

Corso di Analisi Matematica 2 per Fisici

(prof. Alfonso Villani)

Svolgimento di alcuni compiti d'esame

(ultimo aggiornamento: 21-7-2011)

Compito di Analisi Matematica II

assegnato il 7 febbraio 2007

1

La funzione f è definita in tutto \mathbb{R}^2 ed è di classe C^∞ (è un polinomio nelle due variabili x e y).

Si osserva subito che l'insieme E degli zeri della funzione f è l'unione dell'insieme dei punti della parabola $y = x^2$, di quello dei punti della parabola $y = 4x^2$ e di quello dei punti della retta $y = 1$. Inoltre, nell'insieme $\mathbb{R}^2 \setminus E$ il segno della funzione f coincide con quello della funzione $(y - x^2)(y - 4x^2)$, dunque f è positiva se $y < x^2$ oppure $y > 4x^2$ ed è negativa se $x^2 < y < 4x^2$. Dallo studio del segno della funzione segue subito che tutti i punti della retta $y = 1$, ad eccezione di quelli di ascissa $x = \pm 1$ e $x = \pm \frac{1}{2}$, sono di estremo relativo per f , precisamente:

- i punti $(x, 1)$, con $x \in]-\infty, -1[\cup]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\cup]1, +\infty[$ sono di minimo relativo, ma non di minimo relativo proprio;
- i punti $(x, 1)$, con $x \in]-1, -\frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}, 1[$ sono di massimo relativo, ma non di massimo relativo proprio.

L'esame del segno di f mostra inoltre che per ognuno dei tre domini limitati

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq 1\} \quad ,$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, -\sqrt{y} \leq x \leq -\frac{1}{2}\sqrt{y}\} \quad , \quad C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, \frac{1}{2}\sqrt{y} \leq x \leq \sqrt{y}\}$$

la corrispondente restrizione di f assume valore nullo sulla frontiera dell'insieme e valori di segno costante (positivo per A e negativo per B e C) all'interno dell'insieme. Ne segue che il massimo assoluto della restrizione $f|_A$ (che esiste per il teorema di Weierstrass) viene preso all'interno dell'insieme A , dunque nell'insieme $\overset{\circ}{A}$ vi è almeno un punto di massimo relativo per f . Per motivi analoghi vi è almeno un punto di minimo relativo per f in ciascuno degli insiemi $\overset{\circ}{B}$ e $\overset{\circ}{C}$.

Cerchiamo adesso i punti stazionari di f .

Si ha, in tutto \mathbb{R}^2 ,

$$f_x(x, y) = [-2x(y - 4x^2) - 8x(y - x^2)](y - 1)^2 = -2x(5y - 8x^2)(y - 1)^2 \quad ,$$

$$f_y(x, y) = (y - 4x^2)(y - 1)^2 + (y - x^2)(y - 1)^2 + 2(y - x^2)(y - 4x^2)(y - 1) =$$

$$= (y - 1) [(y - 4x^2 + y - x^2)(y - 1) + 2(y - x^2)(y - 4x^2)] =$$

$$= (y - 1) [(2y - 5x^2)(y - 1) + 2(y - x^2)(y - 4x^2)] \quad .$$

Pertanto le soluzioni del sistema $\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases}$ sono i punti $(x, 1)$, $x \in \mathbb{R}$ (già esaminati) e le soluzioni del sistema

$$(*) \quad \begin{cases} -2x(5y - 8x^2) = 0 \\ (2y - 5x^2)(y - 1) + 2(y - x^2)(y - 4x^2) = 0 \end{cases} \quad .$$

Risolviamo il sistema (*). Si ha:

$$\begin{aligned}
 (*) \iff & \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ 2y(y-1) + 2y^2 = 0 \end{array} \right. \cup \left\{ \begin{array}{l} x^2 = \frac{5}{8}y \\ (2 - \frac{25}{8})y(y-1) + 2(1 - \frac{5}{8})(1 - \frac{5}{2})y^2 = 0 \end{array} \right. \iff \\
 & \iff \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y(2y-1) = 0 \end{array} \right. \cup \left\{ \begin{array}{l} x^2 = \frac{5}{8}y \\ y(2y-1) = 0 \end{array} \right. ,
 \end{aligned}$$

dunque le soluzioni di (*) sono: $(0, 0)$, $(0, \frac{1}{2})$ e $(\pm\frac{\sqrt{5}}{4}, \frac{1}{2})$. Il punto $(0, 0)$ è uno zero di f e l'esame del segno della funzione mostra subito che esso non è un punto di estremo relativo. Invece i punti $(0, \frac{1}{2})$, $(-\frac{\sqrt{5}}{4}, \frac{1}{2})$ e $(\frac{\sqrt{5}}{4}, \frac{1}{2})$ appartengono, rispettivamente, agli insiemi $\overset{\circ}{A}$, $\overset{\circ}{B}$ e $\overset{\circ}{C}$ e sono gli unici punti stazionari in tali insiemi. In base alle considerazioni svolte in precedenza possiamo allora concludere che $(0, \frac{1}{2})$ è un punto di massimo relativo proprio per la funzione f (dato che in tutto $A \setminus \{(0, \frac{1}{2})\}$ è verificata la disuguaglianza $f(x, y) < f(0, \frac{1}{2})$), mentre, per motivi analoghi, i punti $(\pm\frac{\sqrt{5}}{4}, \frac{1}{2})$ sono di minimo relativo proprio per f .

2

La funzione di due variabili

$$f(x, y) = e^{x+y-1} - \log x + y - 1$$

è definita e continua nell'aperto $A =]0, +\infty[\times \mathbb{R}$ ed è ivi dotata di derivate parziali prime continue:

$$f_x(x, y) = e^{x+y-1} - \frac{1}{x} \quad , \quad f_y(x, y) = e^{x+y-1} + 1 \quad .$$

Per dimostrare l'esistenza e l'unicità della funzione implicita φ basta osservare che si ha:

$$f_y(x, y) > 0 \quad \forall (x, y) \in A$$

e inoltre, per ogni $x \in]0, +\infty[$,

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} f(x, y) = -\infty \quad , \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} f(x, y) = +\infty \quad ;$$

infatti ciò comporta che, per ogni $x \in]0, +\infty[$, la funzione (della sola variabile y) $y \rightarrow f(x, y)$ (che è definita e continua in \mathbb{R} , dato che f è definita e continua in A) è crescente in \mathbb{R} ed ha come codominio tutto \mathbb{R} , dunque esiste uno ed un solo numero reale $\varphi(x)$ tale che

$$f(x, \varphi(x)) = 0 \quad .$$

a) Per provare che la funzione $\varphi :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, così ottenuta, è derivabile in $]0, +\infty[$, osserviamo che in ogni punto $(x_0, y_0) = (x_0, \varphi(x_0))$ del grafico di φ sono verificate, per la funzione f , le ipotesi del teorema del Dini e - dato che esiste la derivata $f_x(x_0, \varphi(x_0))$ - anche quelle del teorema di derivazione della funzione implicita; pertanto φ è derivabile in $]0, +\infty[$ e si ha, per ogni $x \in]0, +\infty[$,

$$\varphi'(x) = - \frac{f_x(x, \varphi(x))}{f_y(x, \varphi(x))} = - \frac{e^{x+\varphi(x)-1} - \frac{1}{x}}{e^{x+\varphi(x)-1} + 1} =$$

(sommando e sottraendo 1 al numeratore)

$$= -1 + \frac{1 + \frac{1}{x}}{e^{x+\varphi(x)-1} + 1} > -1 \quad .$$

b) Osserviamo che, per $x = 1$, si ha $f(1, y) = e^y + y - 1 \forall y \in \mathbb{R}$ e che l'equazione $e^y + y - 1 = 0$ ammette la soluzione $y = 0$; ciò prova che è $\varphi(1) = 0$. Di conseguenza si ha pure

$$\varphi'(1) = \left[-1 + \frac{1 + \frac{1}{x}}{e^{x+\varphi(x)-1} + 1} \right]_{x=1} = 0 .$$

c) Si ha

$$\varphi''(x) = D \left[-1 + \frac{1 + \frac{1}{x}}{e^{x+\varphi(x)-1} + 1} \right] = \frac{-\frac{1}{x^2} e^{x+\varphi(x)-1} - \left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{x+\varphi(x)-1} (1 + \varphi'(x))}{(e^{x+\varphi(x)-1} + 1)^2}$$

$$\forall x \in]0, +\infty[$$

e pertanto, dato che $1 + \varphi(x) > 0 \forall x \in]0, +\infty[$ (punto a)), risulta $\varphi''(x) < 0 \forall x \in]0, +\infty[$, dunque φ è strettamente concava in $]0, +\infty[$.

d) Da c) segue che la derivata φ' è decrescente in $]0, +\infty[$; pertanto, essendo $\varphi'(1) = 0$, risulta $\varphi'(x) > 0 \forall x \in]0, 1[$ e $\varphi'(x) < 0 \forall x \in]1, +\infty[$, dunque φ è crescente in $]0, 1[$ e decrescente in $]1, +\infty[$.

e) Dall'identità

$$(*) \quad e^{x+\varphi(x)-1} - \log x + \varphi(x) - 1 = 0 \quad \forall x \in]0, +\infty[$$

si ricava la disuguaglianza

$$\varphi(x) < \log x + 1 \quad \forall x \in]0, +\infty[$$

e da questa, per il teorema del confronto, segue che $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = -\infty$.

Per quanto riguarda il limite per $x \rightarrow +\infty$ osserviamo che il limite esiste sicuramente, ed è uguale a $\ell \in \mathbb{R}$ oppure a $-\infty$, in quanto la funzione φ è decrescente in $]1, +\infty[$; d'altra parte, il sussistere della (*) comporta che il limite non può essere uguale ad un numero ℓ perchè, se così fosse, le due funzioni e^x e $e^{x+\varphi(x)-1}$ sarebbero infiniti dello stesso ordine al tendere di x a $+\infty$ e, per la (*), la stessa cosa potrebbe dirsi delle funzioni $e^{x+\varphi(x)-1}$ e $\log x$, dunque si perverebbe alla conclusione assurda che le funzioni e^x e $\log x$ sono infiniti dello stesso ordine al tendere di x a $+\infty$ (in maniera più concisa: se si suppone che $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \ell \in \mathbb{R}$, allora, dalla (*), dividendo per $\log x$, si ottiene la contraddizione

$$0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x+\varphi(x)-1} - \log x + \varphi(x) - 1}{\log x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{e^x}{\log x} e^{\varphi(x)-1} - 1 + \frac{\varphi(x) - 1}{\log x} \right] = +\infty ,$$

dal momento che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\varphi(x)-1} = e^{\ell-1} \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(x) - 1}{\log x} = 0) .$$

Rimane così provato che $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = -\infty$.

f) Poiché $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = -\infty$, dalla (*) si ricava che

$$(**) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x+\varphi(x)-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\log x - \varphi(x) + 1] = +\infty$$

e, conseguentemente,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-1 + \frac{1 + \frac{1}{x}}{e^{x+\varphi(x)-1} + 1} \right] = -1 ,$$

quindi un eventuale asintoto per $x \rightarrow +\infty$ ha coefficiente angolare $m = -1$. D'altra parte, per la (**), si ha pure

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [x + \varphi(x) - 1] = +\infty$$

e quindi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [\varphi(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\varphi(x) + x] = +\infty ,$$

dunque il grafico di φ non ha asintoto per $x \rightarrow +\infty$.

