf_{\substack{x,y\in S \\ x\neq y}} d(x,y) = 0 \quad ,$$

allora è possibile costruire una metrica $\widetilde{d}$, topologicamente equivalente a d, per la quale non è soddisfatta nessuna delle due disuguaglianze (7.2), cioè non esiste nè una costante $h > 0$ tale che $h\,\widetilde{d}(x,y) \leq d(x,y)$ $\forall x,y \in S$ nè una costante $k > 0$ tale che $d(x,y) \leq k\,\widetilde{d}(x,y)$ $\forall x,y \in S$.

Esercizio 7.1. Sia (S,d) un qualunque spazio metrico.

1) Dimostrare che, ponendo

$$\widetilde{d}(x,y) \;=\; \sqrt{d(x,y)} \qquad \forall x,y \in S \quad ,$$

si ottiene una metrica $\widetilde{d}$ sull'insieme S.

2) Provare che la metrica $\widetilde{d}$ è topologicamente equivalente alla metrica d.

3) Provare che:

$$\exists h > 0 \;:\; h\,d(x,y) \leq \widetilde{d}(x,y) \quad \forall x,y \in S \quad \Longleftrightarrow \quad \sup_{x,y\in S} d(x,y) < +\infty \quad .$$

4) Provare che:

$$\exists k > 0 \;:\; \widetilde{d}(x,y) \leq k\,d(x,y) \quad \forall x,y \in S \quad \Longleftrightarrow \quad \inf_{\substack{x,y\in S \\ x\neq y}} d(x,y) > 0 \quad .$$

8. Sottospazi di uno spazio topologico.

Sia $(S,\mathcal{U})$ uno spazio topologico e sia S_1 un sottoinsieme non vuoto di S. Possiamo allora considerare la seguente mappa degli intorni $\mathcal{U}_1$ sull'insieme S_1:

$$\mathcal{U}_1(x) \;=\; \{S_1 \cap U \;:\; U \in \mathcal{U}(x)\} \qquad \forall x \in S_1 \quad , \tag{8.1}$$

ovvero, in maniera più esplicita,

$$\mathcal{U}_1(x) \;=\; \{U_1 \in \mathcal{P}(S_1) \;:\; \exists U \in \mathcal{U}(x) \text{ tale che } U_1 = S_1 \cap U\} \qquad \forall x \in S_1 \quad .$$

La verifica del fatto che la famiglia $\mathcal{U}_1(x)$ sia non vuota per ogni $x \in S_1$ e che l'applicazione $x \to \mathcal{U}_1(x)$ soddisfi i quattro postulati $\mathrm{u}_1) - \mathrm{u}_4)$ è immediata ed è lasciata per esercizio al lettore.

Esercizio 8.1. Provare quanto sopra asserito a proposito della $\mathcal{U}_1$.

Definizione 8.1. (*Sottospazio. Topologia indotta*). Sia $(S,\mathcal{U})$ uno spazio topologico e sia S_1 un sottoinsieme non vuoto di S. Sia, inoltre, $\mathcal{U}_1$ la mappa degli intorni su S_1 definita dalla (8.1).

Si dice allora che lo spazio topologico $(S_1,\mathcal{U}_1)$ è un *sottospazio di* $(S,\mathcal{U})$.

Si dice inoltre che la topologia $\mathcal{U}_1$ è la *topologia indotta su* S_1 *dalla topologia* $\mathcal{U}$.

Proposizione 8.1. (Insiemi aperti e insiemi chiusi di un sottospazio). *Sia* $(S_1,\mathcal{U}_1)$ *un sottospazio dello spazio topologico* $(S,\mathcal{U})$.

Le seguenti formule mettono in relazione le famiglie $\mathcal{T}_1$ *e* $\mathcal{C}_1$ *degli insiemi aperti e degli insiemi chiusi del sottopspazio* $(S_1,\mathcal{U}_1)$ *con le corrispondenti famiglie* $\mathcal{T}$ *e* $\mathcal{C}$ *dello spazio topologico* $(S,\mathcal{U})$*:*

$$\mathcal{T}_1 = \{S_1 \cap A : A \in \mathcal{T}\} \quad , \quad \mathcal{C}_1 = \{S_1 \cap C : C \in \mathcal{C}\} \quad . \tag{8.2}$$

Dimostrazione. Consideriamo un qualunque insieme $A_1 \in \mathcal{T}_1$, $A_1 \neq \emptyset$; esso è, per definizione, intorno di ogni suo punto nello spazio $(S_1,\mathcal{U}_1)$, pertanto, per ogni $x \in A_1$, esiste $U_x \in \mathcal{U}(x)$ tale che $A_1 = S_1 \cap U_x$; ma, in corrispondenza di U_x, vi è pure un insieme aperto $B_x \in \mathcal{T}$ tale da aversi $x \in B_x \subseteq U_x$ e quindi

$$x \in S_1 \cap B_x \subseteq S_1 \cap U_x = A_1 \quad ; \tag{8.3}$$

allora, considerato l'insieme $B = \bigcup_{x \in A_1} B_x \in \mathcal{T}$, dalla (8.3) segue facilmente che è $A_1 = S_1 \cap B$, dunque A_1 appartiene alla famiglia di insiemi $\{S_1 \cap A : A \in \mathcal{T}\}$. Poiché anche l'insieme vuoto appartiene, ovviamente, a tale famiglia, abbiamo così provato che è vera l'inclusione $\mathcal{T}_1 \subseteq \{S_1 \cap A : A \in \mathcal{T}\}$. Viceversa, un insieme A_1 del tipo $S_1 \cap A$, con $A \in \mathcal{T}$, se non è vuoto, è intorno di ogni suo punto nello spazio $(S_1,\mathcal{U}_1)$; pertanto si ha, in ogni caso, $A_1 \in \mathcal{T}_1$. Rimane così dimostrata anche l'inclusione $\{S_1 \cap A : A \in \mathcal{T}\} \subseteq \mathcal{T}_1$ e quindi è vera la prima delle (8.2).

Proviamo la seconda uguaglianza. Un insieme $C_1 \subseteq S_1$ appartiene a $\mathcal{C}_1$ se e soltanto se C_1 può scriversi nella forma $C_1 = S_1 \setminus A_1$, con $A_1 \in \mathcal{T}_1$, ovverossia, per quanto già dimostrato, nella forma $C_1 = S_1 \setminus (S_1 \cap A)$ con $A \in \mathcal{T}$; d'altra parte si ha, ovviamente,

$$S_1 \setminus (S_1 \cap A) = S_1 \setminus A = S_1 \cap (S \setminus A) \quad ;$$

possiamo quindi concludere che C_1 appartiene a $\mathcal{C}_1$ se e soltanto se C_1 può scriversi nella forma $S_1 \cap C$, con $C \in \mathcal{C}$. Ciò prova la seconda delle (8.2).

Osservazione 8.1. Supponiamo che $(S_1,\mathcal{U}_1)$ sia un sottospazio dello spazio topologico $(S,\mathcal{U})$ e che S_2 sia un sottoinsieme non vuoto di S_1. Nell'insieme S_2 possiamo allora considerare due topologie indotte: la topologia indotta da $\mathcal{U}$, che indichiamo con $\mathcal{U}_2$, e la topologia indotta da $\mathcal{U}_1$, che indichiamo con $\mathcal{U}_{12}$. Verifichiamo che $\mathcal{U}_2 = \mathcal{U}_{12}$. Infatti, fissato il punto $x_0 \in S_2$, si ha

$$\mathcal{U}_2(x_0) = \{S_2 \cap U : U \in \mathcal{U}(x_0)\} \quad , \quad \mathcal{U}_{12}(x_0) = \{S_2 \cap U_1 : U_1 \in \mathcal{U}_1(x_0)\} \quad ;$$

inoltre

$$\mathcal{U}_1(x_0) = \{S_1 \cap U : U \in \mathcal{U}(x_0)\} \quad .$$

Allora, se consideriamo un qualunque insieme appartenente a $\mathcal{U}_2(x_0)$, cioè un insieme del tipo $S_2 \cap U$, con $U \in \mathcal{U}(x_0)$, dato che

$$S_2 \cap U = (S_2 \cap S_1) \cap U = S_2 \cap (S_1 \cap U)$$

e che $S_1 \cap U \in \mathcal{U}_1(x_0)$, l'insieme $S_2 \cap U$ appartiene pure a $\mathcal{U}_{12}(x_0)$. Viceversa, preso un qualunque insieme appartenente alla famiglia $\mathcal{U}_{12}(x_0)$, cioè un insieme del tipo $S_2 \cap U_1$ con $U_1 \in \mathcal{U}_1(x_0)$, esiste $U \in \mathcal{U}(x_0)$ tale che $U_1 = S_1 \cap U$ e pertanto si ha

$$S_2 \cap U_1 = S_2 \cap (S_1 \cap U) = (S_2 \cap S_1) \cap U = S_2 \cap U \quad ,$$

dunque $S_2 \cap U_1 \in \mathcal{U}_2(x_0)$.

Tramite la topologia indotta possiamo estendere, in maniera naturale, il concetto di continuità alle funzioni che non sono definite in tutto l'ambiente di uno spazio topologico (come accade nella Definizione 6.1), ma solo in un suo sottoinsieme.

Definizione 8.2. (*Funzioni continue definite in un sottoinsieme di uno spazio topologico*). Siano dati due spazi topologici $(S,\mathcal{U})$ e $(S',\mathcal{U}')$, un sottoinsieme non vuoto S_1 di S ed una funzione $f : S_1 \to S'$.

Fissato $x_0 \in S_1$, si dice che la funzione f è *continua nel punto* x_0 se f, considerata come funzione dallo spazio topologico $(S_1,\mathcal{U}_1)$, sottospazio di $(S,\mathcal{U})$, nello spazio topologico $(S',\mathcal{U}')$, è continua in x_0, cioè se accade che:

$$\forall U' \in \mathcal{U}'(f(x_0)) \quad \exists U \in \mathcal{U}(x_0) \ : \ f(S_1 \cap U) \subseteq U' \tag{8.4}$$

(notiamo che la (8.4) è formalmente identica alla formula che, nei corsi di Analisi matematica I e II, esprimeva la continuità delle funzioni reali di una o più variabili reali).

Si dice poi che la funzione f è *continua in* S_1 se essa è continua in ogni punto $x_0 \in S_1$.

Proposizione 8.2. (Continuità della restrizione). *Siano dati due spazi topologici* $(S,\mathcal{U})$ *e* $(S',\mathcal{U}')$*, due sottoinsiemi non vuoti* S_1, S_2 *di* S*, con* $S_2 \subseteq S_1$*, ed una funzione* $f : S_1 \to S'$*.*

Sia $x_0 \in S_2$*. Se la funzione* f *è continua nel punto* x_0*, anche la restrizione* $f|_{S_2}$ *è continua in* x_0*.*

Dimostrazione. Infatti, se è vera la (8.4), allora, essendo

$$f|_{S_2}(S_2 \cap U) \ = \ f(S_2 \cap U) \ \subseteq \ f(S_1 \cap U) \quad ,$$

a maggior ragione si ha

$$\forall U' \in \mathcal{U}'(f|_{S_2}(x_0)) \quad \exists U \in \mathcal{U}(x_0) \ : \ f|_{S_2}(S_2 \cap U) \subseteq U' \quad ,$$

cioè $f|_{S_2}$ è continua in x_0.

