Gli insiemi

Insieme, elemento, appartenenza.

Assumiamo come primitivi i concetti di *insieme, elemento* e *appartenenza.*

I *concetti primitivi* sono quelli dei quali, constatata l'impossibilità di fornirne una spiegazione mediante nozioni ancora più semplici, si rinunzia a dare una definizione esplicita; essi vengono ritenuti noti di per sè ed a loro si attribuisce il significato che ci viene suggerito dalla nostra intuizione, anche sulla scorta di esperienze concrete. Il significato dei concetti primitivi viene inoltre precisato dai *postulati* (proposizioni la cui verità viene accettata senza dimostrazione).

Ad esempio, nella Geometria euclidea, si assumono come primitivi i concetti di *punto, retta* e *piano;* in quest'ambito un esempio di postulato è "per due punti distinti passa una ed una sola retta".

I concetti di insieme, elemento ed appartenenza sono messi in relazione tra loro dal seguente postulato.

Postulato (*Postulato fondamentale della teoria degli insiemi*). Dato un qualunque insieme A ed un qualunque elemento a ([1]) si verifica uno soltanto dei seguenti due fatti:
1) a appartiene ad A,
2) a non appartiene ad A.

Pertanto la frase "l'insieme degli alunni del primo anno del Corso di Laurea in Ingegneria Industriale che all'esame di maturità hanno riportato una buona votazione" non descrive un insieme (il postulato non è soddisfatto: considerare buona o meno una votazione dipende da valutazioni soggettive).

Ha invece perfettamente senso considerare "l'insieme degli studenti del primo anno del Corso di Laurea in Ingegneria Industriale che hanno conseguito la maturità nell'anno scolastico 2015-2016 riportando una votazione superiore a $\frac{90}{100}$".

Per indicare che l'elemento a appartiene all'insieme A si adopera la notazione

$$a \in A$$

(si legge "a appartiene ad A" oppure "a è un elemento di A"). Il simbolo $\in$ si chiama *simbolo di appartenenza.* Per indicare invece che a non appartiene ad A si scrive

$$a \notin A$$

(così come per indicare che due numeri m e n sono disuguali si scrive $m \neq n$).

I due modi per descrivere gli insiemi.

Vi sono essenzialmente due modi per descrivere (= specificare, dire com'è fatto) un insieme:

a) *l'elencazione degli elementi*;
b) *l'uso di una proprietà caratterizzante.*

Il modo a) consiste nello scrivere l'elenco degli elementi dell'insieme (separati da virgole e racchiusi da una coppia di parentesi graffe). Ad esempio, scrivendo

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10\} \quad ,$$

([1]) È consuetudine (ma non è una regola) indicare gli insiemi con lettere maiuscole: $A, B, C, \ldots$ e gli elementi con lettere minuscole: $a, b, c, \ldots, x, y, z$.

si intende che A è l'insieme che ha come elementi i numeri 2, 4, 6, 8 e 10.

Osserviamo che nella descrizione per elencazione di un insieme l'ordine degli elementi nell'elenco ed eventuali ripetizioni non hanno alcuna importanza. Ad esempio i simboli

$$\{2,4,6,8,10\}\ ,\quad \{4,6,2,8,10\}\ \text{ e }\ \{4,6,2,8,10,2\}$$

individuano tutti il medesimo insieme.

Osserviamo inoltre che nella notazione per elenco occorre spesso avere anche un po' di elasticità mentale. Ad esempio, scrivendo

$$B=\{2,4,6,8,\ldots,38,40\}\ ,$$

si capisce B è l'insieme di tutti i numeri interi positivi pari minori o uguali di 40 e che i puntini sottintendono l'elenco dei numeri interi pari da 10 a 36. Analogamente la notazione

$$C=\{2,4,6,8,\ldots\}\ ,$$

sta ad indicare che C è l'insieme che ha come elementi tutti i numeri interi positivi pari (i puntini questa volta sottintendono l'elenco di tutti i numeri interi positivi pari maggiori o uguali a 10).

Un insieme avente un unico elemento, come ad es. $\{0\}$ oppure $\{1\}$ oppure $\{\frac{1}{2}\}$ ecc., viene detto *insieme unitario.*

Nel modo b) si descrive l'insieme dichiarando una proprietà che "caratterizza" gli elementi dell'insieme, cioè che è soddisfatta da tutti gli elementi dell'insieme e soltanto da essi. In altre parole, si fissano i requisiti che un elemento deve possedere per appartenere all'insieme.