Compito di **Analisi Matematica II**

assegnato il 7 marzo 2007

1

a) La funzione f è definita e continua in tutto \mathbb{R}^2 .

Scriviamo la legge di f liberandola dal valore assoluto. Si ha:

$$f(x, y) = \begin{cases} x \operatorname{arctg}(y - x^2) & \text{se } (x, y) \in A, \\ -x \operatorname{arctg}(y - x^2) & \text{se } (x, y) \in B, \\ 0 & \text{se } (x, y) \in C, \end{cases}$$

dove A e B sono i seguenti insiemi aperti:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > x^2\} \quad , \quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < x^2\}$$

e C è l'insieme dei punti della parabola $y = x^2$.

La funzione f è pertanto dotata di entrambe le derivate parziali f_x e f_y in ogni punto dell'insieme $A \cup B$ e risulta:

$$f_x(x, y) = \operatorname{arctg}(y - x^2) - \frac{2x^2}{1 + (y - x^2)^2} \quad , \quad f_y(x, y) = \frac{x}{1 + (y - x^2)^2}$$

$$\forall (x, y) \in A \quad ,$$

$$f_x(x, y) = - \left[\operatorname{arctg}(y - x^2) - \frac{2x^2}{1 + (y - x^2)^2} \right] \quad , \quad f_y(x, y) = - \frac{x}{1 + (y - x^2)^2}$$

$$\forall (x, y) \in B \quad .$$

Studiamo l'esistenza delle derivate parziali nei punti $(x_0, y_0) \in C$. Poiché f è continua, possiamo cercare di utilizzare il corollario del primo teorema di L'Hospital riguardante il limite del rapporto incrementale. Per quanto riguarda la f_x troviamo che:

- se $x_0 < 0$ i limiti laterali

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f_x(x, y_0) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f_x(x, y_0)$$

sono rispettivamente uguali (per il teorema sul limite della restrizione) ai limiti

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f_x|_B(x, y) = 2x_0^2 \quad , \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f_x|_A(x, y) = -2x_0^2 \quad ,$$

pertanto (per il corollario del teorema di L'Hospital) si ha pure

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} = 2x_0^2 \quad , \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} = -2x_0^2 \quad ;$$

conseguentemente, dato che i limiti laterali del rapporto incrementale sono diversi, la derivata $f_x(x_0, y_0)$ non esiste;

- se $x_0 > 0$ si ha una situazione analoga alla precedente:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f_x(x, y_0) = \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f_x|_A(x, y) = -2x_0^2 \quad ,$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f_x(x, y_0) = \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f_x|_B(x, y) = 2x_0^2 \quad ,$$

quindi la derivata $f_x(x_0, y_0)$ non esiste;

- se $x_0 = 0$, allora

$$\lim_{x \rightarrow 0} f_x(x, 0) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_x|_B(x, y) = 0 \quad ,$$

pertanto la derivata $f_x(0, 0)$ esiste ed è uguale a zero.

Per quanto riguarda la f_y si ha:

$$\lim_{y \rightarrow y_0^-} f_y(x_0, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f_y|_B(x, y) = -x_0 \quad ,$$

$$\lim_{y \rightarrow y_0^+} f_y(x_0, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f_y|_A(x, y) = x_0 \quad ,$$

pertanto l'unico punto di C nel quale esiste la derivata f_y è il punto $(0, 0)$, per il quale si ha $f_y(0, 0) = 0$.

b) La risposta è immediata per tutti i punti di $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$; infatti le derivate f_x e f_y sono continue nell'aperto $A \cup B$, quindi f è differenziabile in tutti i punti di $A \cup B$ per il teorema del differenziale totale; invece nei punti di $C \setminus \{(0, 0)\}$ non è soddisfatta una delle condizioni necessarie per la differenziabilità (l'esistenza delle derivate parziali), quindi f non è differenziabile in tali punti.

Per il punto $(0, 0)$ ricorriamo alla definizione; si ha

$$\begin{aligned} & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - f_x(0, 0)(x - 0) - f_y(0, 0)(y - 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \\ & = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x \operatorname{arctg} |y - x^2|}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \operatorname{arctg} |y - x^2| = 0 \end{aligned}$$

(prodotto di una funzione limitata per una infinitesima), quindi f è differenziabile nel punto $(0, 0)$.

c) Osserviamo subito che, nella ricerca dei punti di estremo relativo, tutti i punti dell'insieme C sono punti "indiziati": il punto $(0, 0)$ in quanto si tratta di un punto stazionario ($f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$) e i punti $(x_0, y_0) \in C \setminus \{(0, 0)\}$ poiché in tali punti la funzione non è dotata di derivate parziali. Naturalmente, oltre ai punti dell'insieme C , occorre prendere in considerazione anche gli eventuali punti stazionari appartenenti all'insieme $A \cup B$. Ma, se $(x, y) \in A \cup B$, si ha

$$\begin{aligned} \begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases} & \iff \begin{cases} \operatorname{arctg}(y - x^2) - \frac{2x^2}{1 + (y - x^2)^2} = 0 \\ \frac{x}{1 + (y - x^2)^2} = 0 \end{cases} \iff \\ & \iff \begin{cases} \operatorname{arctg} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \iff (x, y) = (0, 0) \quad , \end{aligned}$$

quindi, dato che $(0, 0) \notin A \cup B$, nell'insieme $A \cup B$ non vi sono punti stazionari.

Per decidere sulla natura dei punti dell'insieme C osserviamo che tali punti appartengono tutti all'insieme E degli zeri della funzione f (infatti l'insieme E è uguale a $C \cup \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\}$) e che nell'insieme $\mathbb{R}^2 \setminus E$ il segno di f coincide con il segno della funzione x . Ne segue che i punti $(x_0, y_0) \in C$ con $x_0 < 0$ sono di massimo relativo per la funzione f , i punti $(x_0, y_0) \in C$ con $x_0 > 0$ sono di minimo relativo, mentre $(0, 0)$ non è un punto di estremo relativo. Possiamo inoltre precisare che i punti di massimo relativo trovati non sono di massimo relativo proprio, poiché in ogni intorno di ciascuno di tali punti vi sono sempre altri punti nei quali la funzione f assume lo stesso valore (zero); analogamente, i punti di minimo relativo trovati non sono di minimo relativo proprio.

2

L'insieme di definizione della forma differenziale

$$(1) \quad X(x, y) dx + Y(x, y) dy = \left[e^x \log(y - e^x) - \frac{e^{2x}}{y - e^x} \right] dx + \frac{e^x + k}{y - e^x} dy$$

è l'aperto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > e^x\}$ (indipendente dal parametro k). L'insieme A è un insieme convesso (ciò è ovvio dal punto di vista grafico, ma si può provare facilmente anche in maniera analitica usando il fatto che e^x è una funzione convessa) e la forma differenziale (1) è di classe C^1 in A . Pertanto, per il secondo criterio di integrabilità, i valori di k per i quali la forma differenziale (1) è esatta sono quelli per i quali la (1) è chiusa.

Calcoliamo le derivate X_y e Y_x . Si ha, in ogni punto dell'insieme A ,

$$X_y(x, y) = \frac{e^x}{y - e^x} + \frac{e^{2x}}{(y - e^x)^2} = \frac{e^x(y - e^x) + e^{2x}}{(y - e^x)^2} = \frac{e^x y}{(y - e^x)^2},$$

$$Y_x(x, y) = \frac{e^x(y - e^x) + (e^x + k)e^x}{(y - e^x)^2} = \frac{e^x y + k e^x}{(y - e^x)^2},$$

pertanto la (1) è esatta per $k = 0$.

Supponiamo d'ora in poi che sia $k = 0$.

Per il primo criterio di integrabilità l'integrale curvilineo

$$\int_{\Pi} X(x, y) dx + Y(x, y) dy$$

è uguale ad un qualunque integrale del tipo

$$\int_{\Gamma} X(x, y) dx + Y(x, y) dy,$$

dove Γ è una curva generalmente regolare di estremi p e r con sostegno contenuto in A . Prendiamo come Γ la poligonale Π^* di vertici $p = (-1, 2e^{-1})$, $q^* = (-1, 2e)$ e $r = (1, 2e)$, la quale presenta il vantaggio, rispetto alla Π , di avere i lati paralleli agli assi coordinati (osserviamo che sarebbe invece sbagliato considerare l'altra poligonale bilaterale con i lati paralleli agli assi, cioè la poligonale Π^{**} di vertici $p = (-1, 2e^{-1})$, $q^{**} = (1, 2e^{-1})$ e $r = (1, 2e)$, poiché il sostegno di Π^{**} non è contenuto nell'insieme A). Abbiamo:

$$(2) \quad \int_{\Pi} X(x, y) dx + Y(x, y) dy = \int_{\Pi^*} X(x, y) dx + Y(x, y) dy =$$

$$= \int_{2e^{-1}}^{2e} Y(-1, t) dt + \int_{-1}^1 X(t, 2e) dt =$$

$$= \int_{2e^{-1}}^{2e} \frac{e^{-1}}{t - e^{-1}} dt + \int_{-1}^1 \left[e^t \log(2e - e^t) - \frac{e^{2t}}{2e - e^t} \right] dt.$$

Calcoliamo a parte gli integrali indefiniti:

$$\int \frac{e^{-1}}{t - e^{-1}} dt = e^{-1} \log |t - e^{-1}| + c;$$

$$\int e^t \log(2e - e^t) dt = - \left[\int \log z dz \right]_{z=2e-e^t} = - [z \log z - z + c]_{z=2e-e^t} =$$

$$= -(2e - e^t) \log(2e - e^t) + (2e - e^t) + c_1 = -(2e - e^t) \log(2e - e^t) - e^t + c_2 ,$$

$$\begin{aligned} \int \frac{e^{2t}}{2e - e^t} dt &= \int e^t \frac{e^t}{2e - e^t} dt = \int e^t \frac{e^t - 2e + 2e}{2e - e^t} dt = \\ &= - \int e^t dt - 2e \int \frac{-e^t}{2e - e^t} dt = -e^t - 2e \log(2e - e^t) + c , \end{aligned}$$

pertanto

$$\int \left[e^t \log(2e - e^t) - \frac{e^{2t}}{2e - e^t} \right] dt = e^t \log(2e - e^t) + c_3 .$$