Osservazione 8.2. Siano $(S,\mathcal{U})$, $(S',\mathcal{U}')$ spazi topologici, sia S_1 un sottoinsieme non vuoto di S e sia $f : S_1 \to S'$. Posto $S_1' = f(S_1)$ e denotata con $\mathcal{U}_1'$ la topologia indotta su S_1' da $\mathcal{U}'$, possiamo considerare come spazio topologico "di arrivo" della funzione f, oltre che $(S',\mathcal{U}')$, anche il suo sottospazio $(S_1',\mathcal{U}_1')$. È però facile verificare che la scelta dell'uno o dell'altro spazio è ininfluente nei riguardi della continuità di f, cioè la funzione f (a valori in $(S',\mathcal{U}')$) è continua in un punto $x_0 \in S_1$ se e soltanto se la f, considerata come funzione a valori nello spazio topologico $(S_1',\mathcal{U}_1')$, è continua nel punto x_0. Ciò si ricava immediatamente dalle precedenti definizioni di funzione continua e di topologia indotta tenendo presente che, essendo $S_1' = f(S_1)$, per ogni insieme $U_1 \subseteq S_1$ ed ogni $U' \subseteq S'$, si ha l'equivalenza

$$f(U_1) \subseteq U' \quad \Longleftrightarrow \quad f(U_1) \subseteq S_1' \cap U' \quad .$$

Ci occupiamo ora di due teoremi che permettono di dedurre dalla continuità di certe restrizioni la continuità della funzione originaria. Ne esaminiamo dapprima la versione globale (funzione continua in tutto lo spazio).

Teorema 8.1. *Siano* S*,* S' *spazi topologici, sia* $\{A_i \, : \, i \in I\}$ *una famiglia di insiemi aperti non vuoti dello spazio* S *tale che* $\bigcup_{i\in I} A_i = S$ *e sia* $f : S \to S'$*.*

La funzione f *è continua* (in S) *se e soltanto se ciascuna delle restrizioni* $f_i = f|_{A_i}$*,* $i \in I$*, è continua* (in A_i)*.*

Dimostrazione. Se f è continua, allora, per la Proposizione 8.2, ogni f_i è continua.

Proviamo l'implicazione contraria. Fissato un qualunque insieme A', aperto dello spazio S', osserviamo che, come facilmente si verifica, si ha

$$f^{-1}(A') \;=\; \bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(A') \tag{8.5}$$

e che ogni insieme $f_i^{-1}(A')$, essendo un aperto di A_i, munito della topologia indotta da quella di S, può (Proposizione 8.1) scriversi nella forma $A_i \cap B_i$, con B_i aperto di S, quindi $f_i^{-1}(A')$ stesso è un aperto di S e dunque, per la (8.5), la controimmagine $f^{-1}(A')$ è un insieme aperto di S; ciò prova la continuità di f.

Definizione 8.3. (*Famiglia di insiemi localmente finita*). Una famiglia $\{C_i \,:\, i \in I\}$ di sottoinsiemi di uno spazio topologico S si dice *localmente finita* se ogni punto x_0 di S possiede un intorno U che ha intersezione non vuota solo con un numero finito di insiemi C_i, $i \in I$, o con nessuno di essi.

Ad esempio, in $\mathbb{R}$, con la topologia usuale, la famiglia dei dischi aperti di centro $x_0 \in \mathbb{Z}$ e raggio $r = 1$ è localmente finita, mentre non lo è quella dei dischi aperti di centro $x_0 \in \mathbb{Q}$ e raggio $r = 1$.

Teorema 8.2. *Siano S, S' spazi topologici, sia $\{C_i \,:\, i \in I\}$ una famiglia localmente finita di insiemi chiusi non vuoti dello spazio S tale che $\bigcup_{i \in I} C_i = S$ e sia $f : S \to S'$.*

La funzione f è continua (in S) *se e soltanto se ciascuna delle restrizioni $f_i = f|_{C_i}$, $i \in I$, è continua* (in C_i).

Dimostrazione. Come nel precedente teorema l'implicazione

$$f \text{ continua} \quad \Longrightarrow \quad f_i \text{ continua } \;\forall i \in I$$

segue subito dalla Proposizione 8.2.

Proviamo l'implicazione contraria. Fissato un qualunque insieme C', chiuso dello spazio S', dimostriamo che $f^{-1}(C')$ è un chiuso di S, cioè $S \setminus f^{-1}(C')$ è aperto. Sia $x_0 \in S \setminus f^{-1}(C')$. Poiché la famiglia $\{C_i \,:\, i \in I\}$ è localmente finita, esistono un intorno U di x_0 ed un sottoinsieme finito $J = \{i_1, \ldots, i_k\}$ di I tali che $U \cap C_i = \emptyset$ $\forall i \in I \setminus J$. Fissato un aperto A di S tale che $x_0 \in A \subseteq U$, consideriamo l'insieme

$$B \;=\; A \setminus \Big(f_{i_1}^{-1}(C') \cup \ldots \cup f_{i_k}^{-1}(C') \Big)$$

e facciamo vedere che B è un insieme aperto di S che contiene il punto x_0 ed è contenuto nell'insieme $S \setminus f^{-1}(C')$; con ciò la dimostrazione sarà completa.

L'insieme B è aperto perché è la differenza tra un insieme aperto, A, ed un insieme chiuso, $f_{i_1}^{-1}(C') \cup \ldots \cup f_{i_k}^{-1}(C')$; infatti ogni insieme $f_{i_r}^{-1}(C')$, essendo per ipotesi un insieme chiuso di C_{i_r}, per la Proposizione 8.1 è anche un insieme chiuso di S. Inoltre $x_0 \in B$ perché, altrimenti, x_0 apparterrebbe a qualcuno degli insiemi $f_{i_r}^{-1}(C')$, $r = 1, \ldots, k$, e quindi si avrebbe $f(x_0) \in C'$, in contraddizione con il fatto che $x_0 \in S \setminus f^{-1}(C')$. Infine, l'insieme B è contenuto in $S \setminus f^{-1}(C')$; infatti, dato che $B \subseteq A \subseteq U$, ogni punto $x \in B$ appartiene a qualcuno degli insiemi $C_{i_1}, \ldots, C_{i_k}$ e quindi, supponendo $x \in C_{i_r}$, dato che $x \notin f_{i_r}^{-1}(C')$, si ha

$$f(x) \;=\; f_{i_r}(x) \;\notin\; C' \quad ,$$

dunque $x \notin f^{-1}(C')$.

Passiamo ora alle versioni "puntuali" dei Teoremi 8.1 e 8.2.

Teorema 8.1′. *Siano S, S' spazi topologici, sia $\{A_i \,:\, i \in I\}$ una famiglia di insiemi aperti non vuoti dello spazio S tale che $\bigcup_{i \in I} A_i = S$ e sia $f : S \to S'$. Sia inoltre x_0 un punto di S e sia $I_0 = \{i \in I \,:\, x_0 \in A_i\}$.*

La funzione f è continua nel punto x_0 se e soltanto se ciascuna delle restrizioni $f_i = f|_{A_i}$, $i \in I_0$, è continua in x_0.

Dimostrazione. Se f è continua in x_0, allora, per la Proposizione 8.2, ogni f_i, $i \in I_0$, è continua in x_0.

Proviamo l'implicazione contraria. Fissato un qualunque insieme A_{i_0}, con $i_0 \in I_0$, si ha, per la supposta continuità di f_{i_0} in x_0,

$$\forall U' \in \mathcal{U}'(f(x_0)) \quad \exists U \in \mathcal{U}(x_0) \ : \ f_{i_0}(A_{i_0} \cap U) \subseteq U'$$

e quindi, dato che $A_{i_0} \cap U$ è un intorno del punto x_0, possiamo asserire che

$$\forall U' \in \mathcal{U}'(f(x_0)) \quad \exists V \in \mathcal{U}(x_0) \ : \ f(V) \subseteq U' \quad ,$$

cioè f è continua in x_0.

Teorema 8.2$'$. *Siano S, S' spazi topologici, sia $\{C_i \, : \, i \in I\}$ una famiglia localmente finita di insiemi chiusi non vuoti dello spazio S tale che $\bigcup_{i\in I} C_i = S$ e sia $f : S \to S'$. Sia inoltre x_0 un punto di S e sia $I_0 = \{i \in I \, : \, x_0 \in C_i\}$.*

La funzione f è continua nel punto x_0 se e soltanto se ciascuna delle restrizioni $f_i = f|_{C_i}$, $i \in I_0$, è continua x_0.

Dimostrazione. Come nel precedente teorema l'implicazione

$$f \text{ continua in } x_0 \quad \Longrightarrow \quad f_i \text{ continua in } x_0 \ \ \forall i \in I_0$$

segue subito dalla Proposizione 8.2.

Proviamo l'implicazione contraria. Poiché la famiglia di insiemi $\{C_i \, : \, i \in I\}$ è localmente finita, la stessa cosa può dirsi della famiglia $\{C_i \, : \, i \in I_0\}$ e da ciò, tenuto conto del fatto che $\bigcup_{i\in I} C_i = S$, segue facilmente l'esistenza di un intorno $U \in \mathcal{U}(x_0)$ e di un sottoinsieme finito $\{i_1, \ldots, i_k\}$ di I_0 tali che $U \subseteq C_{i_1} \cup \ldots \cup C_{i_k}$. Sia ora U' un arbitrario intorno di $f(x_0)$. Per la supposta continuità delle funzioni $f_{i_1}, \ldots, f_{i_k}$ nel punto x_0 esistono $U_1, \ldots, U_k \in \mathcal{U}(x_0)$ tali che

$$f_{i_1}(C_{i_1} \cap U_1) \subseteq U' \ , \ \ldots \ , \ f_{i_k}(C_{i_k} \cap U_k) \subseteq U' \quad .$$

Consideriamo allora l'intorno $V = U \cap U_1 \cap \ldots \cap U_k \in \mathcal{U}(x_0)$ e verifichiamo che $f(V) \subseteq U'$ (con ciò la dimostrazione sarà completa); si ha infatti:

$$\begin{aligned} x \in V \quad &\Longrightarrow \quad x \in \big(C_{i_1} \cup \ldots \cup C_{i_k}\big) \cap \big(U_1 \cap \ldots \cap U_k\big) \quad \Longrightarrow \\ \Longrightarrow \quad \exists r \in \{1, \ldots, k\} \ : \ x \in C_{i_r} \cap U_r \quad &\Longrightarrow \quad f(x) \, = \, f_{i_r}(x) \, \in \, U' \quad . \end{aligned}$$

Osservazione 8.3. È evidente che dai Teoremi 8.1$'$ e 8.2$'$ si deducono, come rispettivi corollari, i Teoremi 8.1 e 8.2.

9. Prodotto di due spazi topologici.

Siano $(S_1, \mathcal{U}_1)$, $(S_2, \mathcal{U}_2)$ due spazi topologici. Denotato con S il prodotto cartesiano $S_1 \times S_2$, possiamo considerare la mappa degli intorni $\mathcal{U}$ su S definita nel modo seguente:

$$\mathcal{U}(x_1, x_2) \ = \ \{U \in \mathcal{P}(S) \, : \, \exists \, U_1 \in \mathcal{U}_1(x_1) \, , \, \exists \, U_2 \in \mathcal{U}_2(x_2) \text{ tali che } U \supseteq U_1 \times U_2\} \qquad \forall (x_1, x_2) \in S \ , \tag{9.1}$$

dove, così come siamo abituati a fare per le funzioni di due variabili, abbiamo scritto $\mathcal{U}(x_1, x_2)$ invece di $\mathcal{U}\big((x_1, x_2)\big)$.

È facile verificare che la $\mathcal{U}$ sopra definita è effettivamente una mappa degli intorni sull'insieme S.

Proviamo, ad esempio, che la $\mathcal{U}$ soddisfa l'assioma u$_4$). Sia $U \in \mathcal{U}(x_1, x_2)$, cioè esistano due intorni $U_1 \in \mathcal{U}_1(x_1)$, $U_2 \in \mathcal{U}_2(x_2)$ tali che $U \supseteq U_1 \times U_2$. Poiché $\mathcal{U}_1$ e $\mathcal{U}_2$ verificano l'assioma u$_4$), esistono

$V_1 \in \mathcal{U}_1(x_1)$, $V_2 \in \mathcal{U}_2(x_2)$ tali che $U_1 \in \mathcal{U}_1(y_1)\ \ \forall y_1 \in V_1$, $U_2 \in \mathcal{U}_2(y_2)\ \ \forall y_2 \in V_2$; allora, posto $V = V_1 \times V_2$, si ha $V \in \mathcal{U}(x_1,x_2)$ e $U \in \mathcal{U}(y_1,y_2)\ \ \forall (y_1,y_2) \in V$.

