Corso di studio in Matematica
Programma di **Analisi matematica IV**
Anno accademico **2004-2005**
(Prof. Alfonso Villani)

1. L'insieme $\overline{\mathbb{R}}$. Ordinamento e aritmetica di $\overline{\mathbb{R}}$. Convergenza – nel senso dell'ordinamento – di successioni e serie in $\overline{\mathbb{R}}$. *La topologia di $\overline{\mathbb{R}}$. *Equivalenza tra convergenza nel senso dell'ordinamento e convergenza nel senso della topologia.

Capitolo 1: nn. 1.1 e 1.2*.

2. La misura secondo Peano-Jordan. Plurintervalli di $\mathbb{R}^h$. *Proprietà della famiglia dei plurintervalli di $\mathbb{R}^h$. *La misura elementare dei plurintervalli. *Proprietà della misura elementare. Insiemi limitati di $\mathbb{R}^h$ misurabili secondo Peano-Jordan. *Proprietà della famiglia degli insiemi limitati di $\mathbb{R}^h$ misurabili secondo Peano-Jordan. Insiemi di $\mathbb{R}^h$ misurabili secondo Peano-Jordan. *Proprietà della famiglia degli insiemi di $\mathbb{R}^h$ misurabili secondo Peano-Jordan e della misura secondo Peano-Jordan.

Capitolo 2: nn. 2.1*, 2.2*, 2.3* e 2.4*.

3. Successioni di insiemi. Successioni di insiemi: massimo e minimo limite, successioni convergenti, successioni monotone. Successioni di insiemi di uno spazio topologico invadenti il prorio limite. Distanza di due insiemi di uno spazio metrico. *Insiemi con distanza nulla. Continuità della funzione distanza da un insieme fissato. Ogni aperto di $\mathbb{R}^h$ è invaso da una successione di plurintervalli.

Capitolo 3: nn. 3.1, 3.2, 3.3 (Teorema 3.3.1*) e 3.4.

4. La misura di Lebesgue. La misura secondo Lebesgue degli insiemi aperti e limitati di $\mathbb{R}^h$. La misura secondo Lebesgue degli insiemi chiusi e limitati di $\mathbb{R}^h$. Insiemi limitati di $\mathbb{R}^h$ misurabili secondo Lebesgue. Proprietà della famiglia degli insiemi limitati di $\mathbb{R}^h$ misurabili secondo Lebesgue. Insiemi di $\mathbb{R}^h$ misurabili secondo Lebesgue. Proprietà della famiglia $\mathcal{L}_h$ degli insiemi di $\mathbb{R}^h$ misurabili secondo Lebesgue e della misura di Lebesgue m_h. Confronto tra la teoria della misura secondo Lebesgue e quella secondo Peano-Jordan. *Caratterizzazione della misurabilità secondo Peano-Jordan di un insieme mediante la misurabilità della sua frontiera.

Capitolo 4: nn. 4.1, 4.2, 4.3, 4.4 e 4.5*.

5. La teoria astratta della misura. σ-algebre e loro proprietà. Generatori di una σ-algebra. Traccia di una σ-algebra. Algebre, anelli. *Sistemi di Dynkin e loro generatori.

Contenuti (= funzioni di insieme finitamente additive) e premisure. Proprietà dei contenuti e delle premisure. Condizioni (necessarie e/o sufficienti) affinchè un contenuto sia una premisura. Misure. Misure esterne. Il teorema di Charathéodory sulle misure esterne. *Prolungamento di premisure. Un teorema di coincidenza di due misure. Premisure σ-finite. Unicità del prolungamento di una premisura σ-finita.

Capitolo 5: nn. 5.1, 5.2*, 5.3, e 5.4 (Teorema 5.4.2*).

6. Boreliani di uno spazio topologico. La σ-algebra degli insiemi di Borel di uno spazio topologico. *Boreliani di uno sottospazio. Generatori della σ-algebra $\mathcal{B}_h$ dei boreliani di $\mathbb{R}^h$. Boreliani di $\overline{\mathbb{R}}$.