Tenuto conto di questi risultati, dalla (2) ricaviamo:

$$\begin{aligned} \int_{\Pi} X(x, y) dx + Y(x, y) dy &= e^{-1} \left[\log |t - e^{-1}| \right]_{2e^{-1}}^{2e} + \left[e^t \log(2e - e^t) \right]_{-1}^1 = \\ &= e^{-1} \log \frac{2e - e^{-1}}{2e^{-1} - e^{-1}} + e \log(2e - e) - e^{-1} \log(2e - e^{-1}) = \\ &= e^{-1} \log(2e^2 - 1) + e - e^{-1} \log \frac{2e^2 - 1}{e} = e^{-1} \log e + e = e^{-1} + e . \end{aligned}$$

Osserviamo che si perviene ancora più rapidamente al risultato prendendo come curva Γ il grafico G della restrizione della funzione $2e^x$ all'intervallo $[-1, 1]$, orientato nel verso delle ascisse crescenti (la scelta $\Gamma = G$ è lecita poiché G ha come punti estremi i punti p e r e il sostegno di G è contenuto in A). Si ha infatti:

$$\begin{aligned} \int_G X(x, y) dx + Y(x, y) dy &= \int_{-1}^1 [X(x, 2e^x) + Y(x, 2e^x) 2e^x] dx = \\ &= \int_{-1}^1 \left[e^x \log e^x - \frac{e^{2x}}{e^x} + \frac{e^x}{e^x} 2e^x \right] dx = \int_{-1}^1 [x e^x + e^x] dx = \end{aligned}$$

(integrando per parti il primo addendo)

$$= \left[x e^x \right]_{-1}^1 + \int_{-1}^1 [-e^x + e^x] dx = e + e^{-1} .$$

Infine, un altro metodo di calcolo dell'integrale curvilineo è quello basato sulla ricerca "diretta" (quindi senza calcolare integrali curvilinei) di una primitiva $F(x, y)$ della forma differenziale (1); una volta trovata la F , per il primo criterio di integrabilità delle forme differenziali si ha subito

$$\int_{\Pi} X(x, y) dx + Y(x, y) dy = F(r) - F(p) .$$

La ricerca "diretta" delle primitive di una forma differenziale $X dx + Y dy$ consiste nel cercare dapprima le primitive di uno dei due coefficienti della forma differenziale rispetto alla variabile di pertinenza (cioè la variabile x per la funzione X e la variabile y per la funzione Y) e successivamente imporre che le funzioni così ottenute siano primitive anche dell'altro coefficiente rispetto all'altra variabile.

Nel nostro caso risulta più facile integrare dapprima rispetto alla variabile y .

Dato che, per ogni $x \in \mathbb{R}$, l'integrale indefinito (nell'intervallo $]e^x, +\infty[$)

$$\int Y(x, y) dy = \int \frac{e^x}{y - e^x} dy$$

è costituito dalle funzioni $e^x \log(y - e^x) + c$ ($c \in \mathbb{R}$), le primitive $F(x, y)$ della forma differenziale (1) vanno cercate tra le funzioni del tipo

$$(3) \quad F(x, y) = e^x \log(y - e^x) + c(x) ,$$

con $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funzione della sola x , derivabile in \mathbb{R} . Imponendo alle funzioni (3) di soddisfare, nell'insieme A , la condizione $F_x = X$ si ottiene

$$e^x \log(y - e^x) - \frac{e^{2x}}{y - e^x} + c'(x) = e^x \log(y - e^x) - \frac{e^{2x}}{y - e^x} ,$$

cioè $c'(x) = 0 \forall x \in \mathbb{R}$, ovvero $c =$ costante, dunque le primitive di (3) sono le funzioni del tipo

$$F(x, y) = e^x \log(y - e^x) + c ,$$

con $c \in \mathbb{R}$, e pertanto

$$\begin{aligned} \int_{\Pi} X(x, y) dx + Y(x, y) dy &= F(1, 2e) - F(-1, 2e^{-1}) = \\ &= e \log(2e - e) - e^{-1} \log(2e^{-1} - e^{-1}) = e + e^{-1} . \end{aligned}$$

3

a) Cerchiamo di riscrivere le disuguaglianze che definiscono l'insieme T in modo da evidenziare chiaramente il fatto che T è un insieme normale (l'ultima catena di disuguaglianze $x^2 + \sqrt{z} \leq y \leq 5$ suggerisce che T è un insieme normale rispetto al piano xz , ma non è chiaro qual è l'insieme "base"):

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ z \geq 1 \\ x^2 + \sqrt{z} \leq y \leq 5 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq 0 \\ z \geq 1 \\ x^2 + \sqrt{z} \leq 5 \\ x^2 + \sqrt{z} \leq y \leq 5 \end{cases} \iff$$

(dalla seconda e dalla terza disuguaglianza segue che è $x^2 + 1 \leq x^2 + \sqrt{z} \leq 5$ e quindi $x^2 \leq 4$)

$$\iff \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 \leq 4 \\ z \geq 1 \\ \sqrt{z} \leq 5 - x^2 \\ x^2 + \sqrt{z} \leq y \leq 5 \end{cases} \iff \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 1 \leq z \leq (5 - x^2)^2 \\ x^2 + \sqrt{z} \leq y \leq 5 \end{cases} ,$$

pertanto T è un un insieme normale del tipo

$$\begin{cases} (x, z) \in D \\ \alpha(x, z) \leq y \leq \beta(x, z) \end{cases}$$

($D = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 2], 1 \leq z \leq (5 - x^2)^2\}$; $\alpha(x, z) = x^2 + \sqrt{z}$, $\beta(x, z) = 5$).

Osserviamo che l'insieme "base" D è, a sua volta, un insieme normale rispetto all'asse x e, dato che le funzioni 1 e $(5 - x^2)^2$ sono continue in $[0, 2]$, verificano la disuguaglianza $1 \leq (5 - x^2)^2 \forall x \in [0, 2]$, mentre l'uguaglianza $1 = (5 - x^2)^2$ si ha solo per $x = 2$, possiamo affermare che D è un dominio limitato di \mathbb{R}^2 , misurabile secondo Peano-Jordan. Per lo stesso motivo, dato che le funzioni $x^2 + \sqrt{z}$ e 5 sono continue in D , verificano la disuguaglianza $x^2 + \sqrt{z} \leq 5 \forall (x, y) \in D$ (dal momento che è $z \leq (5 - x^2)^2 \forall (x, y) \in D$), mentre l'uguaglianza $x^2 + \sqrt{z} = 5$ si ha solo in un sottoinsieme di ∂D (l'insieme dei punti di D che appartengono al grafico della funzione $z = (5 - x^2)^2$), possiamo concludere che l'insieme T è un dominio limitato di \mathbb{R}^3 , misurabile secondo Peano-Jordan.

b) Applicando la formula di riduzione degli integrali multipli nel caso dei domini normali prima a T e poi a D , otteniamo:

$$\begin{aligned} \iiint_T \frac{x}{\sqrt{z}} dx dy dz &= \iint_D \frac{x}{\sqrt{z}} dx dz \int_{x^2 + \sqrt{z}}^5 dy = \iint_D \frac{x}{\sqrt{z}} (5 - x^2 - \sqrt{z}) dx dz = \\ &= \int_0^2 x dx \int_1^{(5-x^2)^2} \frac{1}{\sqrt{z}} (5 - x^2 - \sqrt{z}) dz = \end{aligned}$$

(facendo figurare la derivata $\frac{d}{dz} (5 - x^2 - \sqrt{z}) = -\frac{1}{2\sqrt{z}}$)

$$\begin{aligned} &= -2 \int_0^2 x \left[\frac{(5 - x^2 - \sqrt{z})^2}{2} \right]_1^{(5-x^2)^2} dx = \int_0^2 x(5 - x^2 - 1)^2 dx = \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^2 (-2x)(4 - x^2)^2 dx = -\frac{1}{2} \left[\frac{(4 - x^2)^3}{3} \right]_0^2 = -\frac{1}{2} \left[\frac{-64}{3} \right] = \frac{32}{3} . \end{aligned}$$

4

a) L'equazione differenziale assegnata

$$(E) \quad y'' + 4y' + 5y = e^{-2x} \frac{\text{sen } x}{1 + \cos x}$$

è un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti il cui termine noto

$$f(x) = e^{-2x} \frac{\text{sen } x}{1 + \cos x}$$

è una funzione definita e continua nell'insieme

$$A = \mathbb{R} \setminus \{\pi + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}}](2n - 1)\pi, 2n - 1)\pi[.$$

Dalla teoria delle equazioni differenziali lineari è noto che il problema di Cauchy (*) ha una ed una sola soluzione (massimale) φ definita nel massimo intervallo I , sottoinsieme dell'insieme A , che contiene il punto x_0 nel quale sono prescritte le condizioni iniziali

$$(C) \quad y(0) = y'(0) = 0 ,$$

cioè il punto $x_0 = 0$; possiamo pertanto affermare che φ è definita in $] - \pi, \pi[$.

Il fatto che φ sia soluzione del problema di Cauchy (*) significa che è

$$(1) \quad \varphi''(x) + 4\varphi'(x) + 5\varphi(x) = e^{-2x} \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x} \quad \forall x \in] - \pi, \pi[$$

e inoltre

$$(2) \quad \varphi(0) = \varphi'(0) = 0 \quad .$$

Ponendo $x = 0$ nella (1) e tenendo presenti le (2) si ottiene che è pure $\varphi''(0) = 0$.