Definizione 9.1. (*Prodotto di due spazi topologici*). La topologia $\mathcal{U}$ su $S_1 \times S_2$ definita dalla (9.1) si chiama la *topologia prodotto* delle topologie $\mathcal{U}_1$ e $\mathcal{U}_2$.

Si inoltre dice che lo spazio topologico $(S,\mathcal{U})$ è il *prodotto degli spazi topologici* $(S_1,\mathcal{U}_1)$ e $(S_2,\mathcal{U}_2)$

Esempi 9.1. 1) Se i due spazi $(S_1,\mathcal{U}_1)$ e $(S_2,\mathcal{U}_2)$ sono entrambi uguali a $\mathbb{R}$, munito della topologia usuale, allora un insieme $U \subseteq \mathbb{R}^2$ è intorno di un punto $(\overline{x}_1,\overline{x}_2) \in \mathbb{R}^2$ rispetto alla topologia prodotto se e soltanto se U contiene un rettangolo aperto di centro $(\overline{x}_1,\overline{x}_2)$, cioè un insieme del tipo $]\overline{x}_1-\delta_1,\overline{x}_1+\delta_1[\times]\overline{x}_2-\delta_2,\overline{x}_2+\delta_2[$ $(\delta_1,\delta_2>0)$, ma ciò accade se e soltanto se U contiene un disco aperto di centro $(\overline{x}_1,\overline{x}_2)$ dello spazio metrico $(\mathbb{R}^2,d)$, essendo d la metrica usuale, cioè quella euclidea:

$$d\big((x_1,x_2),(y_1,y_2)\big) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2} \qquad \forall (x_1,x_2),(y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2 \quad . \tag{9.2}$$

Pertanto la topologia prodotto è la topologia usuale di $\mathbb{R}^2$.

2) Se lo spazio $(S_1,\mathcal{U}_1)$ è uguale a $\mathbb{R}$, munito della topologia usuale, mentre $(S_2,\mathcal{U}_2)$ è uguale a $\mathbb{R}$, munito della topologia discreta, allora è facile verificare che un insieme $U \subseteq \mathbb{R}^2$ è intorno di un punto $(\overline{x}_1,\overline{x}_2) \in \mathbb{R}^2$ rispetto alla topologia prodotto se e soltanto se U contiene un segmento aperto di centro $(\overline{x}_1,\overline{x}_2)$, parallelo all'asse x_1, cioè un insieme del tipo $]\overline{x}_1-\delta,\overline{x}_1+\delta[\times\{\overline{x}_2\}$ $(\delta>0)$

Proposizione 9.1. (Sezioni di insiemi aperti e di insiemi chiusi). *Sia $(S,\mathcal{U})$ lo spazio topologico prodotto dei due spazi $(S_1,\mathcal{U}_1)$ e $(S_2,\mathcal{U}_2)$.*

Se A è un insieme aperto di $(S,\mathcal{U})$, allora, per ogni $x_2 \in S_2$ [risp. $x_1 \in S_1$], *la x_2-sezione $A(x_2)$* [risp. *x_1-sezione $A(x_1)$*] *dell'insieme A è un insieme aperto dello spazio $(S_1,\mathcal{U}_1)$* [risp. $(S_2,\mathcal{U}_2)$].

Analogamente, se C è un insieme chiuso di $(S,\mathcal{U})$, allora $C(x_2)$ [risp. $C(x_1)$] *è un chiuso di $(S_1,\mathcal{U}_1)$* [risp. $(S_2,\mathcal{U}_2)$], *qualunque sia $x_2 \in S_2$* [risp. $x_1 \in S_1$].

Dimostrazione. Sia A un insieme aperto dello spazio prodotto $(S,\mathcal{U})$. Fissato $x_2 \in S_2$, consideriamo la x_2-sezione

$$A(x_2) \ = \ \{x_1 \in S_1 \,:\, (x_1,x_2) \in A\}$$

e proviamo che $A(x_2)$ è un aperto di S_1. Supponiamo, a tale scopo, che l'insieme $A(x_2)$ non sia vuoto e facciamo vedere che $A(x_2)$ è intorno di ogni suo punto. Infatti, se $x_1 \in A(x_2)$, cioè $(x_1,x_2) \in A$, allora, dato che $A \in \mathcal{U}(x_1,x_2)$, esistono $U_1 \in \mathcal{U}_1(x_1)$, $U_2 \in \mathcal{U}_2(x_2)$ tali che

$$A \supseteq U_1 \times U_2 \quad .$$

Ne segue, ovviamente, che è

$$A(x_2) \supseteq (U_1 \times U_2)(x_2) \quad .$$

D'altra parte la x_2-sezione di un insieme prodotto $E_1 \times E_2$ $(E_1 \subseteq S_1\,,\, E_2 \subseteq S_2)$ è data da

$$(E_1 \times E_2)(x_2) \ = \ \begin{cases} E_1 & \text{se } x_2 \in E_2\,, \\ \emptyset & \text{se } x_2 \notin E_2\,. \end{cases}$$

Nel nostro caso è $(U_1 \times U_2)(x_2) = U_1$, quindi $A(x_2) \supseteq U_1$ e dunque $A(x_2) \in \mathcal{U}_1(x_1)$.

Proviamo adesso che, se C è un chiuso di S, allora $C(x_2)$ è un chiuso di S_1 per ogni $x_2 \in S_2$. A tale scopo basta osservare che, per ogni insieme $E \subseteq S$, si ha

$$(S \setminus E)(x_2) \ = \ S_1 \setminus E(x_2)$$

(infatti:

$$x_1 \in (S \setminus E)(x_2) \iff (x_1,x_2) \in S \setminus E \iff x_1 \in S_1 \ \text{ e } \ (x_1,x_2) \notin E \iff$$

$$x_1 \in S_1 \ \text{ e } \ x_1 \notin E(x_2) \iff x_1 \in S_1 \setminus E(x_2))\,,$$

pertanto l'insieme

$$S_1 \setminus C(x_2) \; = \; (S \setminus C)(x_2)$$

è, per quanto già dimostrato, un aperto di S_1, dunque $C(x_2)$ è chiuso.

Proposizione 9.2. (Prodotto di insiemi aperti e di insiemi chiusi). *Sia $(S,\mathcal{U})$ lo spazio topologico prodotto dei due spazi $(S_1,\mathcal{U}_1)$ e $(S_2,\mathcal{U}_2)$.*

Se A_1 è un aperto di $(S_1,\mathcal{U}_1)$ e A_2 è un aperto di $(S_2,\mathcal{U}_2)$, allora il prodotto $A_1 \times A_2$ è un insieme aperto dello spazio prodotto $(S,\mathcal{U})$.

Analogamente, il prodotto $C_1 \times C_2$ di un chiuso di $(S_1,\mathcal{U}_1)$ per un chiuso di $(S_2,\mathcal{U}_2)$ è un insieme chiuso di $(S,\mathcal{U})$.

Dimostrazione. Se $A_1 \times A_2 \neq \emptyset$, cioè $A_1 \neq \emptyset$ e $A_2 \neq \emptyset$, allora, dato che

$$A_1 \in \mathcal{U}_1(x_1) \; \forall x_1 \in A_1 \quad , \quad A_2 \in \mathcal{U}_2(x_2) \; \forall x_2 \in A_2 \quad ,$$

si ha

$$A_1 \times A_2 \in \mathcal{U}(x_1,x_2) \;\; \forall (x_1,x_2) \in A_1 \times A_2 \quad ,$$

dunque $A_1 \times A_2$ è aperto.

Per provare che $C_1 \times C_2$ è chiuso osserviamo che

$$S \setminus (C_1 \times C_2) \; = \; (S_1 \times S_2) \setminus (C_1 \times C_2) \; = \; \big[(S_1 \setminus C_1) \times S_2\big] \cup \big[S_1 \times (S_2 \setminus C_2)\big]$$

(infatti:

$$(x_1,x_2) \in (S_1 \times S_2) \setminus (C_1 \times C_2) \iff (x_1,x_2) \in S_1 \times S_2 \;\text{ e }\; (x_1,x_2) \notin C_1 \times C_2 \iff$$

$$\iff x_1 \in S_1 \;\text{ e }\; x_2 \in S_2 \;\text{ e }\; \Big[\; x_1 \notin C_1 \;\text{ oppure }\; x_2 \notin C_2 \;\Big] \iff$$

$$\iff \Big[\; x_1 \in S_1 \setminus C_1 \;\text{ e }\; x_2 \in S_2 \;\Big] \;\text{ oppure }\; \Big[\; x_1 \in S_1 \;\text{ e }\; x_2 \in S_2 \setminus C_2 \;\Big] \iff$$

$$\iff (x_1,x_2) \in \big[(S_1 \setminus C_1) \times S_2\big] \cup \big[S_1 \times (S_2 \setminus C_2)\big] \;),$$

quindi, per quanto già dimostrato, $S \setminus (C_1 \times C_2)$ è aperto (è unione di due aperti), dunque $C_1 \times C_2$ è chiuso.

Notazioni. ("*Funzioni parziali*"). Dati gli insiemi non vuoti S_1, S_2 e S', supponiamo che

$$(x_1,x_2) \in X \to f(x_1,x_2) \in S'$$

sia una funzione definita in un sottoinsieme X del prodotto cartesiano $S = S_1 \times S_2$, a valori nell'insieme S'.

Se $(\overline{x}_1, \overline{x}_2)$ è un punto di X, adoperiamo i simboli

$$f(\,\cdot\,,\overline{x}_2) \qquad \text{e} \qquad f(\overline{x}_1,\,\cdot\,)$$

per indicare le due "funzioni parziali"

$$x_1 \in X(\overline{x}_2) \to f(x_1,\overline{x}_2) \in S' \qquad \text{e} \qquad x_2 \in X(\overline{x}_1) \to f(\overline{x}_1,x_2) \in S'$$

definite, rispettivamente, nelle due sezioni

$$X(\overline{x}_2) = \{x_1 \in S_1 \,:\, (x_1,\overline{x}_2) \in X\} \qquad \text{e} \qquad X(\overline{x}_1) = \{x_2 \in S_2 \,:\, (\overline{x}_1,x_2) \in X\}$$

dell'insieme X individuate dal punto $(\overline{x}_1,\overline{x}_2)$ ed a valori, entrambe, in S'.

Proposizione 9.3. (Continuità delle "funzioni parziali"). *Dati gli spazi topologici* $(S_1,\mathcal{U}_1)$, $(S_2,\mathcal{U}_2)$ *e* $(S',\mathcal{U}')$, *sia* $(S,\mathcal{U})$ *il prodotto di* $(S_1,\mathcal{U}_1)$ *e* $(S_2,\mathcal{U}_2)$ *e sia* X *un sottoinsieme non vuoto di* S. *Supponiamo inoltre che*

$$(x_1,x_2) \in X \to f(x_1,x_2) \in S'$$

sia una funzione da X *in* S'.

Se la funzione f *è continua in un punto* $(\overline{x}_1,\overline{x}_2) \in X$, *allora le due funzioni parziali*

$$f(\cdot,\overline{x}_2) \qquad \text{e} \qquad f(\overline{x}_1,\cdot)$$

sono entrambe continue, rispettivamente, nel punto $\overline{x}_1$ *e nel punto* $\overline{x}_2$.

Dimostrazione. Per ipotesi si ha che

$$\forall U' \in \mathcal{U}'(f(\overline{x}_1,\overline{x}_2)) \quad \exists U \in \mathcal{U}(\overline{x}_1,\overline{x}_2) \ : \ \forall (x_1,x_2) \in X \cap U \implies f(x_1,x_2) \in U' \ .$$

Pertanto, fissati due intorni $U_1 \in \mathcal{U}_1(\overline{x}_1)$ e $U_2 \in \mathcal{U}_2(\overline{x}_2)$ tali che $U_1 \times U_2 \subseteq U$, si ha:

$$\forall x_1 \in X(\overline{x}_2) \cap U_1 \implies (x_1,\overline{x}_2) \in X \ \text{ e } \ (x_1,\overline{x}_2) \in U_1 \times U_2 \subseteq U \implies f(x_1,\overline{x}_2) \in U' \ ,$$

dunque $f(\,\cdot\,,\overline{x}_2)$ è continua nel punto $\overline{x}_1$; analogamente si ha

$$\forall x_2 \in X(\overline{x}_1) \cap U_2 \implies (\overline{x}_1,x_2) \in X \ \text{ e } \ (\overline{x}_1,x_2) \in U_1 \times U_2 \subseteq U \implies f(\overline{x}_1,x_2) \in U' \ ,$$

quindi anche $f(\overline{x}_1,\,\cdot\,)$ è continua nel punto $\overline{x}_2$.

