Il teorema della convergenza dominata

(appunti per il corso di Complementi di Analisi Matematica per Fisici, a.a. 2006-07)

Notazione. (*Lo spazio vettoriale* $M(\mathcal{A})$). Dato uno spazio misurabile $(\Omega, \mathcal{A})$, indichiamo con $M(\mathcal{A})$ l'insieme delle funzioni f, definite in Ω ed a valori in $\mathbb{R}$, che sono $\mathcal{A}$-misurabili.

Ovviamente $M(\mathcal{A})$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di addizione e moltiplicazione per gli scalari.

Definizione 1. (*Convergenza quasi-ovunque*). Dato lo spazio di misura $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni appartenenti a $M(\mathcal{A})$ e sia f una funzione elemento di $M(\mathcal{A})$.

Si dice che la successione $\{f_n\}$ *converge μ-quasi-ovunque verso la funzione f* se esiste un insieme $A \in \mathcal{A}$, con $\mu(A^c) = 0$, tale che $\{f_n\}$ converga puntualmente a f nell'insieme A:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(\omega) \;=\; f(\omega) \qquad \forall \omega \in A\,. \tag{1}$$

Per indicare che la successione $\{f_n\}$ converge μ-quasi-ovunque verso la funzione f adoperiamo la notazione

$$f_n \;\to\; f \quad \mu\text{-q.o.}$$

Dalla definizione data risulta evidente che la funzione limite f rispetto alla convergenza μ-quasi-ovunque non è unica (a meno che lo spazio di misura $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ non abbia la proprietà che l'unico insieme di misura nulla sia l'insieme vuoto); infatti, se $g \in M(\mathcal{A})$ è una qualunque funzione tale che $g = f$ μ-q.o., anche per la funzione g si ha che $f_n \to g$ μ-q.o. D'altra parte è pure vero che nella convergenza μ-quasi-ovunque due funzioni limite della stessa successione $\{f_n\}$ risultano uguali μ-quasi-ovunque e pertanto sono indistinguibili mediante gli integrali, sicché, dal punto di vista dell'integrazione astratta, si può dire che sostanzialmente vi è un'unica funzione limite. In altre parole possiamo affermare che il limite nella convergenza μ-quasi-ovunque non è, in generale, unico come elemento di $M(\mathcal{A})$, però individua un unico elemento dello spazio vettoriale quoziente $M(\mathcal{A})_{/\mathcal{N}}$ (dove $\mathcal{N}$ è lo spazio vettoriale di tutte le funzioni $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$, $\mathcal{A}$-misurabili e tali che $\varphi = 0$ μ-q.o.).

Le considerazioni appena svolte sono riepilogate e precisate nella seguente proposizione, della quale omettiamo la dimostrazione

Proposizione 1. (Essenziale unicità della funzione limite nella convergenza quasi-ovunque). *Dato lo spazio di misura* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$*, sia* $\{f_n\}$ *una successione di funzioni appartenenti a* $M(\mathcal{A})$ *e siano* $f, g \in M(\mathcal{A})$ *. Supponiamo inoltre che risulti*

$$f_n \ \rightarrow \ f \quad \mu - \text{q.o.}$$

Si ha allora la seguente equivalenza

$$f_n \ \rightarrow \ g \quad \mu\text{-q.o.} \quad \Longleftrightarrow \quad f = g \quad \mu\text{-q.o.}$$

Definizione 2. (*Convergenza in media*). Dato lo spazio di misura $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni appartenenti a $M(\mathcal{A})$ e sia $f \in M(\mathcal{A})$.

Si dice che la successione $\{f_n\}$ *converge in media (di ordine* 1*) verso la funzione* f se sono soddisfatte le seguenti condizioni:

i) ogni funzione f_n, $n \in \mathbb{N}$, è μ-integrabile;

ii) f è μ-integrabile;

iii) risulta

$$\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f| \, d\mu \ = \ 0 \quad . \tag{2}$$

Per indicare che la successione $\{f_n\}$ converge converge in media verso la funzione f scriviamo

$$f_n \ \rightarrow \ f \quad \text{in } \mathcal{L}^1(\mu) \quad .$$

Anche per la convergenza in media, per quanto concerne l'unicità della funzione limite, si ha una situazione analoga a quella della convergenza quasi-ovunque (pure in questo caso omettiamo la dimostrazione).

Proposizione 2. (Essenziale unicità della funzione limite nella convergenza in media.) *Dato lo spazio di misura* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$*, sia* $\{f_n\}$ *una successione di funzioni appartenenti a* $M(\mathcal{A})$ *e siano* $f, g \in M(\mathcal{A})$ *. Supponiamo che risulti*

$$f_n \ \rightarrow \ f \quad \text{in } \mathcal{L}^1(\mu) \quad .$$

Si ha allora la seguente equivalenza

$$f_n \ \rightarrow \ g \quad \text{in } \mathcal{L}^1(\mu) \quad \Longleftrightarrow \quad f = g \quad \mu\text{-q.o.}$$

Il seguente importantissimo teorema, noto come "Teorema di Lebesgue" o "Teorema della convergenza dominata", fornisce una condizione sufficiente per la convergenza in media, la quale, oltre ad essere facilmente applicabile, presenta pure degli interessanti risvolti dal punto di vista teorico. L'ipotesi principale, oltre alla convergenza quasi-ovunque, è che tutte le funzioni f_n della successione che si considera siano "dominate", cioè maggiorate, in valore assoluto, da un'unica funzione μ-integrabile; ciò spiega l'appellativo di teorema della convergenza dominata.

Teorema 1. (Teorema di Lebesgue o della "convergenza dominata"). *Dato lo spazio di misura $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, supponiamo che $\{f_n\}$ sia una successione di funzioni appartenenti a $M(\mathcal{A})$ convergente μ-quasi-ovunque ad una funzione $f \in M(\mathcal{A})$. Supponiamo inoltre che esista una funzione $g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$, $\mathcal{A}$-misurabile e μ-integrabile, tale da aversi, in tutto Ω,*

$$|f_n| \ \leq \ g \qquad\qquad \forall n \in \mathbb{N} \ .$$

Allora la successione $\{f_n\}$ converge in media alla funzione f.

Osservazione 1. La convergenza in media di una successione $\{f_n\}$ ad una funzione f è condizione sufficiente affinché sia lecito il passaggio al limite sotto il segno di integrale, cioè si abbia

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \ d\mu \ = \ \int f \ d\mu \ .$$

Ciò segue subito dal fatto che, per la linearità e la monotonia dell'integrale, risulta, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$\left| \int f_n \ d\mu \ - \ \int f \ d\mu \right| \ = \ \left| \int (f_n - f) \ d\mu \right| \ \leq \ \int |f_n - f| \ d\mu \ . \tag{3}$$

La condizione non è però necessaria. Possiamo mostrare infatti esempi di successioni $\{f_n\}$ e funzioni f, verificanti le condizioni i) e ii) della Definizione 2, per le quali vale la (3) ma non la (2). Ad esempio, nello spazio di misura $(\mathbb{R}, \mathcal{L}_1, \mathrm{m}_1)$, possiamo prendere come successione $\{f_n\}$ quella così definita:

$$f_n = -\tfrac{1}{n} \mathbb{1}_{[-n,0[} + \tfrac{1}{n} \mathbb{1}_{]0,n]} \qquad\qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

e come f la funzione identicamente nulla.