Dalla (1) segue inoltre che nell'intervallo $] - \pi, \pi[$ esiste anche la derivata terza φ''' e si ha

$$\begin{aligned} \varphi'''(x) + 4\varphi''(x) + 5\varphi'(x) &= f'(x) = \\ &= -2e^{-2x} \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x} + e^{-2x} \frac{\cos x(1 + \cos x) + \operatorname{sen}^2 x}{(1 + \cos x)^2} = \\ &= -2e^{-2x} \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x} + \frac{e^{-2x}}{1 + \cos x} \quad \forall x \in] - \pi, \pi[, \end{aligned}$$

da cui, per $x = 0$, si ottiene

$$\varphi'''(0) = \frac{e^0}{2} = \frac{1}{2} \quad .$$

In definitiva, essendo

$$\varphi'(0) = \varphi''(0) = 0 \quad , \quad \varphi'''(0) > 0 \quad ,$$

per un teorema di Analisi I possiamo concludere che la funzione φ è crescente nel punto $x_0 = 0$.

b) Risolvendo l'equazione caratteristica della (E), cioè $\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$, si trovano le radici complesse coniugate $-2 \pm i$, pertanto l'integrale generale dell'equazione omogenea associata alla (E) è

$$c_1 e^{-2x} \cos x + c_2 e^{-2x} \operatorname{sen} x \quad .$$

Poiché il termine noto

$$f(x) = e^{-2x} \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x}$$

dell'equazione completa (E) non è esprimibile come combinazione lineare di funzioni del tipo $P(x)e^{\alpha x} \cos \beta x$ ovvero $P(x)e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x$ (con P polinomio in x), non possiamo effettuare la ricerca "rapida" di un integrale particolare della (E), ma dobbiamo ricorrere al metodo della variazione delle costanti. La relativa teoria assicura che un integrale particolare \bar{y} dell'equazione differenziale (E) è dato da

$$\bar{y}(x) = \gamma_1(x)e^{-2x} \cos x + \gamma_2(x)e^{-2x} \operatorname{sen} x \quad ,$$

dove γ_1 e γ_2 sono due qualsiasi funzioni derivabili nell'intervallo $] - \pi, \pi[$, le cui derivate soddisfano, in tale intervallo, il sistema

$$(3) \quad \begin{cases} \gamma_1'(x)e^{-2x} \cos x + \gamma_2'(x)e^{-2x} \operatorname{sen} x = 0 \\ \gamma_1'(x)[-2e^{-2x} \cos x - e^{-2x} \operatorname{sen} x] + \gamma_2'(x)[-2e^{-2x} \operatorname{sen} x + e^{-2x} \cos x] = f(x) \end{cases} .$$

Risolviamo il sistema (3). Il determinante della matrice incompleta, cioè il wronskiano $W(x)$ delle due soluzioni $e^{-2x} \cos x$ e $e^{-2x} \operatorname{sen} x$ dell'omogenea associata, è dato da

$$\begin{aligned}
W(x) &= \begin{vmatrix} e^{-2x} \cos x & e^{-2x} \operatorname{sen} x \\ -2e^{-2x} \cos x - e^{-2x} \operatorname{sen} x & -2e^{-2x} \operatorname{sen} x + e^{-2x} \cos x \end{vmatrix} = \\
&= \begin{vmatrix} e^{-2x} \cos x & e^{-2x} \operatorname{sen} x \\ -2e^{-2x} \cos x & -2e^{-2x} \operatorname{sen} x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e^{-2x} \cos x & e^{-2x} \operatorname{sen} x \\ -e^{-2x} \operatorname{sen} x & e^{-2x} \cos x \end{vmatrix} =
\end{aligned}$$

(dato che nel primo determinante le righe sono proporzionali)

$$= \begin{vmatrix} e^{-2x} \cos x & e^{-2x} \operatorname{sen} x \\ -e^{-2x} \operatorname{sen} x & e^{-2x} \cos x \end{vmatrix} = e^{-2x} e^{-2x} \begin{vmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ -\operatorname{sen} x & \cos x \end{vmatrix} = e^{-4x} ,$$

pertanto la soluzione $(\gamma_1'(x), \gamma_2'(x))$ del sistema (3) è data da

$$\begin{aligned}
\gamma_1'(x) &= \frac{1}{e^{-4x}} \begin{vmatrix} 0 & e^{-2x} \operatorname{sen} x \\ e^{-2x} \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x} & -2e^{-2x} \operatorname{sen} x + e^{-2x} \cos x \end{vmatrix} = \\
&= \frac{1}{e^{-4x}} \left[-e^{-4x} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1 + \cos x} \right] = -\frac{\operatorname{sen}^2 x}{1 + \cos x} = -\frac{1 - \cos^2 x}{1 + \cos x} = \cos x - 1 ,
\end{aligned}$$

$$\gamma_2'(x) = \frac{1}{e^{-4x}} \begin{vmatrix} e^{-2x} \cos x & 0 \\ -2e^{-2x} \cos x - e^{-2x} \operatorname{sen} x & e^{-2x} \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x} \end{vmatrix} = \frac{\cos x \operatorname{sen} x}{1 + \cos x} .$$

Per trovare $\gamma_1(x)$ e $\gamma_2(x)$ calcoliamo gli integrali indefiniti:

$$\begin{aligned}
\int (\cos x - 1) dx &= \operatorname{sen} x - x + c , \\
\int \frac{\cos x \operatorname{sen} x}{1 + \cos x} dx &= - \int \frac{\cos x}{1 + \cos x} d \cos x = \\
&= - \int \frac{1 + \cos x - 1}{1 + \cos x} d \cos x = - \cos x + \log(1 + \cos x) + c .
\end{aligned}$$

Pertanto l'integrale generale della (E) è

$$(4) \quad y(x) = c_1 e^{-2x} \cos x + c_2 e^{-2x} \operatorname{sen} x + \\ + (\operatorname{sen} x - x) e^{-2x} \cos x + (-\cos x + \log(1 + \cos x)) e^{-2x} \operatorname{sen} x .$$

Calcoliamo anche la derivata della funzione (4):

$$y'(x) = c_1 [-2e^{-2x} \cos x - e^{-2x} \operatorname{sen} x] + c_2 [-2e^{-2x} \operatorname{sen} x + e^{-2x} \cos x] + \\ + (\cos x - 1) e^{-2x} \cos x + (\operatorname{sen} x - x) [-2e^{-2x} \cos x - e^{-2x} \operatorname{sen} x] + \\ + \frac{\cos x \operatorname{sen} x}{1 + \cos x} e^{-2x} \operatorname{sen} x + (-\cos x + \log(1 + \cos x)) [-2e^{-2x} \operatorname{sen} x + e^{-2x} \cos x] .$$

Imponendo che la funzione $y(x)$ soddisfi le condizioni (C) si ottiene il sistema (nelle incognite c_1 e c_2)

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ -2c_1 + c_2 + \log 2 - 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 1 - \log 2 \end{cases} ,$$

pertanto la funzione φ è

$$\varphi(x) = [1 - \log 2 - \cos x + \log(1 + \cos x)] e^{-2x} \operatorname{sen} x + (\operatorname{sen} x - x) e^{-2x} \cos x .$$

Compito di Analisi Matematica II
assegnato il 4 maggio 2007

1

La funzione f è definita in tutto \mathbb{R}^2 ed è di classe C^∞ (è un polinomio nelle due variabili x e y).
Cerchiamo i punti stazionari di f .
Si ha, in tutto \mathbb{R}^2 ,

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 2(x-y)(x^2+y^2-1)^2 + 4x[(y-x)^2-1](x^2+y^2-1) = \\ &= 2(x^2+y^2-1)[(x-y)(x^2+y^2-1) + 2x[(y-x)^2-1]] \end{aligned}$$

e, analogamente,

$$f_y(x, y) = 2(x^2+y^2-1)[(y-x)(x^2+y^2-1) + 2y[(y-x)^2-1]]$$

(notiamo che la derivata f_y si può ottenere immediatamente dalla f_x osservando che è, in tutto \mathbb{R}^2 , $f(x, y) = f(y, x)$ e quindi $f_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} f(y, x) = f_x(y, x)$).

Pertanto i punti stazionari di f sono i punti della circonferenza

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 1 = 0\}$$

e le soluzioni del sistema

$$(1) \quad \begin{cases} (x-y)(x^2+y^2-1) + 2x[(y-x)^2-1] = 0 \\ (y-x)(x^2+y^2-1) + 2y[(y-x)^2-1] = 0 \end{cases} .$$

Il sistema (1) è equivalente al sistema

$$(2) \quad \begin{cases} (x-y)(x^2+y^2-1) + 2x[(y-x)^2-1] = 0 \\ 2(x+y)[(y-x)^2-1] = 0 \end{cases} ,$$

che si ottiene da (1) sostituendo alla seconda equazione la somma delle due equazioni.

Risolviamo il sistema (2). Si ha:

$$\begin{aligned} (2) \quad \iff \quad & \begin{cases} 2x(2x^2-1) + 2x(4x^2-1) = 0 \\ y = -x \end{cases} \cup \begin{cases} (x-y)(x^2+y^2-1) = 0 \\ (y-x)^2 = 1 \end{cases} \iff \\ & \iff \quad \begin{cases} x(6x^2-2) = 0 \\ y = -x \end{cases} \cup \begin{cases} x^2+y^2-1 = 0 \\ (y-x)^2 = 1 \end{cases} ; \end{aligned}$$

le soluzioni del primo sistema sono $(0, 0)$, $(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ e $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$; non c'è invece bisogno di risolvere il secondo sistema in quanto le eventuali soluzioni sono punti appartenenti alla circonferenza C .

In definitiva i punti stazionari di f sono i punti della circonferenza C e i tre punti $(0, 0)$, $(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ e $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$.

Prima di procedere al calcolo delle derivate seconde (che appare un po' laborioso) per decidere in merito ai punti trovati, che sono quelli "indiziati" di essere di estremo relativo, osserviamo che i punti della circonferenza C appartengono all'insieme E degli zeri di f ; infatti E è uguale a $C \cup D$, dove D è l'insieme

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (y-x)^2 = 1\} ,$$

cioè l'unione delle due rette $y - x = 1$ e $y - x = -1$. Osserviamo inoltre che è molto facile studiare il segno della funzione f nell'insieme $\mathbb{R}^2 \setminus E$, in quanto in tale insieme il segno di f coincide con il segno della funzione $(y - x)^2 - 1$; quest'ultima si annulla nell'insieme D e assume valori positivi in ognuno dei due semipiani aperti $y - x > 1$ e $y - x < -1$ e valori negativi nella striscia $-1 < y - x < 1$.

Lo studio del segno della funzione ci permette di decidere subito sui punti della circonferenza C :

- i punti $(x_0, y_0) \in C$ che appartengono all'unione dei due semipiani $y - x > 1$ e $y - x < -1$ (cioè i punti che si trovano all'interno del secondo o del quarto quadrante) sono di minimo relativo;
- i punti $(x_0, y_0) \in C$ che appartengono alla striscia $-1 < y - x < 1$ (cioè i punti che si trovano all'interno del primo o del terzo quadrante) sono di massimo relativo;
- nessuno dei quattro punti $(\pm 1, 0)$ e $(0, \pm 1)$ (i punti comuni alla circonferenza C ed all'insieme D) è di estremo relativo per f .

Possiamo inoltre precisare che nessuno dei precedenti punti di estremo relativo è di estremo relativo proprio, in quanto ogni intorno di un punto $(x_0, y_0) \in C$ contiene infiniti punti di C , nei quali f assume lo stesso valore (zero) che essa prende in (x_0, y_0) .