Proposizione 9.4. (Continuità delle funzioni a valori in uno spazio prodotto). *Dati gli spazi topologici* $(S,\mathcal{U})$, $(S'_1,\mathcal{U}'_1)$ *e* $(S'_2,\mathcal{U}'_2)$, *sia* $(S',\mathcal{U}')$ *il prodotto di* $(S'_1,\mathcal{U}'_1)$ *e* $(S'_2,\mathcal{U}'_2)$ *e sia*

$$x \ \to \ f(x) \ = \ (f_1(x), f_2(x))$$

una funzione da S *in* S'.

La funzione f *è continua in punto* $\overline{x} \in S$ *se e solo se le due funzioni "componenti"*

$$f_1 : S \to S'_1 \qquad \text{e} \qquad f_2 : S \to S'_2$$

sono entrambe continue nel punto $\overline{x}$.

Dimostrazione. Se f è continua nel punto $\overline{x}$, si ha:

$$\forall U' \in \mathcal{U}'(f(\overline{x})) \quad \exists U \in \mathcal{U}(\overline{x}) \ : \ \forall x \in U \implies f(x) \in U' \ ;$$

ciò è vero, in particolare, per gli intorni $U' \in \mathcal{U}'(f(\overline{x})) = \mathcal{U}'((f_1(\overline{x}), f_2(\overline{x}))$ del tipo $U'_1 \times U'_2$, con $U'_1 \in \mathcal{U}'_1(f_1(\overline{x}))$ e $U'_2 \in \mathcal{U}'_2(f_2(\overline{x}))$, cioè si ha:

$$\forall U'_1 \in \mathcal{U}'_1(f_1(\overline{x}))\ \forall U'_2 \in \mathcal{U}'_2(f_2(\overline{x})) \quad \exists U \in \mathcal{U}(\overline{x}) \ : \ \forall x \in U \implies f_1(x) \in U'_1 \ \text{ e } \ f_2(x) \in U'_2 \ ,$$

pertanto le due funzioni f_1 e f_2 sono continue nel punto $\overline{x}$.

Viceversa, se le due funzioni f_1 e f_2 sono continue nel punto $\overline{x}$, cioè se si ha:

$$\begin{aligned} &\forall U'_1 \in \mathcal{U}'_1(f_1(\overline{x})) \quad \exists U_1 \in \mathcal{U}(\overline{x}) \ : \ \forall x \in U \implies f_1(x) \in U'_1 \ , \\ &\forall U'_2 \in \mathcal{U}'_2(f_2(\overline{x})) \quad \exists U_2 \in \mathcal{U}(\overline{x}) \ : \ \forall x \in U \implies f_2(x) \in U'_2 \ , \end{aligned}$$

allora, per ogni intorno U' di $f(\overline{x})$, scelti gli intorni $U'_1 \in \mathcal{U}'_1(f_1(\overline{x}))$ e $U'_2 \in \mathcal{U}'_2(f_2(\overline{x}))$ in modo che $U'_1 \times U'_2 \subseteq U$ e determinati, in corrispondenza, gli intorni $U_1 \in \mathcal{U}(\overline{x})$ e $U_2 \in \mathcal{U}(\overline{x})$ con i requisiti sopra descritti, si ha:

$$\forall x \in U_1 \cap U_2 \implies f_1(x) \in U'_1 \ \text{ e } \ f_2(x) \in U'_2 \iff f(x) \in U'_1 \times U'_2 \implies f(x) \in U' \ ,$$

dunque anche la funzione f è continua nel punto $\overline{x}$.

Consideriamo adesso due spazi metrici (S_1, d_1) e (S_2, d_2). Indichiamo con $(S_1,\mathcal{U}_1)$ e $(S_2,\mathcal{U}_2)$ i corrispondenti spazi topologici e con $(S,\mathcal{U})$ il loro prodotto. È naturale chiedersi se anche $(S,\mathcal{U})$, al pari di $(S_1,\mathcal{U}_1)$ e $(S_2,\mathcal{U}_2)$, sia uno spazio metrizzabile, cioè se esista una metrica δ su S tale che la topologia indotta da δ coincida con la topologia prodotto $\mathcal{U}$. La risposta è affermativa. Verifichiamo infatti che ciascuna delle tre funzioni δ_1, δ_2 e δ_∞, da $S \times S$ in $\mathbb{R}$, di seguito definite, è una metrica su S e che la topologia indotta da ciascuna di tali metriche è proprio la topologia prodotto $\mathcal{U}$:

$$\delta_1\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2) \ ,$$

$$\delta_2\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) = \sqrt{[d_1(x_1, y_1)]^2 + [d_2(x_2, y_2)]^2} \ ,$$

$$\delta_\infty\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) = \max\{d_1(x_1, y_1)\, ,\, d_2(x_2, y_2)\} \ ,$$

$$\forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in S \ .$$

La prima cosa da dimostrare è che δ_1, δ_2 e δ_∞ sono metriche su S. A tal riguardo l'unico punto su cui occorre soffermarsi un attimo è la verifica della disuguaglianza triangolare. Per δ_1 e δ_∞ la cosa è abbastanza ovvia. Per la δ_2 si arriva allo scopo utilizzando la disuguaglianza triangolare della metrica euclidea su $\mathbb{R}^2$ (data dalla (9.2)). Il ragionamento è il seguente: presi tre punti qualsiasi (x_1, x_2), (y_1, y_2) e (z_1, z_2) di S, si ha:

$$\delta_2\big((x_1, x_2), (z_1, z_2)\big) = \sqrt{[d_1(x_1, z_1)]^2 + [d_2(x_2, z_2)]^2} \leq$$

(per la disuguaglianza triangolare delle metriche d_1 e d_2)

$$\leq \sqrt{[d_1(x_1, y_1) + d_1(y_1, z_1)]^2 + [d_2(x_2, y_2) + d_2(y_2, z_2)]^2} =$$

(ponendo:

$a = \big(d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\big) \in \mathbb{R}^2$, $b = \big(-d_1(y_1, z_1), -d_2(y_2, z_2)\big) \in \mathbb{R}^2$, $o = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$

e indicando con d la metrica euclidea su $\mathbb{R}^2$)

$$= d(a, b) \leq d(a, o) + d(o, b) =$$

$$= \sqrt{[d_1(x_1, y_1)]^2 + [d_2(x_2, y_2)]^2} + \sqrt{[d_1(y_1, z_1)]^2 + [d_2(y_2, z_2)]^2} =$$

$$= \delta_2\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) + \delta_2\big((y_1, y_2), (z_1, z_2)\big) \ .$$

Come seconda cosa osserviamo che le metriche δ_1, δ_2 e δ_∞ inducono su S la stessa topologia. Infatti si verifica facilmente che, per ogni $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in S$, vale la catena di disuguaglianze:

$$\delta_\infty\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) \leq \delta_2\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) \leq$$
$$\leq \delta_1\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) \leq 2\,\delta_\infty\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) \ ,$$

pertanto le tre metriche sono equivalenti e quindi (Corollario 7.1) topologicamente equivalenti.

Verifichiamo, infine, che la topologia $\mathcal{U}'$ indotta da δ_∞ su S coincide con la topologia prodotto $\mathcal{U}$. Indichiamo, a tale scopo, i dischi aperti degli spazi metrici (S_1, d_1), (S_2, d_2) e (S, δ_∞) con $B_1(\overline{x}_1, r_1)$, $B_2(\overline{x}_2, r_2)$ e $B'((\overline{x}_1, \overline{x}_2), r)$, rispettivamente. Notiamo poi che, per ogni $(\overline{x}_1, \overline{x}_2) \in S$ ed ogni $r > 0$, si ha

$$B'((\overline{x}_1, \overline{x}_2), r) \; = \; B_1(\overline{x}_1, r) \times B_2(\overline{x}_2, r) \quad ;$$

infatti:

$$(x_1, x_2) \in B'((\overline{x}_1, \overline{x}_2), r) \iff \max\{d_1(x_1, \overline{x}_1), d_2(x_2, \overline{x}_2)\} < r \iff$$

$$\iff d_1(x_1, \overline{x}_1) < r \;\text{ e }\; d_2(x_2, \overline{x}_2) < r \iff x_1 \in B_1(\overline{x}_1, r) \;\text{ e }\; x_2 \in B_2(\overline{x}_2, r) \iff$$

$$\iff (x_1, x_2) \in B_1(\overline{x}_1, r) \times B_2(\overline{x}_2, r) \quad .$$

A questo punto possiamo provare che $\mathcal{U} = \mathcal{U}'$, cioè:

$$\mathcal{U}(\overline{x}_1, \overline{x}_2) \; = \; \mathcal{U}'(\overline{x}_1, \overline{x}_2) \qquad\qquad \forall (\overline{x}_1, \overline{x}_2) \in S \; .$$

Infatti, fissato $(\overline{x}_1, \overline{x}_2) \in S$ e considerato un qualunque sottoinsieme U di S, si ha la catena di equivalenze:

$$U \in \mathcal{U}(\overline{x}_1, \overline{x}_2) \iff$$

$$\iff \exists U_1 \in \mathcal{U}_1(\overline{x}_1)\,, \exists U_2 \in \mathcal{U}_2(\overline{x}_2) \;:\; U \supseteq U_1 \times U_2 \iff$$

$$\iff \exists r_1, r_2 > 0 \;:\; U \supseteq B_1(\overline{x}_1, r_1) \times B_2(\overline{x}_2, r_2) \iff$$

(prendendo $r \leq \min\{r_1, r_2\}$)

$$\iff \exists r > 0 \;:\; U \supseteq B_1(\overline{x}_1, r) \times B_2(\overline{x}_2, r) \iff$$

$$\iff \exists r > 0 \;:\; U \supseteq B'\big((\overline{x}_1, \overline{x}_2), r\big) \iff U \in \mathcal{U}'(\overline{x}_1, \overline{x}_2) \quad .$$

Completiamo questo paragrafo osservando che la definizione di spazio prodotto di n spazi topologici $(S_1, \mathcal{U}_1)$, ... , $(S_n, \mathcal{U}_n)$ e le corrispondenti proprietà sono delle ovvie estensioni di quelle relative al caso $n = 2$; ad esempio, la (9.1) va rimpiazzata con

$$\mathcal{U}(x_1, \ldots, x_n) \; = \; \{U \in \mathcal{P}(S) \;:\; \exists\, U_1 \in \mathcal{U}_1(x_1)\,, \ldots\,, \exists\, U_n \in \mathcal{U}_n(x_n) \text{ tali che } U \supseteq U_1 \times \ldots \times U_n\}$$
$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in S = S_1 \times \ldots \times S_n \; .$$

È invece molto più complicato – ma è possibile e utile – definire il prodotto di una collezione infinita di spazi topologici. Di questo però non ci occupiamo.