Ad esempio, l'insieme A considerato in precedenza può anche essere descritto così:

$$A=\{x\ :\ x \text{ è un numero intero positivo pari minore o uguale a } 10\}\ ;$$

La precedente uguaglianza va letta nel modo seguente: "A è uguale all'insieme formato dagli elementi x tali che x è un numero intero ecc. ecc.". (Il simbolo : viene usato in Matematica con il significato di "*tale che*", "*avente la proprietà che*"; talvolta adopereremo anche, con lo stesso significato, il simbolo *t.c.*)

Osserviamo che la scelta della lettera utilizzata per indicare la variabile non ha alcuna importanza, quindi l'insieme A può essere, ad esempio, individuato anche mediante la notazione

$$\{y\ :\ y \text{ è un numero intero positivo pari minore o uguale a } 10\}$$

oppure

$$\{m\ :\ m \text{ è un numero intero positivo pari minore o uguale a } 10\}\ .$$

Notiamo anche che scrivendo

$$\{m\ :\ m \text{ è un numero intero positivo pari minore o uguale a } 11\}$$

oppure

$$\{n\ :\ n \text{ è un numero intero positivo pari minore di } 12\}$$

si descrive ancora una volta lo stesso insieme A.

Uguaglianza tra insiemi.

Abbiamo implicitamente fatto uso della nozione di *uguaglianza tra insiemi*.

Definizione 1. Due insiemi si dicono uguali se hanno esattamente gli stessi elementi.

Il significato della frase "hanno esattamente gli stessi elementi" è: "ogni elemento dell'insieme A appartiene anche a B e, viceversa, ogni elemento dell'insieme B appartiene anche a A".

Alcuni insiemi numerici notevoli.

Per indicare alcuni importanti insiemi di numeri, adoperati molto frequentemente in Matematica, sono stati riservati alcuni simboli speciali.

$\mathbb{N}$ indica l'insieme dei *numeri naturali*, cioè

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\} \quad .$$

$\mathbb{N}^+$ indica l'insieme dei *numeri interi positivi*, cioè

$$\mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, \ldots\} \quad .$$

(**Avvertenza:** in alcuni testi l'insieme dei numeri naturali viene indicato con $\mathbb{N}_0$ e quello degli interi positivi con $\mathbb{N}$.)

$\mathbb{Z}$ indica l'insieme dei *numeri interi relativi*, cioè

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\} \quad .$$

$\mathbb{Q}$ indica l'insieme dei *numeri razionali*, cioè dei numeri che possono esprimersi come rapporto $\frac{m}{n}$ tra due numeri interi relativi m e n, con $n \neq 0$. Possiamo quindi scrivere:

$$\mathbb{Q} = \{x \ : \ x = \frac{m}{n} \text{ con } m, n \in \mathbb{Z} \text{ e } n \neq 0\} \quad .$$

Osserviamo che si può anche scrivere:

$$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \ : \ m, n \in \mathbb{Z} \ , \ n \neq 0\} \quad ;$$

in questo caso il significato del secondo membro è "l'insieme formato da tutti gli elementi $\frac{m}{n}$ che si ottengono facendo variare m e n nell'insieme $\mathbb{Z}$, con la condizione che $n \neq 0$".

Ricordiamo che due frazioni $\frac{m}{n}$ e $\frac{p}{q}$ sono uguali se, riducendole allo stesso denominatore, accade che anche i numeratori sono uguali.

Riducendo $\frac{m}{n}$ e $\frac{p}{q}$ allo stesso denominatore nq abbiamo

$$\frac{m}{n} = \frac{mq}{nq} \quad , \quad \frac{p}{q} = \frac{pn}{qn} \quad ,$$

pertanto le due frazioni $\frac{m}{n}$ e $\frac{p}{q}$ sono uguali se sono uguali i due prodotti "incrociati" mq e pn.

Un'altra cosa da ricordare è che i numeri razionali si possono rappresentare come numeri decimali finiti o periodici.