L'esame del segno di f ci permette di decidere, per mezzo di un ragionamento abituale (basato sul teorema di Weierstrass), anche sui tre punti $(0, 0)$, $(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ e $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$. Notiamo infatti che per ognuno dei tre domini limitati

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq x + 1\} ,$$

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, y \leq x - 1\} ,$$

$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x - 1 \leq y \leq x + 1\}$$

la corrispondente restrizione di f assume valore nullo sulla frontiera dell'insieme e valori di segno costante (positivo per H e K e negativo per L) all'interno dell'insieme. Ne segue che il massimo assoluto della restrizione $f|_H$ (che esiste per il teorema di Weierstrass) viene preso all'interno dell'insieme H ; d'altra parte l'unico punto stazionario per f che appartiene a $\overset{\circ}{H}$ è $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$, quindi si ha

$$f(x, y) < f(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}) \quad \forall (x, y) \in \overset{\circ}{H} \setminus \{(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})\} ,$$

pertanto $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ è un punto di massimo relativo proprio per f . In maniera del tutto analoga si ha che anche $(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ è un punto di massimo relativo proprio, mentre $(0, 0)$ è un punto di minimo relativo proprio.

Osserviamo che non avremmo potuto decidere nulla sui punti della circonferenza C per mezzo delle derivate seconde, poiché in tutti i punti di C il determinante hessiano assume valore zero.

Infine, per rispondere all'ultimo quesito, osserviamo che la funzione f non è limitata né superiormente né inferiormente, quindi non vi sono punti di estremo assoluto per f ; infatti, se consideriamo la restrizione di f all'insieme dei punti dell'asse x :

$$f(x, 0) = (x^2 - 1)^3 ,$$

si ha

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x, 0) = +\infty ,$$

quindi f non è limitata superiormente, mentre per la restrizione di f all'insieme dei punti della retta $y = x$:

$$f(x, x) = -(2x^2 - 1)^2$$

si ha

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x, x) = -\infty ,$$

quindi f non è limitata inferiormente.

2

La rappresentazione parametrica assegnata assicura che Γ è una curva semplice (ciò segue dal fatto che la funzione $1 + \sqrt{t}$ è crescente), ma non garantisce che Γ sia regolare; infatti la funzione $1 + \sqrt{t}$ (come del resto la funzione $\sin \sqrt{t}$) non è derivabile per $t = 0$. Per avere una rappresentazione parametrica regolare di Γ basta effettuare il cambiamento di parametro $\sqrt{t} = s$, cioè $t = s^2$, con $s \in [0, \pi]$; si trova così la rappresentazione parametrica

$$(1) \quad x = 1 + s \quad , \quad y = \sin s \quad , \quad s \in [0, \pi] \quad ,$$

che è una rappresentazione regolare, poiché le funzioni $1 + s$ e $\sin s$ sono di classe C^1 e la derivata $\frac{d}{ds}(1+s) = 1$ è sempre diversa da zero.

Possiamo ancora osservare che, con l'ulteriore cambiamento di parametro $1 + s = u$, cioè $s = u - 1$, con $u \in [1, 1 + \pi]$, si ottiene la nuova parametrizzazione regolare

$$(2) \quad x = u \quad , \quad y = \sin(u - 1) \quad , \quad u \in [1, 1 + \pi] \quad ,$$

la quale mostra, in definitiva, che Γ è la curva “grafico della funzione $\sin(x - 1)|_{[1, 1 + \pi]}$ orientato nel verso delle ascisse crescenti”.

Passiamo al calcolo degli integrali curvilinei.

a) L'integrale si calcola facilmente con la regola

$$(3) \quad \int_{\Gamma} X(x, y) dx + Y(x, y) dy = \int_{[a, b]} [X(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Y(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)] dt \quad ,$$

dove

$$x = \varphi(t) \quad , \quad y = \psi(t) \quad , \quad t \in [a, b]$$

è una qualunque parametrizzazione regolare di Γ . Si trova così (utilizzando la rappresentazione parametrica (1))

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} [x + (y - \sin(x - 1))^7] dx + y^2 dy &= \int_0^{\pi} [1 + s + \sin^2 s \cos s] ds = \\ &= \left[\frac{(1 + s)^2}{2} + \frac{\sin^3 s}{3} \right]_0^{\pi} = \frac{(1 + \pi)^2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\pi^2}{2} + \pi \quad . \end{aligned}$$

b) In questo caso l'integrale che si ottiene applicando la regola di calcolo (3) con la parametrizzazione (1) non sembra facilmente calcolabile. Studiamo allora la possibilità di sostituire la curva Γ con un'altra, per la quale il calcolo dell'integrale risulti più semplice.

La forma differenziale b) è definita nell'aperto $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ed è di classe C^1 . Si ha inoltre, in ogni punto di A ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \frac{4x^3 - 2xy}{x^4 + y^2} &= \frac{-2x(x^4 + y^2) - 2y(4x^3 - 2xy)}{(x^4 + y^2)^2} = \frac{-2x^5 - 8x^3y + 2xy^2}{(x^4 + y^2)^2} \quad , \\ \frac{\partial}{\partial x} \frac{x^2 + 2y}{x^4 + y^2} &= \frac{2x(x^4 + y^2) - 4x^3(x^2 + 2y)}{(x^4 + y^2)^2} = \frac{-2x^5 - 8x^3y + 2xy^2}{(x^4 + y^2)^2} \quad , \end{aligned}$$

quindi

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{4x^3 - 2xy}{x^4 + y^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{x^2 + 2y}{x^4 + y^2} \quad ,$$

pertanto la forma differenziale b) è chiusa. Questo non garantisce però che la b) sia esatta in A , poiché l'insieme A non è un insieme semplicemente connesso. Possiamo però affermare (per il secondo criterio di integrabilità delle forme differenziali) che la b) è esatta in ogni insieme aperto e semplicemente connesso $B \subseteq A$. Ciò è vero, in particolare, per il semipiano $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$, nel quale è contenuto il sostegno di Γ . Pertanto, per il primo criterio di integrabilità delle forme differenziali, l'integrale curvilineo da calcolare è uguale all'integrale curvilineo di b) lungo una qualsiasi curva generalmente regolare Γ' avente come estremi gli stessi estremi di Γ , cioè i punti $p = (1, 0)$ e $q = (1 + \pi, 0)$, e sostegno contenuto in B . Prendiamo come Γ' il segmento \overline{pq} (una rappresentazione parametrica regolare è $x = t, y = 0, t \in [1, 1 + \pi]$); otteniamo:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \frac{4x^3 - 2xy}{x^4 + y^2} dx + \frac{x^2 + 2y}{x^4 + y^2} dy &= \int_{\overline{pq}} \frac{4x^3 - 2xy}{x^4 + y^2} dx + \frac{x^2 + 2y}{x^4 + y^2} dy = \\ &= \int_1^{1+\pi} \frac{4t^3}{t^4} dt = 4 \log(1 + \pi) . \end{aligned}$$

c) La forma differenziale c) è la somma della forma differenziale b) e della forma differenziale

$$1 dx + [y - \operatorname{sen}(x - 1)]^7 dy .$$

Si ha allora, per la linearità dell'integrale curvilineo delle forme differenziali,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \left[\frac{4x^3 - 2xy}{x^4 + y^2} + 1 \right] dx + \left[\frac{x^2 + 2y}{x^4 + y^2} + (y - \operatorname{sen}(x - 1))^7 \right] dy &= \\ = \int_{\Gamma} \frac{4x^3 - 2xy}{x^4 + y^2} dx + \frac{x^2 + 2y}{x^4 + y^2} dy + \int_{\Gamma} 1 dx + [y - \operatorname{sen}(x - 1)]^7 dy &= \\ = 4 \log(1 + \pi) + \int_{\Gamma} 1 dx + [y - \operatorname{sen}(x - 1)]^7 dy &= \end{aligned}$$

(applicando la (3) con la parametrizzazione (1))

$$= 4 \log(1 + \pi) + \int_0^{\pi} dx = 4 \log(1 + \pi) + \pi .$$

3

Risolvendo graficamente le disequazioni che definiscono l'insieme T si trova che T è il dominio regolare ad un solo contorno limitato dalle iperboli $xy = \frac{1}{2}$ e $xy = 2$ e dalle rette $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$ e $y = \sqrt{3}x$, contenuto nel quadrante $Q =]0, +\infty[\times]0, +\infty[$.

Prima soluzione. L'espressione della funzione integranda suggerisce di effettuare il cambiamento di variabili in coordinate polari

$$(x, y) = \Phi(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \theta) , \quad (\rho, \theta) \in [0, +\infty[\times [0, 2\pi] .$$

La convenienza di questo cambiamento di variabili è confermata anche dal disegno di T , dal quale si evince che:

- per tutti i punti $(x, y) = (\rho \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \theta)$ che appartengono a T si ha $\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$;
- fissato comunque $\bar{\theta} \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$, i valori di $\rho \in [0, +\infty[$ per i quali il punto $(x, y) = (\rho \cos \bar{\theta}, \rho \operatorname{sen} \bar{\theta})$ appartiene a T sono quelli dell'intervallo

$$[\rho_{\min}(\bar{\theta}), \rho_{\max}(\bar{\theta})] ,$$

dove $\rho_{\min}(\bar{\theta})$ e $\rho_{\max}(\bar{\theta})$ sono le distanze dall'origine dei punti di intersezione della semiretta (in coordinate polari) $\theta = \bar{\theta}$ con le iperboli $xy = \frac{1}{2}$ e $xy = 2$;

di conseguenza, dato che le equazioni in coordinate polari delle iperboli $xy = \frac{1}{2}$ e $xy = 2$ sono, rispettivamente, $\rho = \frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}$ e $\rho = \frac{2}{\sqrt{\sin 2\theta}}$ (infatti si ha, per esempio,

$$xy = \frac{1}{2} \iff \rho^2 \cos \theta \sin \theta = \frac{1}{2} \iff \rho^2 = \frac{1}{\sin 2\theta} \iff \rho = \frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}),$$

si può affermare che l'insieme

$$D = \Phi^{-1}(T) = \{(\rho, \theta) \in [0, +\infty[\times [0, 2\pi] : (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \in T\}$$

è un dominio normale rispetto all'asse θ :

$$D = \left\{ (\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2 : \theta \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right], \frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}} \leq \rho \leq \frac{2}{\sqrt{\sin 2\theta}} \right\}.$$

Osserviamo che a questa conclusione si può pervenire anche in maniera esclusivamente analitica, prescindendo affatto dal disegno. Il ragionamento è il seguente: se $(\rho, \theta) \in [0, +\infty[\times [0, 2\pi]$ si ha

$$(\rho, \theta) \in \Phi^{-1}(T) \iff (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \in T \iff \begin{cases} \frac{1}{2} \leq \rho^2 \cos \theta \sin \theta \leq 2 \\ \rho \cos \theta \leq \sqrt{3} \rho \sin \theta \leq 3 \rho \cos \theta \end{cases} \iff$$