10. Spazi connessi.

Definizione 10.1. (*Spazio connesso*). Uno spazio topologico S si dice *connesso* se non esiste alcuna coppia A_1, A_2 di sottoinsiemi di S, aperti e non vuoti, tali che

$$A_1 \cap A_2 = \emptyset \quad , \quad A_1 \cup A_2 = S \quad . \tag{10.1}$$

Proposizione 10.1. (Caratterizzazioni degli spazi connessi). *Per un qualunque spazio topologico S le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

i) *S è connesso;*

ii) *non esiste alcuna coppia C_1, C_2 di sottoinsiemi di S, chiusi e non vuoti, tali che*

$$C_1 \cap C_2 = \emptyset \quad , \quad C_1 \cup C_2 = S \quad ; \tag{10.2}$$

iii) *non esiste alcun insieme $E \subseteq S$, diverso dall'insieme vuoto e dall'intero spazio S, il quale sia, contemporaneamente, aperto e chiuso*
(un sottoinsieme E di uno spazio topologico S che è sia aperto che chiuso viene anche chiamato insieme "*clopen*")*;*

iv) *per ogni insieme $E \subseteq S$, $E \neq \emptyset$, $E \neq S$, si ha $\partial E \neq \emptyset$.*

Dimostrazione. Dimostriamo l'equivalenza tra le affermazioni i)^c, ii)^c, iii)^c e iv)^c, negazioni, rispettivamente, delle i), ii), iii) e iv).

i)^c $\implies$ ii)^c. Per ipotesi esiste una coppia A_1, A_2 di sottoinsiemi di S, aperti e non vuoti, verificanti le (10.1). Dalle (10.1) segue che ciascuno dei due insiemi A_1, A_2 è pure chiuso (dato che è il complementare dell'altro insieme, che è aperto). Pertanto è vera anche la ii)^c (con $C_1 = A_1$, $C_2 = A_2$).

ii)^c $\implies$ iii)^c. Per ipotesi esistono $C_1, C_2 \subseteq S$, chiusi e non vuoti, verificanti le (10.2). Ognuno dei due insiemi C_1, C_2, essendo, per le (10.2), il complementare di un chiuso, è anche aperto. Pertanto è vera pure la iii)^c (con $E = C_1$ oppure $E = C_2$).

iii)^c $\implies$ iv)^c. Per ipotesi esiste un insieme $E \neq \emptyset$, $E \neq S$, il quale è sia aperto che chiuso. Per tale insieme si ha $\partial E = \emptyset$ (e quindi vale la iv)^c). Infatti la frontiera ∂E è contenuta sia in E (poiché E è chiuso) sia in $S \setminus E$ (poiché E è aperto), pertanto $\partial E = \emptyset$.

iv)^c $\implies$ i)^c. Se esiste $E \subseteq S$, $E \neq \emptyset$, $E \neq S$, tale che $\partial E = \emptyset$ (e quindi anche $\partial(S \setminus E) = \emptyset$), allora i due insiemi

$$A_1 = E \quad , \quad A_2 = S \setminus E$$

sono aperti, non vuoti e verificano le (10.1), dunque è vera la i)^c.

Esempi 10.1. a) Uno spazio topologico indiscreto è connesso.

b) Uno spazio topologico discreto, con più di un punto, non è connesso.

c) Un insieme infinito S, con la topologia cofinita, è uno spazio connesso.
Infatti, se A_1 e A_2 sono aperti non vuoti, allora $S \setminus A_1$ e $S \setminus A_2$ sono insiemi finiti, quindi anche

$$S \setminus (A_1 \cap A_2) \;=\; (S \setminus A_1) \cup (S \setminus A_2)$$

è un insieme finito, pertanto la prima delle (10.1) è falsa.

Definizione 10.2. (*Insieme connesso.*). Sia E un sottoinsieme non vuoto di uno spazio topologico S. Si dice che E è un *insieme connesso* se E, con la topologia indotta da quella di E, è uno spazio topologico connesso.

In termini più espliciti, ricordando la Proposizione 8.1, dire che un insieme $E \subseteq S$ è connesso vuol dire che non esiste alcuna coppia A_1, A_2 di insiemi aperti di S, aventi entrambi intersezione non vuota con E:

$$E \cap A_1 \neq \emptyset \quad , \quad E \cap A_2 \neq \emptyset \quad , \tag{10.3}$$

tali che

$$(E \cap A_1) \cap (E \cap A_2) = \emptyset \quad , \quad (E \cap A_1) \cup (E \cap A_2) = E \quad ,$$

cioè

$$E \cap A_1 \cap A_2 = \emptyset \quad , \quad E \subseteq A_1 \cup A_2 \quad . \tag{10.4}$$

Ovviamente, in un qualunque spazio topologico gli insiemi unitari sono connessi.

Teorema 10.1. (Connessi di $\mathbb{R}$). *Gli insiemi connessi di $\mathbb{R}$, con la topologia usuale, sono tutti e soli gli intervalli* (di qualunque tipo, compresi quelli degeneri, cioè gli insiemi unitari).

Dimostrazione. Proviamo dapprima che ogni insieme connesso $E \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo. Basta provare che E ha la "proprietà dei valori intermedi", cioè

$$\forall x, y \in E \ , \ x < y \implies [x, y] \subseteq E \ ; \tag{10.5}$$

infatti abbiamo dimostrato nel corso di Analisi I che, se vale la (10.5), allora, denotati con α e β l'estremo inferiore e l'estremo superiore di E (elementi di $\overline{\mathbb{R}}$), l'insieme E è uguale ad uno degli intervalli di $\mathbb{R}$ che hanno come estremi α e β.

Supponiamo, per assurdo, che non valga la (10.5), cioè supponiamo che esistano $x, y, t \in \mathbb{R}$, con $x < t < y$, tali che $x, y \in E$, ma $t \notin E$; ne segue facilmente che, considerati i seguenti due insiemi aperti di $\mathbb{R}$:

$$A_1 =]-\infty, t[\quad , \quad A_2 =]t, +\infty[\quad ,$$

valgono sia le (10.3) che le (10.4), dunque l'insieme E, contrariamente all'ipotesi, non è un insieme connesso.

Proviamo adesso che, viceversa, ogni intervallo di $\mathbb{R}$ è un insieme connesso. Supponiamo, per assurdo, che E non sia connesso, cioè che esistano due insiemi A_1, A_2, aperti di $\mathbb{R}$, per i quali siano verificate sia le (10.3) che le (10.4).

Per le (10.3) esistono due punti

$$x \in E \cap A_1 \quad , \quad y \in E \cap A_2$$

e, per la prima delle (10.4), si ha $x \neq y$. Supponiamo, per fissare le idee, che sia $x < y$ e consideriamo il seguente sottoinsieme di $\mathbb{R}$:

$$T = E \cap A_2 \cap [x, y] \quad .$$

Posto $t = \inf T$, si ha $t \in [x, y]$, quindi t appartiene all'intervallo E e pertanto, per la seconda delle (10.4), $t \in A_1$ oppure $t \in A_2$. Facciamo vedere che, in entrambi i casi, si perviene ad una contraddizione.

Se $t \in A_1$, esiste $\delta_1 > 0$ tale che $]t - \delta_1, t + \delta_1[\subseteq A_1$; ne segue che l'intervallo $[t, t + \delta_1[$ non contiene elementi di T, ma ciò contraddice la seconda proprietà dell'estremo inferiore.

Se $t \in A_2$, esiste $\delta_2 > 0$ tale che $]t - \delta_2, t + \delta_2[\subseteq A_2$; ne segue che è $t - \delta_2 \geq x$ e, di conseguenza, l'intervallo $]t - \delta_2, t]$ è contenuto nell'insieme T; ciò contraddice, però, la prima proprietà dell'estremo inferiore.

Teorema 10.2. (Immagine continua di un insieme connesso). *Siano S, S' spazi topologici, sia $E \subseteq S$ un insieme connesso e sia $f : E \to S'$ una funzione continua.*

Allora anche l'immagine $f(E)$ è un insieme connesso di S'.

Dimostrazione. Per le Definizioni 10.2 e 8.2 non è restrittivo limitarsi al caso $E = S$.

Supponiamo, per assurdo, che l'insieme $E' = f(S)$ non sia connesso, cioè che esistano A_1', A_2', aperti di S', tali che

$$E' \cap A_1' \neq \emptyset \quad , \quad E' \cap A_2' \neq \emptyset \quad , \tag{10.3$'$}$$

$$E' \cap A_1' \cap A_2' = \emptyset \quad , \quad E' \subseteq A_1' \cup A_2' \quad . \tag{10.4$'$}$$

Consideriamo le controimmagini

$$A_1 = f^{-1}(A_1') \quad , \quad A_2 = f^{-1}(A_2') \quad .$$

Poiché f è continua, gli insiemi A_1 e A_2 sono aperti di S; inoltre, per le $(10.3)'$, A_1 e A_2 sono entrambi non vuoti; infine, dalle $(10.4)'$ segue facilmente che è

$$A_1 \cap A_2 \;=\; \emptyset \quad , \quad A_1 \cup A_2 \;=\; S \quad ,$$

ma tutto ciò contraddice l'ipotesi che S sia connesso.

Lemma 10.1. ("Catena" di insiemi connessi). *Sia $\{E_i \,:\, i \in I\}$ una famiglia di sottoinsiemi connessi di uno spazio topologico S, con la proprietà che*

$$E_i \cap E_j \;\neq\; \emptyset \qquad \forall i, j \in I \quad . \tag{10.6}$$

Allora anche l'unione

$$E \;=\; \bigcup_{i \in I} E_i$$

è un insieme connesso.

Dimostrazione. Supponiamo, per assurdo, che l'insieme E non sia connesso, cioè esistano due insiemi A_1, A_2, aperti di S, per i quali valgano le (10.3) e le (10.4).

Per ogni $i \in I$ risulta, per le (10.4),

$$E_i \cap A_1 \cap A_2 = \emptyset \quad , \quad E_i \subseteq E \subseteq A_1 \cup A_2 \tag{10.7}$$

e quindi, dato che E_i è connesso, si verifica una delle seguenti due circostanze:

$$1. \quad E_i \subseteq A_1 \quad \text{e} \quad E_i \cap A_2 = \emptyset \quad \text{oppure} \quad 2. \quad E_i \subseteq A_2 \quad \text{e} \quad E_i \cap A_1 = \emptyset \quad .$$

Poiché $E \cap A_1 \neq \emptyset$ esiste $i_1 \in I$ tale che $E_{i_1} \cap A_1 \neq \emptyset$; di conseguenza, per quanto precedentemente detto, si ha $E_{i_1} \subseteq A_1$ e $E_{i_1} \cap A_2 = \emptyset$. Analogamente esiste $i_2 \in I$ tale che $E_{i_2} \subseteq A_2$ e $E_{i_2} \cap A_1 = \emptyset$. Dalla prima delle (10.7) si deduce allora che è

$$E_{i_1} \cap E_{i_2} = \big(E_{i_1} \cap A_1\big) \cap \big(E_{i_2} \cap A_2\big) = E_{i_1} \cap \big(E_{i_2} \cap A_1 \cap A_2\big) = \emptyset \quad ,$$

ma ciò contraddice l'ipotesi (10.6).

Corollario 10.1. *Sia $\{E_i \,:\, i \in I\}$ una famiglia di sottoinsiemi connessi di uno spazio topologico S tale che*

$$\bigcap_{i \in I} E_i \;\neq\; \emptyset \quad .$$

Allora anche l'unione

$$E \;=\; \bigcup_{i \in I} E_i$$

è un insieme connesso.

Proposizione 10.2. (Chiusura di un insieme connesso). *Sia E un sottoinsieme non vuoto di uno spazio topologico S.*

Se E è connesso, ogni insieme $F \subseteq S$ tale che $E \subseteq F \subseteq \overline{E}$ è pure connesso.

Dimostrazione. Supponiamo, per assurdo, che F non sia connesso, cioè esistano A_1, A_2, insiemi aperti di S, tali che:

$$F \cap A_1 \neq \emptyset \quad , \quad F \cap A_2 \neq \emptyset \quad , \tag{10.3$''$}$$

$$F \cap A_1 \cap A_2 = \emptyset \quad , \quad F \subseteq A_1 \cup A_2 \quad . \tag{10.4$''$}$$

Dalle (10.4)$''$ seguono, ovviamente, le (10.4). Inoltre, da $F \cap A_1 \neq \emptyset$ segue che è pure $E \cap A_1 \neq \emptyset$; infatti, fissato un punto $\overline{x} \in F \cap A_1$, si ha che $\overline{x}$ appartiene a $\overline{E}$ e che A_1 è un intorno di $\overline{x}$, pertanto $E \cap A_1 \neq \emptyset$. Analogamente è pure $E \cap A_2 \neq \emptyset$. Pertanto gli insiemi A_1 e A_2, oltre che le (10.4), verificano anche le (10.3), ma ciò è in contraddizione con l'ipotesi che E sia connesso.