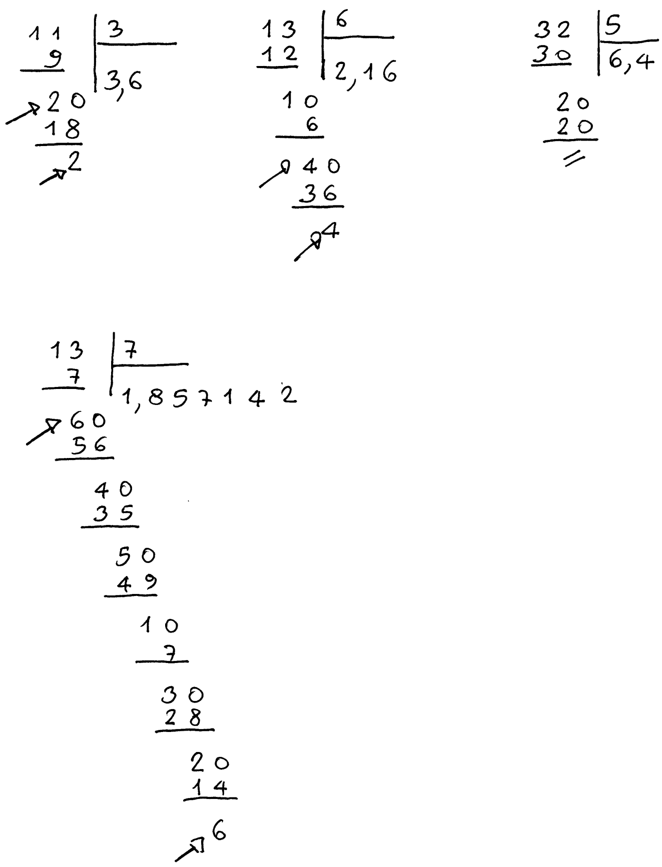
Per trasformare una frazione $\frac{m}{n}$ in numero decimale basta effettuare la divisione $m : n$ continuando dopo la virgola (qualora il risultato non sia intero) fino a quando non si ottiene come resto lo zero (e in questo caso si ha un numero decimale finito) oppure un resto già ottenuto in precedenza (e in questo caso si ha un numero decimale periodico). Il fatto che, se non si ottiene come resto lo zero, si debba ottenere necessariamente un resto già trovato in precedenza è evidente: supponendo, come è possibile fare, che sia $n \geq 2$, i possibili resti sono soltanto: $0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Esempi.

$$\frac{11}{3} = 3,\overline{6} \quad ; \quad \frac{13}{-6} = -2,1\overline{6} \quad ; \quad \frac{-32}{5} = -6,4 \quad ;$$

$$\frac{13}{7} = 1,\overline{857142} \quad .$$

Infatti:



(le freccette indicano i punti in cui il resto si ripete).

La frazione $\frac{m}{n}$ dà luogo ad un numero decimale finito se, riducendola ai minimi termini, accade che nella scomposizione in fattori primi del denominatore figurano soltanto i fattori 2 e 5.

Ad esempio:

$$\frac{7}{5} = 1,4 \quad ; \quad \frac{73}{-20} = -3,65 \quad .$$

Infatti:

$$\frac{7}{5}=\frac{7\cdot 2}{5\cdot 2}=\frac{14}{10}=1,4 \quad ;$$

$$\frac{73}{-20}=\frac{-73}{20}=\frac{-73}{2^2\cdot 5}=\frac{-73\cdot 5}{2^2\cdot 5^2}=\frac{-365}{100}=-3,65 \quad .$$

La regola per trovare la *frazione generatrice* di un numero decimale finito o periodico è nota dalla Scuola Media. Ricordiamola con degli esempi:

$$3,21=\frac{321}{100} \quad ; \quad 3,\overline{21}=\frac{321-3}{99}=\frac{106}{33} \quad ;$$
$$3,21\overline{5}=\frac{3215-321}{900}=\frac{2894}{900}=\frac{1447}{450} \quad .$$

Convenendo di considerare periodici (con periodo lo zero) anche i numeri decimali finiti, possiamo dire che i numeri razionali sono i numeri che ammettono una rappresentazione decimale periodica.

Completiamo l'elenco degli insiemi numerici notevoli.

$\mathbb{R}$ indica l'insieme dei *numeri reali*, cioè dei numeri x che possono rappresentarsi nella forma

(1) $$x=*M,C_1C_2C_3\dots C_n\dots \quad ,$$

dove $*$ è uno dei due segni $+$ o $-$, M è un elemento di $\mathbb{N}$ e $C_1C_2C_3\dots C_n\dots$ è una sequenza infinita di cifre decimali (cifre decimali sono i simboli $0,1,2,\dots,9$) che può essere periodica (e in questo caso si ha un numero razionale) oppure no (ed in quest'altro caso il numero x è un *numero irrazionale*).

Ricordiamo che due numeri reali x e y sono uguali, oltre che nel caso in cui le loro rappresentazioni del tipo (1) sono perfettamente identiche (stesso segno, stessa parte intera e stessa sequenza di cifre decimali) anche nei seguenti due casi particolari:

1) $x=+0,00\cdots 0\cdots$ e $y=-0,00\cdots 0\cdots$ o viceversa;

2) uno dei due numeri, diciamo x, è periodico con periodo 9 (per es. $x=+1,23\overline{9}$) e l'altro si ottiene da x sostituendo al 9 del periodo lo zero ed aumentando di un'unità la cifra immediatamente precedente il periodo (dunque $y=+1,24\overline{0}=1,24$); infatti si verifica che le frazioni generatrici sono uguali:

$$+1,23\overline{9}=\frac{1239-123}{900}=\frac{1116}{900}=\frac{124}{100} \quad ,$$

$$+1,24=\frac{124}{100} \quad .$$

È consuetudine sottintendere il segno di numero reale quando il segno è $+$; ciò è esclusivamente per economia di scrittura: tutti i numeri reali sono dotati di segno.