(notando che dalla prima disuguaglianza segue che è $\rho > 0$ e $\cos \theta \sin \theta > 0$)

$$\iff \begin{cases} \frac{1}{2} \leq \rho^2 \cos \theta \sin \theta \leq 2 \\ \rho > 0 \\ \cos \theta \sin \theta > 0 \\ \rho \cos \theta \leq \sqrt{3} \rho \sin \theta \leq 3 \rho \cos \theta \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{1}{2 \cos \theta \sin \theta} \leq \rho^2 \leq \frac{2}{\cos \theta \sin \theta} \\ \rho > 0 \\ \cos \theta \sin \theta > 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \theta \leq \sin \theta \leq \sqrt{3} \cos \theta \end{cases} \iff$$

(dall'ultima catena di disuguaglianze segue che è $\cos \theta \leq 3 \cos \theta$ e quindi $\cos \theta \geq 0$)

$$\iff \begin{cases} \frac{1}{\sin 2\theta} \leq \rho^2 \leq \frac{4}{\sin 2\theta} \\ \rho > 0 \\ \cos \theta > 0 \\ \sin \theta > 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \theta \leq \sin \theta \leq \sqrt{3} \cos \theta \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}} \leq \rho \leq \frac{2}{\sqrt{\sin 2\theta}} \\ \rho > 0 \\ \theta \in]0, \frac{\pi}{2}[\\ \frac{1}{\sqrt{3}} \leq \operatorname{tg} \theta \leq \sqrt{3} \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}} \leq \rho \leq \frac{2}{\sqrt{\sin 2\theta}} \\ \rho > 0 \\ \theta \in]0, \frac{\pi}{2}[\\ \theta \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right] \end{cases} \iff \begin{cases} \theta \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right] \\ \frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}} \leq \rho \leq \frac{2}{\sqrt{\sin 2\theta}} \end{cases}.$$

Passiamo al calcolo dell'integrale. Si ha:

$$\begin{aligned}
\iint_T \frac{|x^4 - y^4|}{x^2 y^2} dx dy &= \iint_D \frac{|\rho^4 \cos^4 \theta - \rho^4 \sin^4 \theta|}{\rho^4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta} \rho d\rho d\theta = \\
&= \iint_D \frac{|(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)|}{\cos^2 \theta \sin^2 \theta} \rho d\rho d\theta = \\
&= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{|\cos^2 \theta - \sin^2 \theta|}{\cos^2 \theta \sin^2 \theta} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}}^{\frac{2}{\sqrt{\sin 2\theta}}} \rho d\rho = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{|\cos^2 \theta - \sin^2 \theta|}{\cos^2 \theta \sin^2 \theta} \left[\frac{1}{2} \rho^2 \right]_{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}}^{\frac{2}{\sqrt{\sin 2\theta}}} d\theta = \\
&= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta \sin^2 \theta} \frac{3}{2} \frac{1}{\sin 2\theta} d\theta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 \theta - \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta \sin^2 \theta} \frac{3}{2} \frac{1}{\sin 2\theta} d\theta = \\
&= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2\theta}{\frac{1}{4} \sin^2 2\theta} \frac{3}{2} \frac{1}{\sin 2\theta} d\theta - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos 2\theta}{\frac{1}{4} \sin^2 2\theta} \frac{3}{2} \frac{1}{\sin 2\theta} d\theta = \\
&= 3 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2 \cos 2\theta}{\sin^3 2\theta} d\theta - 3 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2 \cos 2\theta}{\sin^3 2\theta} d\theta =
\end{aligned}$$

(dato che $2 \cos 2\theta = \frac{d}{d\theta} \sin 2\theta$ e che $\int \frac{1}{t^3} dt = -\frac{1}{2t^2} + c$)

$$\begin{aligned}
&= 3 \left[-\frac{1}{2 \sin^2 2\theta} \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} - 3 \left[-\frac{1}{2 \sin^2 2\theta} \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \\
&= \frac{3}{2} \left[-\frac{2}{\sin^2 \frac{\pi}{2}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{3}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{2\pi}{3}} \right] = \frac{3}{2} \left[-2 + \frac{4}{3} + \frac{4}{3} \right] = 1 .
\end{aligned}$$

Osserviamo che il valore assoluto si può eliminare prima del cambiamento di variabili; precisamente si ha:

$$(1) \quad \iint_T \frac{|x^4 - y^4|}{x^2 y^2} dx dy = \iint_{T_1} \frac{x^4 - y^4}{x^2 y^2} dx dy + \iint_{T_2} \frac{y^4 - x^4}{x^2 y^2} dx dy ,$$

essendo

$$T_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2} \leq xy \leq 2, \frac{1}{\sqrt{3}}x \leq y \leq x\} ,$$

$$T_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2} \leq xy \leq 2, x \leq y \leq \sqrt{3}x\} ;$$

dalla (1), passando alle coordinate polari, si ottiene:

$$\iint_T \frac{|x^4 - y^4|}{x^2 y^2} dx dy = \iint_{D_1} \frac{\cos 2\theta}{\frac{1}{4} \sin^2 2\theta} \rho d\rho d\theta - \iint_{D_2} \frac{\cos 2\theta}{\frac{1}{4} \sin^2 2\theta} \rho d\rho d\theta = \text{ecc. ecc.} ,$$

essendo

$$D_1 = \left\{ (\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2 : \theta \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4} \right], \frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}} \leq \rho \leq \frac{2}{\sqrt{\sin 2\theta}} \right\},$$

$$D_2 = \left\{ (\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2 : \theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3} \right], \frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}} \leq \rho \leq \frac{2}{\sqrt{\sin 2\theta}} \right\}.$$

Osserviamo ancora, a proposito della (1), che è facile provare subito, senza calcolarli, che i due integrali, che figurano al secondo membro, sono uguali. Ciò segue dal fatto che i domini T_1 e T_2 sono l'uno il simmetrico dell'altro rispetto alla bisettrice $y = x$ e che le funzioni integrande si ottengono l'una dall'altra scambiando tra loro le variabili indipendenti x e y ; in tale situazione infatti, mediante il cambiamento di variabili

$$(x, y) = \Psi(u, v) = (v, u), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

(tutte le ipotesi del teorema sul cambiamento delle variabili sono verificate; in particolare, per il determinante jacobiano J_Ψ , si ha $J_\Psi(u, v) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2$), dato che $T_2 = \Psi(T_1)$, si ottiene

$$\iint_{T_2} \frac{y^4 - x^4}{x^2 y^2} dx dy = \iint_{T_1} \frac{u^4 - v^4}{v^2 u^2} du dv = \iint_{T_1} \frac{x^4 - y^4}{x^2 y^2} dx dy.$$

Seconda soluzione. Osserviamo che le disuguaglianze che definiscono T si possono riscrivere nel modo seguente:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \leq xy \leq 2 \\ x \leq \sqrt{3}y \leq 3x \end{cases} \iff$$

(notiamo che dalla seconda catena di disuguaglianze segue $x \leq 3x$, cioè $x \geq 0$, e quindi tenendo conto della prima disuguaglianza $\frac{1}{2} \leq xy$, si ha $x > 0$ e $y > 0$)

$$\iff \begin{cases} \frac{1}{2} \leq xy \leq 2 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \leq \frac{y}{x} \leq \sqrt{3} \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases}.$$

Ciò suggerisce di cercare di effettuare quel cambiamento di variabili $(x, y) = \Phi(u, v)$, la cui trasformazione inversa Φ^{-1} è

$$(u, v) = \Phi^{-1}(x, y) = \left(xy, \frac{y}{x} \right), \quad (x, y) \in]0, +\infty[\times]0, +\infty[;$$

in questo modo infatti il dominio di integrazione T viene trasformato nel dominio rettangolare $[\frac{1}{2}, 2] \times [\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}]$.

Osserviamo, a tale scopo, che la funzione

$$(x, y) \in Q \rightarrow \left(xy, \frac{y}{x} \right) \in Q$$

($Q =]0, +\infty[\times]0, +\infty[$) è una bigezione tra il quadrante Q e se stesso; infatti, fissato un qualunque $(u, v) \in Q$, risolvendo il sistema

$$\begin{cases} xy = u \\ \frac{y}{x} = v \end{cases},$$

nell'incognita $(x, y) \in Q$, con facili calcoli si trova

$$\begin{cases} xy = u \\ \frac{y}{x} = v \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = \frac{u}{v} \\ y^2 = uv \end{cases} \iff \begin{cases} x = \sqrt{\frac{u}{v}} \\ y = \sqrt{uv} \end{cases} .$$

Ne segue che il cambiamento di variabili cercato è

$$(2) \quad (x, y) = \Phi(u, v) = \left(\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv} \right), \quad (u, v) \in Q .$$

Tale cambiamento di variabili è lecito poiché la Φ verifica le ipotesi di iniettività e di regolarità C^1 e inoltre il determinante jacobiano

$$J_{\Phi}(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2\sqrt{uv}} & -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{u}}{v\sqrt{v}} \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{v}{u}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v}} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} \frac{1}{v} + \frac{1}{4} \frac{1}{v} = \frac{1}{2v}$$

è sempre diverso da zero in Q .

Allora, effettuando il cambiamento di variabili (2), si ha:

$$\iint_T \frac{|x^4 - y^4|}{x^2 y^2} dx dy = \iint_T \left| \left(\frac{x}{y} \right)^2 - \left(\frac{y}{x} \right)^2 \right| dx dy =$$

(posto $\Delta = [\frac{1}{2}, 2] \times [\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}]$)

$$\begin{aligned} &= \iint_{\Delta} \left| \frac{1}{v^2} - v^2 \right| \frac{1}{2v} du dv = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^2 du \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \left| \frac{1}{v^2} - v^2 \right| \frac{1}{v} dv = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \left| \frac{1}{v^2} - v^2 \right| \frac{1}{v} dv = \\ &= \frac{3}{4} \left[\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \left(\frac{1}{v^2} - v^2 \right) \frac{1}{v} dv + \int_1^{\sqrt{3}} \left(v^2 - \frac{1}{v^2} \right) \frac{1}{v} dv \right] = \\ &= \frac{3}{4} \left[\left[-\frac{1}{2v^2} - \frac{v^2}{2} \right]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 + \left[\frac{v^2}{2} + \frac{1}{2v^2} \right]_1^{\sqrt{3}} \right] = \\ &= \frac{3}{4} \left[-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{1}{6} + \frac{3}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right] = \frac{3}{4} \left[-2 + 3 + \frac{1}{3} \right] = 1 . \end{aligned}$$