Dal Corollario 10.1 segue subito che, se x è un qualsiasi punto di uno spazio topologico S, esiste il massimo – rispetto all'inclusione insiemistica – sottoinsieme connesso di S che contiene il punto x. Infatti, considerata la famiglia $\mathcal{E}$ di tutti i sottoinsiemi connessi di S che contengono il punto x (osserviamo che la famiglia $\mathcal{E}$ non è vuota, giacché l'insieme unitario $\{x\}$ appartiene a $\mathcal{E}$), per il Corollario 10.1 l'unione $\bigcup_{E\in\mathcal{E}} E$ è ancora un insieme connesso; ovviamente tale insieme è il massimo insieme connesso contenente x.

Definizione 10.3. (*Componenti connesse di uno spazio topologico*). Sia S uno spazio topologico S.

Per ogni punto $x \in S$ si chiama *componente connessa* di S contenente il punto x (o individuata da x) l'insieme C_x, massimo sottoinsieme connesso di S contenente x.

Esempi 10.2. a) Le componenti connesse di $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$, sottospazio di $\mathbb{R}$ con la topologia usuale, sono gli intervalli $]n, n+1[$, $n \in \mathbb{Z}$.

b) Le componenti connesse di $\mathbb{Q}$, sottospazio di $\mathbb{R}$ con la topologia usuale, sono gli insiemi unitari.

Proposizione 10.3. (Proprietà delle componenti connesse). *Le componenti connesse di uno spazio topologico S sono insiemi chiusi e costituiscono una partizione dell'insieme S.*

Dimostrazione. Dalla Proposizione 10.2 segue che, considerata una qualunque componente connessa C_x dello spazio S, anche la sua chiusura $\overline{C_x}$ è un insieme connesso, pertanto, dato che C_x è il massimo insieme connesso contenente x, si ha $C_x = \overline{C_x}$, dunque C_x è un insieme chiuso.

Proviamo che la famiglia di insiemi $\{C_x \,:\, x \in S\}$ è una partizione di S. Il fatto che ogni insieme della famiglia sia non vuoto e che l'insieme $\bigcup_{x\in S} C_x$ sia uguale a S è evidente. Rimane da provare che due qualsiasi elementi distinti della famiglia sono insiemi disgiunti, cioè, per ogni coppia di punti $x_1, x_2 \in S$, si ha $C_{x_1} = C_{x_2}$ oppure $C_{x_1} \cap C_{x_2} = \emptyset$. Infatti, se $C_{x_1} \cap C_{x_2} \neq \emptyset$, allora, per il Corollario 10.1, anche $C_{x_1} \cup C_{x_2}$ è un insieme connesso (che contiene sia x_1 che x_2), e pertanto, per la definizione di componente connessa, si ha

$$C_{x_1} \;=\; C_{x_1} \cup C_{x_2} \;=\; C_{x_2} \quad .$$

Osservazione 10.1. Una definizione equivalente delle componenti connesse di uno spazio topologico S è la seguente:

"Le componenti connesse di S sono gli elementi dell'insieme quoziente $S/\!\sim$, dove $\sim$ è la relazione di equivalenza in S così definita:

$$x \sim y \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{array}{l} \exists C \subseteq S, C \text{ connesso,} \\ \text{tale che } \{x, y\} \subseteq C\text{''} \end{array}$$

(per verificare che $\sim$ ha la proprietà transitiva si utilizza il Corollario 10.1).

Dimostriamo che la famiglia $\{C_x \,:\, x \in S\}$ delle componenti connesse di S (secondo la Definizione 10.3) coincide con $S/\!\sim$, cioè proviamo che risulta

$$C_x \;=\; C'_x \qquad\qquad \forall x \in S \quad ,$$

dove C'_x è la classe di equivalenza (rispetto alla relazione $\sim$) dell'elemento x. Infatti, per ogni $y \in C_x$ si ha, ovviamente, $y \sim x$, cioè $y \in C'_x$, e quindi $C_x \subseteq C'_x$. Viceversa, per ogni $y \in C'_x$ esiste un insieme connesso $C \subseteq S$ tale che $\{x, y\} \subseteq C$ e quindi, per la definizione di C_x, si ha $y \in C \subseteq C_x$, dunque $C'_x \subseteq C_x$.

11. Omeomorfismi. Proprietà topologiche.

Definizione 11.1. (*Omeomorfismo*). Dati due spazi topologici S e S', si chiama *omeomorfismo* tra S e S' ogni funzione $\varphi : S \to S'$ tale che:
- φ è una bigezione tra gli insiemi S e S';
- φ è una funzione continua;
- anche la funzione inversa $\varphi^{-1} : S' \to S$ è una funzione continua.

Osservazione 11.1. È utile osservare esplicitamente che, se $\varphi : S \to S'$ è una funzione continua dallo spazio topologico S nello spazio topologico S' ed è anche una bigezione tra i sostegni dei due spazi, non è necessariamente vero che anche la φ^{-1} sia una funzione continua. Ci si convince facilmente di questa affermazione considerando come spazi S e S' due spazi topologici $(S,\mathcal{U})$ e $(S,\mathcal{U}')$, aventi lo stesso sostegno S e tali che la topologia $\mathcal{U}$ sia strettamente più fine della $\mathcal{U}'$, e come funzione φ l'applicazione identica di S in sé.

Dalla definizione di omeomorfismo e dai Teoremi 6.1 e 6.2 segue subito la

Proposizione 11.1. *Se $\varphi : S \to S'$ è un omeomorfismo tra lo spazio topologico S e lo spazio topologico S', l'immagine $\varphi(E)$ di un qualunque insieme E, aperto* [risp. *chiuso*] *di S, è un insieme aperto* [risp. *chiuso*] *di S'.*

Esempio 11.1. (*Omeomorfismi tra intervalli di* $\mathbb{R}$). Consideriamo lo spazio $\mathbb{R}$, munito della topologia usuale.

Se I è un qualunque intervallo di $\mathbb{R}$ e $f : I \to \mathbb{R}$ è una funzione continua e fortemente monotòna, allora f è un omeomorfismo tra gli intervalli I e $I' = f(I)$, entrambi dotati della topologia indotta da quella di $\mathbb{R}$.

Infatti f è una bigezione tra I e I' e, per la Definizione 8.2 e l'Osservazione 8.2, è una funzione continua dallo spazio I nello spazio I'. D'altra parte, per un teorema di Analisi I, anche f^{-1} è una funzione continua da I' in $\mathbb{R}$ e quindi (sempre per l'Osservazione 8.2) dallo spazio I' nello spazio I.

Definizione 11.2. (*Spazi omeomorfi*). Siano S, S' spazi topologici.

Si dice che S è *omeomorfo a* S' se esiste un omeomorfismo $\varphi : S \to S'$ tra S e S'.

È facile verificare che

Proposizione 11.2. *In una qualunque famiglia $\mathcal{S}$ di spazi topologici la relazione $\approx$, così definita:*

$$S \approx S' \quad \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \quad S \text{ è omeomorfo a } S' \ ,$$

è una relazione di equivalenza.

Esercizio 11.1. Dimostrare la Proposizione 11.2.

Esempi 11.2. (*Intervalli di* $\mathbb{R}$ *omeomorfi*). Gli spazi che consideriamo in questi esempi sono tutti sottospazi di $\mathbb{R}$, con la topologia usuale.

Dall'Esempio 11.1 sappiamo che, per provare che due intervalli I e I' di $\mathbb{R}$ sono omeomorfi, basta trovare una funzione $f : I \to \mathbb{R}$, continua e fortemente monotòna, tale che $f(I) = I'$. Usando questo fatto è facile verificare che:

1) due qualsiasi intervalli aperti di $\mathbb{R}$ (limitati o no) sono omeomorfi;

2) due qualsiasi intervalli semiaperti di $\mathbb{R}$ (limitati o no) sono omeomorfi;

3) due qualsiasi intervalli chiusi e limitati di $\mathbb{R}$, non degeneri, sono omeomorfi.

Esercizio 11.2. Dimostrare le precedenti affermazioni 1), 2) e 3).

Un importante concetto collegato con la nozione di omeomorfismo è quello di proprietà topologica. Con questo termine si designano, tra le varie proprietà che uno spazio topologico può avere o meno, quelle che hanno la caratteristica di essere "stabili" o "invarianti" rispetto ad omeomorfismi.

Definizione 11.3. (*Proprietà topologiche*). Si dice che una proprietà $\mathbb{P}$, attinente agli spazi topologici, è una *proprietà topologica* se per essa è vera la seguente affermazione: "Se S è uno spazio topologico che ha la proprietà $\mathbb{P}$ e S' è uno spazio omeomorfo a S, allora anche S' ha la proprietà $\mathbb{P}$."

Alcuni primi facili esempi di proprietà topologiche ci vengono forniti dagli assiomi di separazione.

Proposizione 11.3. *Le proprietà di essere uno spazio T_0 oppure uno spazio T_1 oppure uno spazio T_2 sono proprietà topologiche.*

Dimostrazione. Esaminiamo il caso dell'assioma T_2; le altre due dimostrazioni sono analoghe.

Supponiamo che S sia uno spazio T_2 e che $\varphi : S \to S'$ sia un omeomorfismo tra lo spazio S e lo spazio S'. Se y_1 e y_2 sono punti distinti di S', allora $x_1 = \varphi^{-1}(y_1)$ e $x_2 = \varphi^{-1}(y_2)$ sono punti distinti di S e quindi esistono U_1, intorno di x_1, e U_2, intorno di x_2, tali che $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Ricordando la caratterizzazione degli intorni mediante gli insiemi aperti (Proposizione 2.4) e tenendo presente la Proposizione 11.1 si ha allora che i due insiemi disgiunti $\varphi(U_1)$ e $\varphi(U_2)$ sono, rispettivamente, un intorno di y_1 e un intorno di y_2; possiamo pertanto concludere che anche S' è uno spazio T_2.

Un altro notevole esempio di proprietà topologica è costituito dalla metrizzabilità, cioè dalla proprietà di essere uno spazio metrizzabile.

Proposizione 11.4. *La metrizzabilità è una proprietà topologica.*

Dimostrazione. Supponiamo che $(S,\mathcal{U})$ sia uno spazio metrizzabile, che d sia una metrica su S compatibile con la topologia $\mathcal{U}$ (cioè tale che la topologia indotta da d coincida con la topologia $\mathcal{U}$) e che $\varphi : S \to S'$ sia un omeomorfismo tra lo spazio $(S,\mathcal{U})$ e lo spazio $(S',\mathcal{U}')$.

Proviamo che esiste una metrica d' su S' compatibile con la topologia di $\mathcal{U}'$.

Posto

$$d'(x',y') \;=\; d(\varphi^{-1}(x'),\varphi^{-1}(y')) \qquad \forall x',y' \in S' \quad , \tag{11.1}$$

è immediato verificare che l'applicazione $d' : S' \times S' \to \mathbb{R}$ così definita è una metrica su S'; indichiamo con $\widetilde{\mathcal{U}}$ la topologia su S' indotta da tale metrica. Dalla definizione della metrica d' si ricava facilmente che la φ^{-1} è una funzione continua da $(S',\widetilde{\mathcal{U}})$ in $(S,\mathcal{U})$; infatti la (11.1) comporta che, per ogni $x'_0 \in S'$ ed ogni $r > 0$, il disco aperto $B(\varphi^{-1}(x'_0),r)$ di (S,d) contiene l'immagine tramite φ del disco aperto $B'(x'_0,r)$ di (S',d') e da ciò segue subito la continuità di φ^{-1} nel punto x'_0. Per un motivo analogo, dato che la (11.1) può scriversi pure nella forma

$$d'(\varphi(x),\varphi(y)) \;=\; d(x,y) \qquad \forall x,y \in S \quad ,$$

anche la φ è un'applicazione continua da $(S,\mathcal{U})$ in $(S',\widetilde{\mathcal{U}})$. Per completare la dimostrazione verifichiamo l'uguaglianza delle due topologie $\mathcal{U}'$ e $\widetilde{\mathcal{U}}$. A tale scopo è sufficiente provare (Proposizione 7.2) che l'applicazione identica $i_{S'}$ di S' in sé è una funzione continua sia da $(S',\mathcal{U}')$ in $(S',\widetilde{\mathcal{U}})$ che da $(S',\widetilde{\mathcal{U}})$ in $(S',\mathcal{U}')$, ma ciò segue subito, per il teorema di continuità della funzione composta, dal fatto che possiamo scrivere la $i_{S'}$ come $\varphi \circ \varphi^{-1}$ e che la funzione φ è un'omeomorfismo sia tra $(S,\mathcal{U})$ e $(S',\mathcal{U}')$ (per ipotesi) che tra $(S,\mathcal{U})$ e $(S',\widetilde{\mathcal{U}})$ (come abbiamo precedentemente verificato nel corso della dimostrazione).