Un esempio di numero irrazionale è

$$7,10100100010000\cdots \quad .$$

Un altro esempio di numero irrazionale è $\sqrt{2}$.

I simboli $\Longrightarrow$, $\exists$, $\forall$.

Se α e β sono due proposizioni logiche la scrittura

$$\text{“ } \alpha \Longrightarrow \beta \text{ ”} \tag{2}$$

sta ad indicare la nuova proposizione logica “Se è vera α, allora è vera anche β”.

Proposizione logica è una frase, composta da un soggetto ed un predicato, avente un valore logico (vero o falso) ben definito.

Ad esempio sono proposizioni logiche “Il cane è un quadrupede” (vero), “Il cane è un volatile” (falso), “Il cane del mio vicino ha abbaiato un'ora fa” (vero o falso, dipende da ciò che ha fatto il cane un'ora fa) mentre non sono proposizioni logiche “Il cane è un animale simpatico”, “Il cane del mio vicino abbaierà tra un'ora”.

Quando la frase contiene una *variabile*, per potere dire che si tratta di una proposizione logica occorre che il valore logico di tale frase sia ben definito ogni qual volta che viene precisato il valore attribuito alla variabile. Sono facili esempi di proposizioni logiche contenenti una variabile “T è un triangolo”, ”n è un numero intero positivo” ecc. ecc.

Altri modi (tutti equivalenti) per esprimere la frase (2) sono:

“α implica β”,

“Da α segue β”,

“α è *condizione sufficiente* per β”,

“β è *condizione necessaria* per α”.

Ovviamente la (2) avrà a sua volta un valore logico ben preciso. Ad esempio

“T è un triangolo equilatero $\Longrightarrow$ T è un triangolo isoscele”,

”n è un numero naturale divisibile per 6 $\Longrightarrow$ n è un numero naturale pari”

sono vere, mentre

“Q è un quadrilatero con due lati perpendicolari $\Longrightarrow$ Q è un trapezio”
è falsa.

La proposizione

$$\text{“ } \alpha \Longleftrightarrow \beta \text{ ”}$$

si legge

“α e β sono fatti equivalenti”

(cioè sono entrambi veri o entrambi falsi) oppure

“α è *condizione necessaria e sufficiente* per β”.

Ad esempio

“T è un triangolo equilatero $\Longleftrightarrow$ T è un triangolo avente i tre angoli uguali”

è vera, invece

”n è un numero naturale divisibile per 6 $\Longleftrightarrow$ n è un numero naturale pari” è falsa.

Mediante il simbolo $\iff$ possiamo esprimere la Definizione 1 come segue:

$$A = B \quad \overset{\text{def.}}{\iff} \quad \left[x \in A \quad \iff \quad x \in B\right] \quad .$$

Il simbolo $\exists$ ha il significato di "esiste", "c'è almeno un".

Il simbolo $\forall$ ha il significato di "qualunque sia", "per ogni".

Proviamo a scrivere alcune proposizioni adoperando tali simboli.

$\exists n \in \mathbb{N} \; : \; n^2 < 5$
"c'è almeno un numero naturale n tale che $n^2 < 5$" (vero);

$\exists n \in \mathbb{N} \; : \; n(n+1) = 1$
"esistono numeri naturali n tali che $n(n+1) = 1$" (falso)

$n^2 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{Z}$
"il numero n^2 è naturale, qualunque sia $n \in \mathbb{Z}$" (vero);

$n^2 > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
"il numero n^2 è positivo, qualunque sia $n \in \mathbb{N}$" (falso).

Le due frasi precedenti si possono anche scrivere

$n \in \mathbb{Z} \implies n^2 \in \mathbb{N}$,

$n \in \mathbb{N} \implies n^2 > 0$,

oppure ancora

$\forall n \in \mathbb{Z} \implies n^2 \in \mathbb{N}$,

$\forall n \in \mathbb{N} \implies n^2 > 0$.

Talvolta si scrive $\exists_1$ per dire "esiste ed è unico", "c'è un solo".

Ad esempio, la proposizione

$\exists_1 n \in \mathbb{N} \; : \; n^2 = 25$

è vera, mentre

$\exists_1 n \in \mathbb{Z} \; : \; n^2 = 25$

è falsa.

Sottoinsiemi.