Capitolo 6: nn. 6.1 (Proposizione 6.1.2*), 6.2 e 6.3 (Proposizione 6.3.2*).

7. Funzioni di distribuzione e misure di Borel. Funzioni di distribuzione e misure di Borel su $\mathbb{R}$. Esistenza ed unicità della misura di Borel μ_F associata ad un'arbitraria funzioni di distribuzione F. Studio dell'applicazione $F \to \mu_F$. Il caso delle funzioni di distribuzione continue. *Funzioni di distribuzione e misure di Borel su $\mathbb{R}^h$. Unicità della misura di Lebesgue su $\mathcal{B}_h$.

Capitolo 7: nn. 7.1 (Teorema 7.1.2*; omettere la Proposizione 7.1.2, le Osservazioni 7.1.3 e 7.1.4 e l'appendice al paragrafo) e 7.2 (solo le definizioni di funzione di distribuzione su $\mathbb{R}^h$ e di misura di Borel su $\mathbb{R}^h$, i Teoremi 7.2.1*, 7.2.2* e 7.2.4*, il Corollario 7.2.1, la Proposizione 7.2.2, il Teorema 7.2.5 e l'Osservazione 7.2.3).

8. Completamento di uno spazio di misura. Spazi misurabili. Spazi di misura. Spazi di misura completi. *Completamento di uno spazio di misura. $(\mathbb{R}^h, \mathcal{L}_h, \mathrm{m}_h)$ è il completamento di $(\mathbb{R}^h, \mathcal{B}_h, \lambda_h)$. Unicità della misura di Lebesgue su $\mathcal{L}_h$. La definizione assiomatica della misura di Lebesgue.

Capitolo 8: nn. 8.1, 8.2*, 8.3 e 8.4.

9. Funzioni misurabili. Funzioni misurabili. Criterio generale di misurabilità. Proprietà delle funzioni misurabili. Immagine di una misura mediante una funzione misurabile. Invarianza per traslazioni della misura di Lebesgue.

Capitolo 9: nn. 9.1, 9.2 e 9.3 (omettere l'Esempio 9.3.1, la Proposizione 9.3.1 ed il Corollario 9.3.1).

10. Insiemi non misurabili secondo Lebesgue. Ogni insieme $E \in \mathcal{L}_h$ di misura positiva contiene un insieme non misurabile secondo Lebesgue (esempio di Vitali). La misura identicamente nulla è l'unica misura su $\mathcal{P}(\mathbb{R}^h)$ invariante per traslazioni e finita sugli insiemi limitati. Esistenza di insiemi misurabili secondo Lebesgue che non sono boreliani.

Capitolo 10: nn. 10.1 e 10.3 (solo l'enunciato del Teorema 10.3.1).

11. Misure con segno. Misure con segno e loro prime proprietà. *Variazioni di una misure con segno. *Il teorema della partizione di Hahn. Il teorema di decomposizione di Jordan.

Capitolo 11: nn. 11.1, 11.2 (solo le Definizioni 11.2.1 e 11.2.2 e la Proposizione 11.2.1) e 11.3 (Teorema 11.3.1*, Proposizione 11.3.1*).

12. Funzioni numeriche misurabili. Funzioni numeriche misurabili. Funzioni reali misurabili. Indicatore di un insieme. Criteri di misurabilità delle funzioni numeriche. Operazioni con le funzioni numeriche misurabili.

Capitolo 12: nn. 12.1, 12.2 (Teorema 12.2.2*) e 12.3 (Teorema 12.3.1*).