Anche la connessione, cioè la proprietà di esere uno spazio connesso è una proprietà topologica.

Proposizione 11.5. *La connessione è una proprietà topologica.*

Dimostrazione. Ciò è un'immediata conseguenza del Teorema 10.2.

Osservazione 11.2. In realtà il Teorema 10.2 assicura che la connessione soddisfa ad un requisito più forte di quello di essere una proprietà topologica; essa è infatti una proprietà *invariante per immagini continue,* cioè una proprietà $\mathbb{P}$ per la quale è vera la seguente affermazione: " Se S è uno spazio topologico che ha la proprietà $\mathbb{P}$ e S' è uno spazio per il quale che esiste una funzione continua $\varphi : S \to S'$ da S su tutto S', allora anche S' ha la proprietà $\mathbb{P}$."

Esempio 11.3. La proprietà di essere uno spazio non connesso è una proprietà topologica (ciò segue subito dal fatto che la connessione è una proprietà topologica) ma non è invariante per immagini continue. Infatti un qualunque spazio non connesso S possiede un'immagine continua connessa; basta considerare, ad esempio lo stesso insieme S con la topologia indiscreta oppure un qualunque spazio con sostegno unitario.

Esempio 11.4. Un esempio di proprietà che non è una proprietà topologica è quella di "essere un sottospazio di $\mathbb{R}$" ($\mathbb{R}$ con la topologia usuale). Infatti la semicirconferenza

$$S \ = \ \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2+y^2=1 \, , \, y \geq 0\} \ ,$$

con la topologia indotta dalla topologia usuale di $\mathbb{R}^2$, non è un sottospazio di $\mathbb{R}$; tuttavia, come è facile provare, lo spazio S è omeomorfo all'intervallo $[-1,1]$, sottospazio di $\mathbb{R}$.

Ovviamente la proprietà di "essere omeomorfo ad un sottospazio di $\mathbb{R}$" è invece una proprietà topologica.

Segnaliamo infine l'uso, abbastanza frequente, delle proprietà topologiche a scopo "distruttivo", cioè per smentire l'affermazione che due assegnati spazi topologici siano omeomorfi.

Esempio 11.5. Sia S la circonferenza

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2+y^2=1\} \ ,$$

con la topologia indotta da quella di $\mathbb{R}^2$.

Proviamo che lo spazio S non è omeomorfo ad alcun intervallo di $\mathbb{R}$. Osserviamo, a tale scopo, che S ha la seguente proprietà:

$$\forall p \in S \quad \Longrightarrow \quad S \setminus \{p\} \text{ è un insieme conneso} \ . \tag{11.2}$$

Infatti, fissato un qualunque punto $p_0 = (x_0, y_0) \in S$ ed indicato, in corrispondenza, con θ_0 l'unico numero dell'intervallo $[0, 2\pi[$ tale che

$$x_0 \ = \ \cos\theta_0 \quad , \quad y_0 \ = \ \operatorname{sen}\theta_0 \ \ ,$$

si ha che $S\setminus\{p_0\}$ è l'immagine, mediante la funzione continua $f(\theta) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$, dell'intervallo $]\theta_0, \theta_0+2\pi[$, dunque $S \setminus \{p_0\}$ è connesso per il Teorema 10.2.

A questo punto, per ottenere la tesi, notiamo che la (11.2) è una proprietà topologica (ciò si verifica facilmente) e che però nessun intervallo di $\mathbb{R}$ ha la proprietà (11.2).

Esercizio 11.3. Provare che la (11.2) è una proprietà topologica (ovviamente nella (11.2) è sottinteso il fatto che il sostegno di S abbia almeno due punti).

Esercizio 11.4. Provare che la circonferenza $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2+y^2=1\}$, con la topologia indotta da quella di $\mathbb{R}^2$, non è omeomorfa a nessun sottospazio di $\mathbb{R}$.

Esempio 11.6. Riprendiamo in esame i tre tipi di intervalli considerati negli Esempi 11.2 e facciamo vedere, usando le proprietà topologiche, che due intervalli di tipi diversi non sono omeomorfi.

Infatti gli intervalli aperti sono spazi S che godono della seguente proprietà:

$$\forall p \in S \quad \Longrightarrow \quad S \setminus \{p\} \text{ non è un insieme conneso} \ . \tag{11.3}$$

Dato che la (11.3) è una proprietà topologica e che gli intervalli degli altri due tipi non hanno tale proprietà, possiamo concludere che un intervallo aperto non è omeomorfo a nessun intervallo degli altri due tipi.

Infine, per provare che un intervallo semiaperto ed uno chiuso e limitato (non degenere) non sono omeomorfi, osserviamo che gli intervalli semiaperti sono spazi S che hanno la seguente proprietà:

$$\exists_1 p_0 \in S \quad : \quad S \setminus \{p_0\} \text{ è un insieme connesso} \tag{11.4}$$

e che tale proprietà è una proprietà topologica, della quale non godono però gli intervalli chiusi e limitati (non degeneri); infatti per tali intervalli l'insieme dei punti $p \in S$ tali che $S \setminus \{p\}$ è un insieme connesso ha due elementi (gli estremi dell'intervallo).

Esercizio 11.5. Provare che la (11.4) è una proprietà topologica.

12. Spazi compatti.

Definizione 12.1. (*Spazio compatto*). Uno spazio topologico S si dice *compatto* se ogni ricoprimento dell'insieme S, formato da insiemi aperti, ha un sottoricoprimento finito, cioè:

$$\forall \{A_i \,:\, i \in I\}, \text{ famiglia di insiemi aperti, tale che } \bigcup_{i\in I} A_i \;=\; S \quad \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \quad \exists J \subseteq I\,,\; J \text{ finito, tale che } \bigcup_{i\in J} A_i \;=\; S \;\;.$$

Esempi 12.1. a) Uno spazio topologico indiscreto è compatto.

b) Uno spazio topologico, il cui sostegno S è un insieme finito, è uno spazio compatto.
Infatti, in questo caso, un qualunque ricoprimento di S è finito.

c) Uno spazio topologico discreto S è compatto se e soltanto se il suo sostegno è un insieme finito.
Se S è un insieme finito, lo spazio S è compatto per quanto detto in b). Invece, se S è infinito, un qualunque ricoprimento di S formato da insiemi finiti (ad esempio la famiglia di tutti sottoinsiemi unitari di S) è un ricoprimento di S, formato da insiemi aperti (tutti i sottoinsiemi di S sono aperti), che non possiede alcun sottoricoprimento finito; pertanto S non è compatto.

d) Un qualunque insieme S, con la topologia cofinita, è uno spazio compatto.
Infatti il complementare $S \setminus A$ di un qualunque insieme aperto non vuoto A è un insieme finito (o vuoto); da ciò segue facilmente che ogni ricoprimento dell'insieme S, del quale faccia parte almeno un insieme aperto non vuoto, ha un sottoricoprimento finito.

Definizione 12.2. (*Insieme compatto*). Sia E un sottoinsieme non vuoto di uno spazio topologico S. Si dice che E è un *insieme compatto* se E, con la topologia indotta da quella di S, è uno spazio topologico compatto.

In altri termini, ricordando la Proposizione 8.1, dire che un insieme $E \subseteq S$ è compatto vuol dire che:

$$\forall \{A_i \,:\, i \in I\}, \text{ famiglia di insiemi aperti di } S, \text{ tale che } \bigcup_{i\in I} A_i \;\supseteq\; E \quad \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \quad \exists J \subseteq I\,,\; J \text{ finito, tale che } \bigcup_{i\in J} A_i \;\supseteq\; E \;\;.$$

Proposizione 12.1. (Sottoinsiemi chiusi di spazi compatti). *Ogni sottoinsieme chiuso non vuoto C di uno spazio topologico compatto S è un insieme compatto.*

Dimostrazione. Se $\{A_i\ :\ i \in I\}$ è una qualunque famiglia di insiemi aperti di S tale che

$$\bigcup_{i\in I} A_i \ \supseteq\ C \quad ,$$

la famiglia che si ottiene aggiungendo alla famiglia data l'insieme aperto $S \setminus C$ è un ricoprimento di S, pertanto, per la compattezza di S, esiste un sottoinsieme finito J di I tale che

$$\left(\bigcup_{i\in J} A_i\right) \cup (S \setminus C) \ =\ S$$

e quindi

$$\bigcup_{i\in J} A_i \ \supseteq\ C \quad ;$$

ciò prova che C è un insieme compatto.

Proposizione 12.2. (Sottoinsiemi compatti di spazi di Hausdorff). *In uno spazio topologico di Hausdorff S ogni insieme compatto K è un insieme chiuso.*

Dimostrazione. Dimostriamo che il complementare $S \setminus K$ è aperto facendo vedere che, se x è un punto di $S \setminus K$, esiste un intorno U di x che è contenuto in $S \setminus K$. Osserviamo a tale scopo che, per ogni $z \in K$, essendo $x \neq z$, esistono un intorno U_z di x ed un intorno V_z di z tali che $U_z \cap V_z = \emptyset$. La famiglia di insiemi aperti $\{\overset{\circ}{V}_z\ :\ z \in K\}$ ricopre K:

$$\bigcup_{z\in K} \overset{\circ}{V}_z \ \supseteq\ K \quad ,$$

pertanto, per la compattezza di K, esiste un sottoinsieme finito $\{z_1, \ldots, z_r\}$ di K tale che

$$\overset{\circ}{V}_{z_1} \cup \ldots \cup \overset{\circ}{V}_{z_r} \ \supseteq\ K \quad .$$

In corrispondenza dell'insieme $\{z_1, \ldots, z_r\}$ resta individuato anche il seguente intorno del punto x:

$$U \ =\ U_{z_1} \cap \ldots \cap U_{z_r} \quad .$$

Proviamo che tale intorno U è contenuto in $S \setminus K$, cioè si ha $U \cap K = \emptyset$. Infatti, se fosse $U \cap K \neq \emptyset$, si avrebbe, a maggior ragione,

$$U \cap \big(V_{z_1} \cup \ldots \cup V_{z_r}\big) \ \neq\ \emptyset \quad ,$$

cioè

$$\big(U_{z_1} \cap \ldots \cap U_{z_r}\big) \cap \big(V_{z_1} \cup \ldots \cup V_{z_r}\big) \ \neq\ \emptyset$$

e quindi qualcuna delle intersezioni $U_{z_i} \cap V_{z_i}$, $i = 1, \ldots, r$, sarebbe non vuota, il che è assurdo. Ciò completa la dimostrazione.

Teorema 12.1. (Immagine continua di un insieme compatto). *Siano S, S' spazi topologici, sia $E \subseteq S$ un insieme compatto e sia $f : E \to S'$ una funzione continua.*

Allora anche l'immagine $f(E)$ è un insieme compatto di S'.

Dimostrazione. Per le Definizioni 12.2 e 8.2 non è restrittivo limitarsi al caso $E = S$.