Definizione. Dati due insiemi A e B, si dice che A *è un sottoinsieme di* B (o che A è *contenuto* o *incluso* in B) se ogni elemento di A è anche elemento di B.

Per indicare che A è un sottoinsieme di B si scrive

$$A \subseteq B \quad .$$

Ad esempio si ha

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \quad , \quad \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \quad ,$$

ma

$$\mathbb{Q} \not\subseteq \mathbb{Z}$$

($\mathbb{Q}$ non è un sottoinsieme di $\mathbb{Z}$); infatti vi sono elementi di $\mathbb{Q}$, ad esempio $\frac{1}{3}$, che non appartengono a $\mathbb{Z}$.

Fra i sottoinsiemi di un insieme B c'è l'insieme B stesso.

Per indicare che A è un sottoinsieme di B diverso da B si scrive

$$A \subset B$$

oppure

$$A \underset{\neq}{\subset} B$$

e si dice che A è *contenuto propriamente* (o *in senso stretto*) in B.

Il principio di doppia inclusione.

È evidente che

$$A = B \quad \Longleftrightarrow \quad A \subseteq B \;\text{ e }\; B \subseteq A \quad .$$

Questa semplice affermazione prende il nome di "principio di doppia inclusione" ed è spesso utile per dimostrare l'uguaglianza di due insiemi. Ovviamente l'uguaglianza $A = B$ si dimostra anche, direttamente, scrivendo una sequenza di equivalenze che alla fine ci permette di concludere che $x \in A \Longleftrightarrow x \in B$.

L'insieme vuoto.

L'insieme privo di elementi si chiama *insieme vuoto* e si indica con $\emptyset$. Esso è un sottoinsieme di ogni altro insieme.

Ad esempio:

$$\{n \,:\, n \in \mathbb{N} \;\text{ e }\; n^2 = \tfrac{1}{2}\} = \emptyset \qquad , \qquad \{x \,:\, x \in \mathbb{R} \;\text{ e }\; x + 1 < x\} = \emptyset \quad .$$

Le operazioni insiemistiche.

Dati due insiemi A e B, a partire da essi si possono costruire altri insiemi usando le operazioni insiemistiche di *unione, intersezione* e *differenza.*

Definizione 2. (Unione).

Si chiama *unione* dell'insieme A e dell'insieme B e si indica con

$$A \cup B$$

(si legge "A unione B" o "A unito B") l'insieme che ha come elementi gli elementi che appartengono ad almeno uno dei due insiemi A e B.

In altre parole

$$A \cup B \overset{\text{def.}}{=} \{x \,:\, x \in A \quad \text{o} \quad x \in B\} \quad ,$$

dove la congiunzione "o" è usata nel senso non esclusivo.

L'unione di due insiemi gode delle proprietà *commutativa* e *associativa*, cioè si ha

$$A \cup B = B \cup A \quad , \quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

qualunque siano gli insiemi A, B e C (per dimostare la seconda uguaglianza ci si può giovare del principio di doppia inclusione); vale inoltre l'equivalenza

$$A \subseteq B \quad \Longleftrightarrow \quad A \cup B = B \quad .$$

Definizione 3. (Intersezione).

Si chiama *intersezione* degli insiemi A e B e si indica con

$$A \cap B$$

(si legge "A intersezione B" o "A intersecato B") l'insieme che ha come elementi gli elementi comuni agli insiemi A e B.

In altre parole

$$A \cap B \overset{\text{def.}}{=} \{x \,:\, x \in A \quad \text{e} \quad x \in B\} \quad .$$

Anche l'intersezione ha la proprietà commutativa e la proprietà associativa:

$$A \cap B = B \cap A \quad , \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cup C)$$

e sussiste l'equivalenza

$$A \subseteq B \quad \Longleftrightarrow \quad A \cap B = A \quad .$$

Valgono inoltre le due proprietà *distributive* (dell'unione rispetto all'intersezione e viceversa):

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad , \tag{3}$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \tag{4}$$

e le due proprietà *di assorbimento*:

$$A \cup (A \cap B) = A \quad , \quad A \cap (A \cup B) = A \quad .$$

Dimostrazione della (3). Adoperiamo il principio di doppia inclusione. Dimostriamo dapprima che

$$(5) \qquad A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C) \qquad .$$

Si ha infatti:

$$x \in A \cup (B \cap C) \iff x \in A \ \text{ o } \ x \in B \cap C \iff x \in A \ \text{ o } \ \big[x \in B \text{ e } x \in C\big] \ ;$$

d'altra parte è evidente che valgono entrambe le implicazioni

$$x \in A \implies x \in (A \cup B) \text{ e } x \in (A \cup C) \iff x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$x \in B \text{ e } x \in C \implies x \in (A \cup B) \text{ e } x \in (A \cup C) \iff x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

pertanto

$$x \in A \cup (B \cap C) \implies x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

dunque è vera la (5).