13. Integrazione in uno spazio di misura. Funzioni elementari in uno spazio misurabile. Approssimazione di una funzione numerica misurabile e non negativa mediante funzioni elementari. L'integrale delle funzioni elementari. L'integrale delle delle funzioni misurabili e non negative. Proprietà dell'integrale. Il teorema di Beppo Levi. *La proprietà distributiva dell'integrale rispetto alla misura. Misure su $\mathcal{P}(M)$ (M insieme numerabile). Funzioni numeriche μ-quasi-integrabili e loro integrale. Funzioni μ-integrabili. Condizioni di μ-integrabilità. Proprietà dell'integrale. Esempi di integrazione. Proprietà verificate quasi-ovunque. Funzioni definite quasi-ovunque: misurabilità e [quasi]-integrabilità. *L'integrale esteso ad un sottoinsieme di Ω. L'integrale di Lebesgue.

Capitolo 13: nn. 13.1, 13.2, 13.3, 13.4 (solo l'Esempio 13.4.1), 13.5 (solo le Proposizioni 13.5.1*, 13.5.5* e 13.5.7*, il Corollario 13.5.2, il Teorema 13.5.2* e il Corollario 13.5.3), 13.6, 13.7 (omettere l'Esempio 13.7.2, il Teorema 13.7.3, l'Osservazione 13.7.2 e l'Esempio 13.7.4), 13.8, 13.9, 13.10* e 13.11.

14. Confronto tra l'integrale di Lebesgue e l'integrale di Riemann. Funzioni continue in un intervallo chiuso e limitato di $\mathbb{R}$. *Funzioni generalmente continue in un intervallo chiuso e limitato di $\mathbb{R}$. Funzioni continue in un intervallo chiuso non limitato. *Funzioni di più variabili.

Capitolo 14: nn. 14.1 (Proposizione 14.1.2*, Teorema 14.1.2*) e 14.2*

15. Gli spazi L^p. Funzioni numeriche μ-integrabili con l'esponente p. Disuguaglianze di Hölder e di Minkowski. Spazi semimetrici. Spazio metrico associato ad uno spazio semimetrico. Lo spazio semimetrico $\mathcal{L}^p(\mu)$, $0 < p < +\infty$.

Capitolo 15: nn. 15.1, 15.2 (omettere l'Osservazione 15.2.1, l'Esempio 15.2.1, la Proposizione 15.2.1, l'Osservazione 15.2.2 e l'Esempio 15.2.2), 15.3 e 15.4.

16. Vari modi di convergenza delle successioni di funzioni reali misurabili. Il lemma di Fatou ed alcune conseguenze. Convergenza quasi-ovunque, convergenza in media e passaggio al limite sotto il segno di integrale. *Il teorema della convergenza dominata. *Completezza degli spazi L^p. Relazioni tra convergenza in media e convergenza quasi-ovunque. La convergenza quasi-uniforme. *Condizione caratteristica per la convergenza quasi-uniforme. *Il teorema di Severini-Egorov. *La convergenza in misura. Riepilogo delle relazioni che intercedono fra i vari tipi di convergenza.

Capitolo 16: nn. 16.1 (fino a pag. 7, omettendo i Lemmi 16.1.2 e 16.1.3 e la dimostrazione della Proposizione 16.1.2), 16.2 (omettere la Proposizione 16.2.4), 16.3 (Teorema 16.3.1*; omettere l'Esempio 16.3.1 e l'Osservazione 16.3.1), 16.4 (solo gli enunciati dei Teoremi 16.4.1 e 16.4.2), 16.5 (omettere il Teorema 16.5.1), 16.7 (omettere le dimostrazioni dei Teoremi 16.7.1 e 16.7.2), 16.8 (Proposizione 16.8.1*; omettere l'Esempio 16.8.3, il Lemma 16.8.1 ed i Teoremi 16.8.1 e 16.8.2) e 16.9*.

Testo di riferimento:

A. Villani, *Appunti del corso di Istituzioni di Analisi superiore* (dispense).

(Le dimostrazioni relative agli argomenti contrassegnati con * possono essere omesse.)