Osservazione. Il valore dell'integrale si può trovare anche senza effettuare alcun cambiamento di variabili, usando solo le formule di riduzione per i domini normali, ma in questo modo i calcoli sono più lunghi. Ad esempio il dominio T_1 considerato nella (1) deve essere decomposto nell'unione di tre domini normali e la relativa formula di riduzione (riferita ad una generica funzione $f(x, y)$) è

$$\begin{aligned} \iint_{T_1} f(x, y) dx dy &= \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}} dx \int_{\frac{1}{2x}}^x f(x, y) dy + \\ &+ \int_{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}} dx \int_{\frac{x}{\sqrt{3}}}^x f(x, y) dy + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{2}\sqrt[4]{3}} dx \int_{\frac{x}{\sqrt{3}}}^{\frac{2}{x}} f(x, y) dy \end{aligned}$$

4

Seguendo il suggerimento dato nell'enunciato, osserviamo che una soluzione comune alle due equazioni differenziali

$$(1) \quad y^{(IV)} - y'' + y' + y = x^2 + 2x - 2 \quad , \quad (2) \quad y^{(IV)} - y = -x^2$$

è anche soluzione dell'equazione differenziale che si ottiene sottraendo la (1) dalla (2):

$$(3) \quad y'' - y' - 2y = -2x^2 - 2x + 2 \quad .$$

Risolviamo la (3). Anche questa, come la (1) e la (2), è un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$ ha le radici -1 e 2 , quindi l'integrale generale dell'omogenea associata è

$$c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} \quad .$$

Cerchiamo un integrale particolare della (3). Il termine noto è del tipo $P(x)e^{\alpha x} \cos \beta x$ (con $P(x) = -2x^2 - 2x + 2$ e $\alpha = \beta = 0$) ed il numero $\alpha + i\beta = 0$ non è radice dell'equazione caratteristica; pertanto un integrale particolare \bar{y} della (3) si trova tra i polinomi di grado minore o uguale a due:

$$\bar{y}(x) = ax^2 + bx + c$$

e quindi

$$\bar{y}'(x) = 2ax + b \quad , \quad \bar{y}''(x) = 2a \quad ;$$

imponendo che \bar{y} sia soluzione della (3) si ricava

$$2a - (2ax + b) - 2(ax^2 + bx + c) = -2x^2 - 2x + 2 \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

per cui deve essere

$$\begin{cases} -2a = -2 \\ -2a - 2b = -2 \\ 2a - b - 2c = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases} ,$$

pertanto l'integrale generale della (3) è

$$(4) \quad y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} + x^2 \quad .$$

A questo punto, per trovare le soluzioni comuni a (1) e (2), occorre determinare i valori delle costanti c_1 e c_2 per i quali la funzione (4) è effettivamente soluzione di tutte e due le equazioni differenziali (1) e (2). Osserviamo però che non c'è bisogno di imporre alla (4) entrambe le condizioni di soddisfare sia la (1) che la (2). Infatti il sistema formato dalla (1) e dalla (2) è equivalente al sistema formato dalla (3) e da una qualunque delle due equazioni (1) e (2). È quindi sufficiente richiedere che la funzione (4) sia soluzione di almeno una delle due equazioni (1) e (2); naturalmente scegliamo la (2) perchè i calcoli sono più semplici. Calcoliamo le derivate della funzione (4):

$$y' = -c_1 e^{-x} + 2c_2 e^{2x} + 2x \quad , \quad \dots \quad , \quad y^{(IV)} = (-1)^4 c_1 e^{-x} + 2^4 c_2 e^{2x}$$

e sostituiamo nella (2); otteniamo che la (4) è soluzione della (2) in un intervallo I se e solo se risulta

$$15c_2 e^{2x} - x^2 = -x^2 \quad \forall x \in I ,$$

cioè se e solo se $c_2 = 0$, nel qual caso la (4) è soluzione della (2) in tutto \mathbb{R} . In conclusione le soluzioni comuni a (1) e (2) sono le funzioni (definite in \mathbb{R})

$$(5) \quad z = c_1 e^{-x} + x^2 \quad ,$$

al variare della costante $c_1 \in \mathbb{R}$.

La (5) rappresenta l'integrale generale dell'equazione differenziale lineare del primo ordine, a coefficienti costanti, la cui equazione caratteristica ha la radice -1 e che ammette, come integrale particolare, la funzione x^2 . Il fatto che -1 sia soluzione dell'equazione caratteristica dice che l'equazione differenziale cercata è del tipo

$$z' + z = g(x) \ ;$$

per trovare il termine noto $g(x)$ basta imporre che x^2 sia soluzione di tale equazione differenziale; si ottiene così:

$$2x + x^2 = g(x) \ .$$

In definitiva le soluzioni comuni alle due equazioni differenziali (1) e (2) sono tutte e sole le soluzioni della seguente equazione differenziale lineare del primo ordine, a coefficienti costanti:

$$z' + z = x^2 + 2x \ .$$

Compito di **Analisi Matematica II**

assegnato il 4 luglio 2007

1

a) La funzione f è definita e continua in tutto \mathbb{R}^2 . Per togliere il valore assoluto dalla sua legge di definizione consideriamo la funzione $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$g(x, y) = (y - x + 1)^2(x^2 + y^2 - 1) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 ;$$

tramite questa possiamo scrivere:

$$f(x, y) = \begin{cases} g(x, y) & \text{se } (x, y) \in A, \\ -g(x, y) & \text{se } (x, y) \in B, \\ 0 & \text{se } (x, y) \in C, \end{cases}$$

dove A e B sono i seguenti insiemi aperti di \mathbb{R}^2 :

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 1 > 0\} \quad , \quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 1 < 0\}$$

(si tratta, rispettivamente, dell'insieme dei punti esterni e dell'interno del disco di centro l'origine e raggio uguale a 1) e C , come specificato nel testo dell'esercizio, è la circonferenza $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

La funzione g è di classe C^∞ in tutto \mathbb{R}^2 (è un polinomio) e, in particolare, si ha:

$$g_x(x, y) = -2(y - x + 1)(x^2 + y^2 - 1) + 2x(y - x + 1)^2 \quad , \quad g_y(x, y) = 2(y - x + 1)(x^2 + y^2 - 1) + 2y(y - x + 1)^2 \\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 .$$

Ne segue che f è dotata di derivate parziali prime in tutti i punti di $A \cup B$ e risulta:

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= g_x(x, y) \quad , \quad f_y(x, y) = g_y(x, y) & \forall (x, y) \in A \quad , \\ f_x(x, y) &= -g_x(x, y) \quad , \quad f_y(x, y) = -g_y(x, y) & \forall (x, y) \in B \quad . \end{aligned}$$

Per studiare l'esistenza delle derivate parziali di f nei punti $(x_0, y_0) \in C$, dato che la funzione f è continua in \mathbb{R}^2 ,

possiamo ricorrere al corollario del primo teorema di L'Hospital sul limite del rapporto incrementale. Grazie a tale corollario otteniamo, se $x_0 > 0$,

$$\lim_{x \rightarrow x_0+} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0+} f_x(x, y_0) = \lim_{x \rightarrow x_0+} g_x(x, y_0) = g_x(x_0, y_0) = 2x_0(y_0 - x_0 + 1)^2$$

e, similmente,

$$\lim_{x \rightarrow x_0-} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} = -g_x(x_0, y_0) = -2x_0(y_0 - x_0 + 1)^2 \quad ;$$

analogamente, se $x_0 < 0$, abbiamo

$$\lim_{x \rightarrow x_0+} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} = -2x_0(y_0 - x_0 + 1)^2 \quad , \quad \lim_{x \rightarrow x_0-} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} = 2x_0(y_0 - x_0 + 1)^2 \quad ;$$

infine, se $x_0 = 0$, cioè $(x_0, y_0) = (0, \pm 1)$, troviamo che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, y_0) - f(0, y_0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} g_x(x, y_0) = g_x(0, y_0) = 0 \quad .$$

Ne concludiamo che f è parzialmente derivabile rispetto a x nei punti $(0, \pm 1)$ e si ha $f_x(0, \pm 1) = 0$ e che i punti $(x_0, y_0) \in C \setminus \{(0, 1), (0, -1)\}$ nei quali esiste la derivata parziale f_x sono quelli per cui si ha $g_x(x_0, y_0) = -g_x(x_0, y_0)$, cioè $g_x(x_0, y_0) = 0$ (ed in tali punti si avrà pure $f_x(x_0, y_0) = 0$); per trovare questi ultimi occorre risolvere il sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x \neq 0 \\ 2x(y - x + 1) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x \neq 0 \\ y - x + 1 = 0 \end{cases}$$

e questo ha come unica soluzione il punto $(1, 0)$. In definitiva i punti della circonferenza C in cui esiste la derivata f_x sono $(0, 1)$, $(0, -1)$ e $(1, 0)$, ed in ciascuno di tali punti la f_x vale zero.

Il ragionamento riguardante la derivata f_y è del tutto analogo. Si trova che i punti della circonferenza C in cui esiste la derivata f_y sono $(1, 0)$, $(-1, 0)$ e $(0, -1)$, ed in ciascuno di tali punti la f_y vale zero. Pertanto gli unici punti di C in cui esistono entrambe le derivate parziali prime sono $(1, 0)$ e $(0, -1)$.

b) Poiché le derivate g_x e g_y sono continue in \mathbb{R}^2 , anche f_x e f_y sono continue in $A \cup B$, dunque f è differenziabile in tutti i punti di $A \cup B$ per il teorema del differenziale totale.

Per quanto riguarda i punti della circonferenza C possiamo senz'altro affermare che, non essendo soddisfatta la condizione necessaria dell'esistenza di entrambe le derivate parziali prime, la funzione f non è differenziabile nei punti diversi da $(1, 0)$ e $(0, -1)$. Per questi due punti, non potendosi applicare il teorema del differenziale totale, neanche nella versione "forte" (cioè quella con ipotesi più leggere), dato che nessuna delle due derivate esiste in tutto un intorno del punto, ricorriamo alla definizione. Per il punto $(1, 0)$ si ha:

$$\begin{aligned} & \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{f(x,y) - f(1,0) - f_x(1,0)(x-1) - f_y(1,0)(y-0)}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}} = \\ & = \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} |x^2 + y^2 - 1| (y - x + 1) \frac{y - x + 1}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}} = 0, \end{aligned}$$

dato che i primi due fattori sono infinitesimi per $(x, y) \rightarrow (1, 0)$ ed il terzo è limitato, in quanto

$$\left| \frac{y - x + 1}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}} \right| \leq \frac{|y|}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}} + \frac{|x-1|}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}} < 2;$$

pertanto f è differenziabile nel punto $(1, 0)$. Analogamente si ha:

$$\begin{aligned} & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,-1)} \frac{f(x,y) - f(0,-1) - f_x(1,0)(x-0) - f_y(0,-1)(y+1)}{\sqrt{x^2 + (y+1)^2}} = \\ & = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,-1)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2 + (y+1)^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,-1)} |x^2 + y^2 - 1| (y - x + 1) \frac{y + 1 - x}{\sqrt{x^2 + (y+1)^2}} = 0, \end{aligned}$$

quindi f è differenziabile anche nel punto $(0, -1)$.