Dimostriamo adesso che

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$$

Infatti, preso un elemento $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, si hanno due possibilità:

1) $x \in A$ e in questo caso risulta ovviamente $x \in A \cup (B \cap C)$;

2) $x \notin A$; in questo eventualità, dato che per ipotesi sono vere entrambe le affermazioni $x \in A \cup B$ e $x \in A \cup C$, possiamo affermare che sono vere anche le due affermazioni $x \in B$ e $x \in C$, dunque è vero che $x \in B \cap C$ e pertanto anche questa volta possiamo concludere che $x \in A \cup (B \cap C)$.

Dimostrazione della (4). Osserviamo che

$$x \in A \cap (B \cup C) \iff x \in A \ \text{ e } \ x \in B \cup C \iff x \in A \ \text{ e } \ \big[x \in B \text{ o } x \in C\big] \ ;$$

d'altra parte si ha

$$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \iff \big[x \in A \text{ e } x \in B\big] \text{ o } \big[x \in A \text{ e } x \in C\big] \ ;$$

pertanto, per completare la dimostrazione della (4) è sufficiente osservare cheè vera l'equivalenza

$$x \in A \ \text{ e } \ \big[x \in B \text{ o } x \in C\big] \iff \big[x \in A \text{ e } x \in B\big] \text{ o } \big[x \in A \text{ e } x \in C\big] \ ,$$

ma questa si verifica immediatamente.

Definizione 4. (Differenza).

Si chiama *differenza* tra l'insieme A e l'insieme B, e si indica con

$$A \setminus B$$

(si legge "A meno B"), l'insieme costituito da tutti gli elementi di A che non appartengono a B.

In altre parole

$$A \setminus B \overset{\text{def.}}{=} \{x \, : \, x \in A \ \text{ e } \ x \notin B\} \ .$$

Esempio. Se

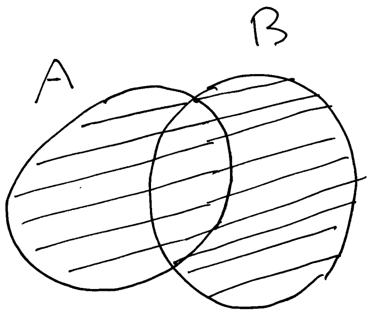
$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad , \quad B = \{4, 6, 8, 10\} \ ,$$

allora

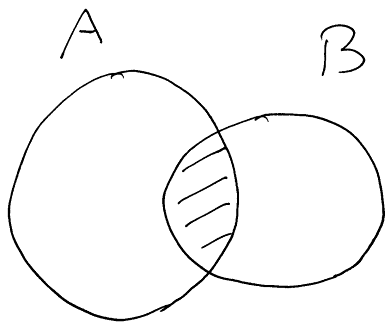
$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10\} \quad , \quad A \cap B = \{4, 6\} \quad ,$$

$$A \setminus B = \{1, 2, 3, 5\} \quad , \quad B \setminus A = \{8, 10\} \quad .$$

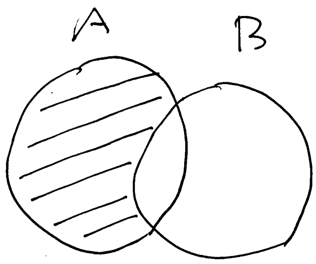
Usando i cosiddetti *diagrammi di Eulero-Venn* (si rappresentano gli insiemi come delle regioni piane limitate da linee chiuse) i risultati delle operazioni di unione, intersezione e differenza si raffigurano nel seguente modo



$A \cup B$

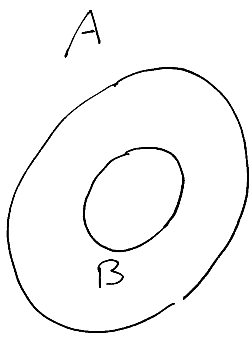


$A \cap B$

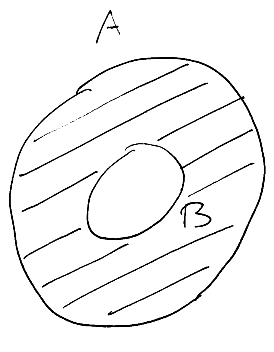


$A \setminus B$

Il diagramma



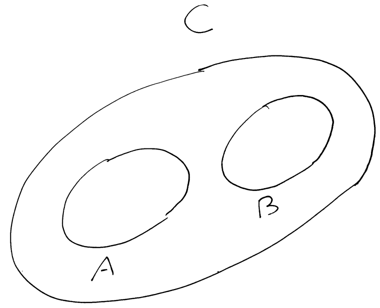
sta ad indicare il fatto che B è un sottoinsieme di A. In questo caso l'insieme differenza $A \setminus B$ si rappresenta così:



$A \setminus B$

Inoltre, quando $B \subseteq A$, l'insieme $A \setminus B$ viene anche detto *complementare* di B rispetto ad A.