Sia $\{A'_i\ :\ i \in I\}$ una famiglia di insiemi aperti di S' tale che

$$\bigcup_{i\in I} A'_i \ \supseteq\ f(S) \quad .$$

Poiché f è continua, la famiglia delle controimmagini, $\{f^{-1}(A'_i) \, : \, i \in I\}$, è formata da insiemi aperti di S; si ha inoltre, per la Proposizione 6.2,

$$\bigcup_{i \in I} f^{-1}(A'_i) \; = \; f^{-1}\Big(\bigcup_{i \in I} A'_i\Big) \; \supseteq \; f^{-1}(f(S)) \; = \; S \quad ,$$

dunque $\{f^{-1}(A'_i) \, : \, i \in I\}$ è un ricoprimento di S. Poiché S è compatto, esiste un sottoinsieme finito J di I tale che

$$\bigcup_{i \in J} f^{-1}(A'_i) \; = \; S \quad ,$$

ovvero

$$f^{-1}\Big(\bigcup_{i \in J} A'_i\Big) \; = \; S \quad .$$

Dalla precedente uguaglianza, ricordando ancora la Proposizione 6.2, si ricava

$$\bigcup_{i \in J} A'_i \; \supseteq \; f\Big(f^{-1}\Big(\bigcup_{i \in J} A'_i\Big)\Big) \; = \; f(S)$$

e ciò prova la compattezza di $f(S)$.

Corollario 12.1. *La compattezza è una proprietà topologica.*

Proposizione 12.3. (Continuità della funzione inversa). *Siano S e S' due spazi topologici, con S compatto e S' di Hausdorff.*

Se $f : S \to S'$ è una funzione continua e iniettiva, allora anche la funzione inversa $f^{-1} : f(S) \to S$ è una funzione continua (dallo spazio $f(S)$, sottospazio di S', nello spazio S).

Dimostrazione. Indichiamo, per comodità, con g la funzione inversa f^{-1} e ricordiamo che, per il Teorema 6.2, dimostrare la continuità di g equivale a dimostrare che

$$\forall C \subseteq S, \; C \text{ chiuso} \quad \Longrightarrow \quad g^{-1}(C) \text{ è un insieme chiuso di } f(S) \quad .$$

Proviamo la precedente implicazione. Se C è un insieme chiuso di S, e $C \neq \emptyset$ (altrimenti la tesi è banalmente vera), allora, per la Proposizione 12.1, C è un insieme compatto di S e quindi, dato che f è una funzione continua dallo spazio S nello spazio $f(S)$ (Osservazione 8.2), per il Teorema 12.1 l'insieme immagine $f(C)$, cioè l'insieme $g^{-1}(C)$, è un insieme compatto dello spazio $f(S)$; pertanto, dato che un sottospazio di uno spazio di Hausdorff è uno spazio di Hausdorff (verifica banale), per la Proposizione 12.2 $g^{-1}(C)$ è un insieme chiuso di $f(S)$.

Oltre a quello di insieme compatto, un altro importante concetto, che si rivela particolarmente utile in diverse questioni, è quello di insieme sequenzialmente compatto. Prima di parlarne occorre introdurre il concetto di successione convergente.

Definizione 12.3. (*Successione convergente*). Si dice che una successione $\{x_n\}$ di punti di uno spazio topologico $(S,\mathcal{U})$ *converge* ad un punto $x \in S$ se accade che:

$$\forall U \in \mathcal{U}(x) \quad \exists \overline{n} \in \mathbb{N} \; : \; x_n \in U \quad \forall n \geq \overline{n} \quad .$$

Se una successione $\{x_n\}$ di punti di uno spazio S converge ad un punto $x \in S$, si dice che il punto x è un *punto limite* o, più semplicemente, un limite della successione $\{x_n\}$.

In generale una successione convergente ha più di un limite. Ad esempio, in uno spazio topologico indiscreto S ogni successione di punti di S converge verso un qualunque punto di S.

Negli spazi topologici di Hausdorff vale però il teorema di unicità del limite per le successioni. La dimostrazione è del tutto simile alla dimostrazione svolta nel corso di Analisi I per le successioni di numeri reali ed è lasciata per esercizio allo studente.

Proposizione 12.4. (Unicità del limite). *In uno spazio topologico di Hausdorff ogni successione convergente ha un solo limite.*

Esercizio 12.1. Dimostrare la Proposizione 12.4.

Il successivo Esempio 12.2 fa vedere che la condizione che lo spazio topologico S sia uno spazio di Hausdorff – condizione che è sufficiente al fine di garantire che in S ogni successione convergente abbia un unico limite – non è però necessaria.

Esempio 12.2. (*La topologia conumerabile*). Se S è un qualunque insieme non vuoto, è facile verificare che la sottofamiglia $\mathcal{T}'$ di $\mathcal{P}(S)$, costituita dall'insieme vuoto e da tutti i sottoinsiemi A di S il cui complementare $S \setminus A$ è un insieme al più numerabile (cioè o vuoto o finito o numerabile), verifica le ipotesi del Teorema 4.1 e pertanto vi è un unico spazio topologico $(S,\mathcal{U})$, di sostegno S, che ha come famiglia degli insiemi aperti la famiglia $\mathcal{T}'$. La topologia dello spazio $(S,\mathcal{U})$ viene detta *conumerabile*.

Naturalmente, se S stesso è un insieme al più numerabile, la topologia conumerabile coincide con quella discreta.

Supponiamo che l'insieme S sia infinito, ma non numerabile. Allora lo spazio S, con la topologia conumerabile, non è uno spazio di Hausdorff (facile verifica, usando le formule di De Morgan). È tuttavia vero che, se $\{x_n\}$ è una successione di punti di S convergente verso un punto $x \in S$, allora si ha, definitivamente, $x_n = x$ (e da ciò segue immediatamente che ogni successione convergente ha un unico limite). Infatti, se si suppone per assurdo che non sia possibile trovare un indice $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che $x_n = x \ \forall n \geq \overline{n}$, si ottiene l'esistenza di una successione $\{x_{n_k}\}$, estratta da $\{x_n\}$, tale che $x_{n_k} \neq x \ \forall k \in \mathbb{N}$; allora l'insieme

$$U \ = \ S \setminus \{x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots\}$$

è un intorno di x, ma è evidente che non esiste alcun indice $\overline{n}$ tale che $x_n \in U \ \forall n \geq \overline{n}$, dunque $\{x_n\}$ non converge a x, contrariamente all'ipotesi.

Esercizio 12.2. Provare che un insieme infinito S, con la topologia conumerabile, non è uno spazio compatto.

Anche le due proposizioni che seguono sono ovvie estensioni di analoghe proposizioni riguardanti le successioni di numeri reali.

Proposizione 12.5. (Successioni estratte da successioni convergenti). *Se $\{x_n\}$ è una successione di punti di uno spazio topologico S convergente ad un punto $x \in S$, ogni successione $\{x_{n_k}\}$, estratta da $\{x_n\}$, converge a x.*

Proposizione 12.6. (Continuità e successioni convergenti). *Se $f : S \to S'$ è una funzione continua in un punto $\overline{x} \in S$ e $\{x_n\}$ è una successione di punti di S convergente a $\overline{x}$, allora $\{f(x_n)\}$ è convergente* [in S'] *a $f(\overline{x})$.*

Esercizio 12.3. Dimostrare le Proposizioni 12.5 e 12.6.

Definizione 12.4. (*Spazio sequenzialmente compatto*). Si dice uno spazio topologico S è *sequenzialmente compatto* se ogni successione $\{x_n\}$ di punti di S possiede una successione estratta convergente.

Esercizio 12.4. Provare che la sequenziale compattezza è una proprietà topologica.

Definizione 12.5. (*Insieme sequenzialmente compatto*). Si dice che un sottoinsieme non vuoto H di uno spazio topologico S è un *insieme sequenzialmente compatto* se H, con la topologia indotta da quella di S, è uno spazio sequenzialmente compatto.

In altri termini dire che H è un insieme sequenzialmente compatto vuol dire che ogni successione $\{x_n\}$ di punti di H possiede una successione estratta che converge (nello spazio S) ad un punto di H.

In generale i due concetti di spazio compatto e spazio sequenzialmente compatto sono "sghembi", cioè è possibile mostrare esempi di spazi topologici compatti che non sono sequenzialmente compatti ed esempi di spazi che sono sequenzialmente compatti ma non compatti. Si tratta di esempi non proprio semplici sui quali non ci soffermeremo.

Un fatto notevole è che nell'ambito degli spazi metrizzabili i concetti di compattezza e di sequenziale compattezza si equivalgono.

Teorema 12.2. (Compattezza e sequenziale compattezza negli spazi metrizzabili). *Sia H un sottoinsieme non vuoto di uno spazio metrizzabile S.*

L'insieme H è compatto se e soltanto se esso è sequenzialmente compatto.

Anche la dimostrazione del Teorema 12.2 è alquanto laboriosa e pertanto viene omessa.

Proviamo invece la

Proposizione 12.7. (Sottoinsiemi compatti di uno spazio metrico). *Ogni sottoinsieme compatto H di uno spazio metrico (S, d) è chiuso e limitato.*

Dimostrazione. L'insieme H è chiuso per la Proposizione 12.2. Proviamo che H è limitato. Fissato un qualsiasi punto $\overline{x} \in S$, consideriamo la successione di dischi aperti $\{B(\overline{x}, n)\}$. Tali dischi ricoprono S e quindi H. Di conseguenza esiste $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che $H \subseteq B(\overline{x}, \overline{n})$, dunque H è limitato.

In generale un sottoinsieme chiuso e limitato di uno spazio metrico non è necessariamente compatto.

Esempio 12.3. Consideriamo l'insieme $C^0([0,1])$ delle funzioni continue $x : [0,1] \to \mathbb{R}$, con la metrica

$$d(x, y) \;=\; \max_{t\in[0,1]} |x(t) - y(t)| \qquad \forall x, y \in C^0([0,1]) \;\; .$$

Sappiamo, dal corso di Analisi 1, che la convergenza di una successione $\{x_n\}$ di elementi di questo spazio metrico equivale alla converegenza uniforme, in $[0,1]$, della successione di funzioni $\{x_n(t)\}$.

Consideriamo la successione $\{y_n\}$ di elementi di $C^0([0,1])$ data da

$$y_n(t) = t^n \qquad \forall t \in [0,1],\ \forall n \in \mathbb{N}$$

e proviamo che tale successione non ha alcuna estratta convergente. Infatti la successione di funzioni $\{t^n\}$ converge puntualmente in $[0,1]$ alla funzione limite

$$\varphi(t) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{se } t \in [0,1[\,, \\ 1 & \text{se } t = 1\,, \end{cases}$$

che non è una funzione continua; la stessa cosa può ovviamente dirsi di ogni successione $\{t^{n_k}\}$ estratta da $\{t^n\}$, dunque, per il teorema di continuità della funzione limite, la $\{t^{n_k}\}$ non converge uniformemente in $[0,1]$. Da quanto detto segue che l'insieme

$$H \;=\; \{y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots\} \;\subseteq\; C^0([0,1])$$

non è un insieme sequenzialmente compatto di $C^0([0,1])$ e che, inoltre, il suo derivato $\mathrm{D}H$ è vuoto, quindi H è un insieme chiuso; infatti, supponendo che vi sia un punto $\overline{x} \in \mathrm{D}H$, si ottiene facilmente l'esistenza di una successione $\{y_{n_k}\}$, estratta da $\{y_n\}$, convergente a $\overline{x}$ (basta considerare come indice n_1 il minimo indice $n \in \mathbb{N}$ per cui $d(y_n, \overline{x}) \le 1$, come n_2 il minimo indice $n \in \mathbb{N}$, $n > n_1$, per cui $d(y_n, \overline{x}) \le \frac{1}{2}$, ecc. ecc.). D'altra parte H è anche un insieme limitato; esso è infatti contenuto nel disco chiuso $\{x \in C^0([0,1]) \,:\, d(x, o) \le 1\}$ (essendo o la funzione identicamente nulla in $[0,1]$).

In conclusione H è un sottoinsieme chiuso e limitato di $C^0([0,1])$ che non è [sequenzialmente] compatto.

Infine, ricordiamo – fatto che ci era già noto dal corso di Analisi 2 – che in $\mathbb{R}^h$ gli insiemi chiusi e limitati sono compatti.

Teorema 12.3. (Sottoinsiemi compatti di $\mathbb{R}^h$). *Nello spazio* $\mathbb{R}^h$*, munito della topologia usuale, ogni insieme* $H \neq \emptyset$*, chiuso e limitato, è* [*sequenzialmente*] *compatto.*