Il diagramma seguente sta a significare che i due insiemi A e B sono entrambi sottoinsiemi di C e inoltre A e B sono insiemi *disgiunti*, cioè tali che $A \cap B = \emptyset$.



$A \subseteq C$, $B \subseteq C$ e $A \cap B = \emptyset$

Le formule di De Morgan.

Sono due importanti identità insiemistiche, cioè uguaglianze insiemistiche vere qualunque siano gli insiemi in esse considerati:

$$(6)\ \ A \setminus (B \cup C) \ = \ (A \setminus B) \cap (A \setminus C) \ \ , \ \ (7)\ \ A \setminus (B \cap C) \ = \ (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \ \ .$$

(Un trucco per ricordarne gli enunciati è quello di pensare al caso in cui B e C sono entrambi sottoinsiemi di A, cosicché le differenze insiemistiche che figurano nelle due formule sono i complementari rispetto all'insieme A; la (6) si può allora leggere "Il complementare dell'unione è uguale all'intersezione dei complementari", mentre la (7) diventa "Il complementare dell'intersezione è uguale all'unione dei complementari").

Dimostrazione della (6). Si ha

$$x \in A \setminus (B \cup C) \iff x \in A \text{ e } x \notin B \cup C \iff x \in A \text{ e } \big[x \notin B \text{ e } x \notin C\big] \ ;$$

d'altra parte, partendo dal secondo membro, si ha pure

$$x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C) \iff x \in (A \setminus B) \text{ e } x \in (A \setminus C) \iff \big[x \in A \text{ e } x \notin B\big] \text{ e } \big[x \in A \text{ e } x \notin C\big] \ ;$$

a queso punto per completare la dimostrazione basta osservare che

$$x \in A \text{ e } \big[x \notin B \text{ e } x \notin C\big] \iff \big[x \in A \text{ e } x \notin B\big] \text{ e } \big[x \in A \text{ e } x \notin C\big]$$

(una breve riflessione convince della validità della precedente equivalenza).

Dimostrazione della (7). Si ha

$$A \setminus (B \cap C) \iff x \in A \text{ e } x \notin B \cap C \iff x \in A \text{ e } \big[x \notin B \text{ o } x \notin C\big] \ ;$$

d'altra parte si ha pure

$$x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \iff x \in (A \setminus B) \text{ o } x \in (A \setminus C) \iff \big[x \in A \text{ e } x \notin B\big] \text{ o } \big[x \in A \text{ e } x \notin C\big] \ ;$$

si ha inoltre, come è facile convincersi,

$$x \in A \text{ e } \big[x \notin B \text{ o } x \notin C\big] \iff \big[x \in A \text{ e } x \notin B\big] \text{ o } \big[x \in A \text{ e } x \notin C\big] \ ,$$

pertanto è vera la (7).

Unione e intersezione di più insiemi.

L'unione e l'intersezione di più di due insiemi si definiscono in maniera perfettamente analoga al caso di due soli insiemi.

Così, ad esempio, dati tre insiemi A, B e C, l'unione $A \cup B \cup C$ è, per definizione, l'insieme costituito dagli elementi x che appartengono ad almeno uno dei tre insiemi A, B e C:

$$A \cup B \cup C \overset{\text{def.}}{=} \{x \,:\, x \in A \ \text{ o } \ x \in B \ \text{ o } \ x \in C\} \ ,$$

mentre l'intersezione $A \cap B \cap C$ è, per definizione, l'insieme costituito dagli elementi x che appartengono ad ognuno dei tre insiemi A, B e C:

$$A \cap B \cap C \overset{\text{def.}}{=} \{x \,:\, x \in A \ \text{ e } \ x \in B \ \text{ e } \ x \in C\} \ .$$

Se abbiamo cento insiemi non è più possibile indicarli con lettere diverse; si usa allora un'unica lettera con un indice numerico:

$$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{100} \ .$$

In questo caso, inoltre, per indicare l'unione e l'intersezione oltre alle notazioni "per esteso"

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_{100} \qquad \text{e} \qquad A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_{100}$$

si possono adoperare le notazioni "compatte"

$$\bigcup_{i=1}^{100} A_i \qquad \text{e} \qquad \bigcap_{i=1}^{100} A_i$$

(si legge "unione – ovvero intersezione – degli insiemi A_i per i che varia da 1 a 100") o, equivalentemente, le altre

$$\bigcup_{i \in \{1,2,\ldots,100\}} A_i \qquad \text{e} \qquad \bigcap_{i \in \{1,2,\ldots,100\}} A_i \ .$$

Scriviamo, per esercizio, il significato delle frasi

$$\text{“}x \in \bigcup_{i=1}^{100} A_i\text{”} \ , \quad \text{“}x \notin \bigcup_{i=1}^{100} A_i\text{”} \ , \quad \text{“}x \in \bigcap_{i=1}^{100} A_i\text{”} \ , \quad \text{“}x \notin \bigcap_{i=1}^{100} A_i\text{”}$$

usando i simboli logici $\forall$, $\exists$ ecc.:

$$x \in \bigcup_{i=1}^{100} A_i \iff \exists i^* \in \{1,2,\ldots,100\} \;:\; x \in A_{i^*} \quad ;$$
$$x \notin \bigcup_{i=1}^{100} A_i \iff x \notin A_i \quad \forall i \in \{1,2,\ldots,100\} \quad ;$$
$$x \in \bigcap_{i=1}^{100} A_i \iff x \in A_i \quad \forall i \in \{1,2,\ldots,100\} \quad ;$$
$$x \notin \bigcap_{i=1}^{100} A_i \iff \exists i^* \in \{1,2,\ldots,100\} \;:\; x \notin A_{i^*} \quad .$$

Famiglie di insiemi.

Nulla vieta di considerare insiemi i cui elementi siano, a loro volta, insiemi. Ad esempio

$$\mathcal{A} \;=\; \{\{1\},\,\{2\},\,\{1,2,3\}\}$$

è l'insieme che ha come elementi i due insiemi unitari $\{1\}$ e $\{2\}$ e l'insieme $\{1,2,3\}$.

Spesso, per evitare il bisticcio di parole, nel caso di insiemi i cui elementi sono insiemi si suole parlare di "famiglie" di insiemi anziché di insiemi di insiemi. È inoltre consuetudine indicare le famiglie di insiemi con le lettere maiuscole in carattere corsivo.

Data una famiglia non vuota di insiemi $\mathcal{F}$, possiamo considerare l'unione e l'intersezione di tutti gli insiemi A appartenenti a $\mathcal{F}$:

$$\bigcup_{A\in\mathcal{F}} A \overset{\text{def.}}{=} \{x \,:\, [\exists A \in \mathcal{F} \;:\; x \in A]\} \quad ,$$
$$\bigcap_{A\in\mathcal{F}} A \overset{\text{def.}}{=} \{x \,:\, x \in A \quad \forall A \in \mathcal{F}\} \quad .$$

Esplicitiamo, per esercizio, il significato delle due negazioni $x \notin \bigcup_{A\in\mathcal{F}} A$ e $x \notin \bigcap_{A\in\mathcal{F}} A$:

$$x \notin \bigcup_{A\in\mathcal{F}} A \iff x \notin A \;\; \forall A \in \mathcal{F} \qquad , \qquad x \notin \bigcap_{A\in\mathcal{F}} A \iff \exists A \in \mathcal{F} \;:\; x \notin A \quad .$$

Notiamo che in generale le due formule di De Morgan si enunciano nel modo seguente: *se $\mathcal{F}$ è una qualunque famiglia non vuota di insiemi e S è un qualunque insieme, si ha*:

$$(6') \quad S \setminus \bigcup_{A\in\mathcal{F}} A \;=\; \bigcap_{A\in\mathcal{F}} (S \setminus A) \quad , \quad (7') \quad S \setminus \bigcap_{A\in\mathcal{F}} A \;=\; \bigcup_{A\in\mathcal{F}} (S \setminus A) \quad .$$

Insieme delle parti.

Dato un insieme E, la famiglia di tutti i sottoinsiemi di E si chiama *insieme delle parti* di E e si indica con il simbolo $\mathcal{P}(E)$.

Ad esempio, se $E = \{1,2,3\}$, allora

$$\mathcal{P}(E) \;=\; \big\{\emptyset,\,\{1\},\,\{2\},\,\{3\},\,\{1,2\},\,\{1,3\},\,\{2,3\},\,\{1,2,3\}\big\} \quad .$$

È bene sottolineare il fatto che $1 \notin \mathcal{P}(E)$ (1 non è un elemento della famiglia $\mathcal{P}(E)$); quello che appartiene a $\mathcal{P}(E)$ è l'insieme unitario $\{1\}$: $\{1\} \in \mathcal{P}(E)$.