2

a) Negli spazi \mathbb{R}^h , con la metrica euclidea, gli insiemi sequenzialmente compatti sono tutti e soli quelli chiusi e limitati. Proviamo pertanto che K è chiuso e limitato.

Per dimostrare che l'insieme K è chiuso osserviamo che esso è il complementare dell'insieme

$$G^+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + 4z^4 - 1 > 0\},$$

il quale è aperto dal momento che la funzione

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + 4z^4 - 1$$

è continua in \mathbb{R}^3 e l'insieme \mathbb{R}^3 è aperto; è noto infatti dalla teoria che, se A è un sottoinsieme aperto di uno spazio metrico (S, d) e $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua, gli insiemi $G^+ = \{x \in A : f(x) > 0\}$ e $G^- = \{x \in A : f(x) < 0\}$ sono aperti di S .

Per provare che K è limitato notiamo che per un qualsiasi punto (x, y, z) di \mathbb{R}^3 valgono le implicazioni:

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in K &\iff x^2 + y^2 + 4z^4 \leq 1 \implies x^2 \leq 1, y^2 \leq 1, 4z^4 \leq 1 \iff \\ &\iff (x, y, z) \in \Delta = [-1, 1] \times [-1, 1] \times \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right], \end{aligned}$$

dunque l'insieme K è contenuto nell'intervallo chiuso Δ , che è un insieme limitato.

b) Osserviamo preliminarmente che entrambe le funzioni f e g sono di classe C^1 (anzi C^∞) in tutto \mathbb{R}^3 .

Osserviamo ancora che i punti di estremo assoluto per la restrizione $f|_K$ (i quali esistono per il teorema di Weierstrass) possono appartenere all'insieme

$$G^- = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + 4z^4 - 1 < 0\},$$

nel qual caso, essendo G^- un insieme aperto, essi sono anche punti di estremo relativo per la funzione f e quindi punti stazionari per f , oppure appartenere a

$$G^0 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + 4z^4 - 1 = 0\};$$

in questo secondo caso essi sono, ovviamente, anche punti di estremo per la funzione f sotto la condizione $g(x, y, z) = 0$. In conclusione i ppunti di estremo assoluto per $f|_K$ vanno ricercati tra:

A) i punti stazionari per f che appartengono all'insieme G^- ;

B) i punti di estremo per la funzione f sotto la condizione $g(x, y, z) = 0$.

Le derivate di f sono:

$$f_x(x, y, z) = f_y(x, y, z) = 1, \quad f_z(x, y, z) = 4z \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Non vi sono pertanto punti del tipo A).

I punti del tipo B) vanno ricercati tra:

B₁) i punti singolari della superficie in forma implicita di equazione $g(x, y, z) = 0$;

B₂) i punti di \mathbb{R}^3 che verificano la condizione necessaria del teorema sui moltiplicatori di Lagrange.

Le derivate di g sono:

$$g_x(x, y, z) = 2x, \quad g_y(x, y, z) = 2y, \quad g_z(x, y, z) = 16z^3 \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

L'unica soluzione del sistema

$$g_x = g_y = g_z = 0$$

è quindi il punto $(0, 0, 0)$, che però non appartiene all'insieme G^0 . Pertanto non vi sono punti del tipo B₁).

I punti del tipo B₂) sono i punti $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in \mathbb{R}^3$ aventi la proprietà che esiste $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}$ tale che $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{\lambda})$ è un punto stazionario della funzione (delle quattro variabili x, y, z e λ)

$$f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z).$$

Per trovarli dobbiamo quindi risolvere il sistema

$$\begin{cases} f_x(x, y, z) + \lambda g_x(x, y, z) = 0 \\ f_y(x, y, z) + \lambda g_y(x, y, z) = 0 \\ f_z(x, y, z) + \lambda g_z(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases},$$

cioè

$$\begin{cases} 1 + 2\lambda x = 0 \\ 1 + 2\lambda y = 0 \\ 4z + 16\lambda z^3 = 0 \\ x^2 + y^2 + 4z^4 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 + 2\lambda x = 0 \\ -2\lambda x + 2\lambda y = 0 \\ z(1 + 4\lambda z^2) = 0 \\ x^2 + y^2 + 4z^4 = 1 \end{cases} \iff$$

(osservando che la prima equazione implica che deve essere $\lambda \neq 0$)

$$\iff \begin{cases} 1 + 2\lambda x = 0 \\ y = x \\ z = 0 \\ 2x^2 = 1 \end{cases} \cup \begin{cases} 1 + 2\lambda x = 0 \\ y = x \\ z^2 = -\frac{1}{4\lambda} \\ 2x^2 + 4z^4 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = -\frac{1}{2x} \\ y = x \\ z = 0 \\ 2x^2 = 1 \end{cases} \cup \begin{cases} \lambda = -\frac{1}{2x} \\ y = x \\ z^2 = \frac{1}{2}x \\ 3x^2 = 1 \end{cases} .$$

Dal primo sistema, trascurando la prima equazione (che esprime il valore del “moltiplicatore” λ in funzione di x , y e z), si ottengono, come possibili punti di estremo condizionato, i punti

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) , \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) .$$

Analogamente dal secondo sistema si hanno i due punti

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{3}}}\right) .$$

Calcoliamo e confrontiamo tra loro i valori che la funzione f assume in corrispondenza dei punti trovati. Si ha:

$$f\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = \pm \sqrt{2} \quad , \quad f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{3}}}\right) = \sqrt{3} ;$$

pertanto il minimo di f nell'insieme K è $-\sqrt{2}$, e viene preso nel punto $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, mentre il massimo è $\sqrt{3}$, e viene preso in ciascuno dei due punti $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{3}}}\right)$.

3

a) Notiamo che l'insieme di integrazione T , definito come l'intersezione della corona circolare di centro l'origine e raggi 1 e 2, del semipiano $y \geq 0$ e del semipiano $x \leq \sqrt{2}$, è l'unione dei seguenti tre domini normali rispetto all'asse x , a due a due privi di punti interni comuni:

$$\begin{aligned} T_1 &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-2, -1], 0 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2} \right\} , \\ T_2 &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1, 1], \sqrt{1 - x^2} \leq y \leq \sqrt{4 - x^2} \right\} , \\ T_3 &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [1, \sqrt{2}], 0 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2} \right\} . \end{aligned}$$

Si ha pertanto

$$\begin{aligned} & \iint_T \frac{(x^2 + 1)y}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} dx dy = \\ &= \iint_{T_1} \frac{(x^2 + 1)y}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} dx dy + \iint_{T_2} \frac{(x^2 + 1)y}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} dx dy + \iint_{T_3} \frac{(x^2 + 1)y}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} dx dy = \end{aligned}$$

$$= \int_{-2}^{-1} (x^2 + 1) dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \frac{y}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} dy + \int_{-1}^1 (x^2 + 1) dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{y}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} dy + \\ + \int_1^{\sqrt{2}} (x^2 + 1) dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \frac{y}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} dy ,$$

da cui, osservando che

$$\frac{y}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} = \frac{1}{2} \frac{2y}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \frac{(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} = \frac{\partial}{\partial y} \left[-\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right] ,$$

si ricava

$$\iint_T \frac{(x^2 + 1)y}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} dx dy = \\ = \int_{-2}^{-1} (x^2 + 1) \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{|x|} \right) dx + \int_{-1}^1 (x^2 + 1) \left(-\frac{1}{2} + 1 \right) dx + \\ + \int_1^{\sqrt{2}} (x^2 + 1) \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{|x|} \right) dx = \\ = \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x^3}{3} + x \right) - \frac{x^2}{2} - \log |x| \right]_{-2}^{-1} + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{x^3}{3} + x \right) \right]_{-1}^1 + \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x^3}{3} + x \right) + \frac{x^2}{2} + \log |x| \right]_1^{\sqrt{2}} = \\ = \frac{1}{2} \frac{4}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{14}{3} + 2 + \log 2 + \frac{4}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{2}{3} + 1 \right) - 1 + \log \sqrt{2} + \frac{1}{2} \frac{4}{3} - \frac{1}{2} = \\ = \frac{7}{3} - \frac{5}{6} \sqrt{2} + \frac{3}{2} \log 2 .$$

b) (*Prima soluzione*). Effettuiamo il cambiamento di variabili in coordinate polari con valore iniziale dell'angolo $\alpha = -\frac{\pi}{2}$, cioè:

$$(*) \quad (x, y) = \Phi(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) , \quad (\rho, \theta) \in [0, +\infty[\times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right] .$$

Dal disegno di T si deduce che i valori di $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right]$ per i quali si possono ottenere, tramite la (*), punti (x, y) appartenenti a T sono quelli dell'intervallo $[0, \pi]$; inoltre, per ognuno di tali $\theta \in [0, \pi]$, i corrispondenti valori di $\rho \in [0, +\infty[$ tali che $\Phi(\rho, \theta)$ appartiene a T costituiscono un intervallo del tipo

$$[1, \rho_{\max}(\theta)] .$$

Per trovare l'espressione analitica di $\rho_{\max}(\theta)$ osserviamo che il punto comune alla retta $x = \sqrt{2}$ ed alla semicirconferenza $x^2 + y^2 = 4$, $y \geq 0$ è $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, che appartiene alla bisettrice $y = x$, e che l'equazione in coordinate polari della retta $x = \sqrt{2}$ è $\rho = \frac{\sqrt{2}}{\cos \theta}$; ne segue che è

$$\rho_{\max}(\theta) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{\cos \theta} & \text{se } \theta \in \left[0, \frac{\pi}{4} \right] \\ 2 & \text{se } \theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \pi \right] \end{cases} .$$

Di conseguenza l'insieme $\Phi^{-1}(T)$ è l'unione dei due domini normali rispetto all'asse θ :

$$D_1 = \left\{ (\rho, \theta) \in [0, +\infty[\times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] : \theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right], 1 \leq \rho \leq \frac{\sqrt{2}}{\cos \theta} \right\},$$

$$D_2 = \left\{ (\rho, \theta) \in [0, +\infty[\times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] : \theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \pi\right], 1 \leq \rho \leq 2 \right\},$$

i quali sono privi di punti interni comuni. Pertanto si ha:

$$\begin{aligned} & \iint_T \frac{(x^2 + 1)y}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} dx dy = \\ &= \iint_{D_1} \frac{(\rho^2 \cos^2 \theta + 1) \rho \operatorname{sen} \theta}{\rho^3} \rho d\rho d\theta + \iint_{D_2} \frac{(\rho^2 \cos^2 \theta + 1) \rho \operatorname{sen} \theta}{\rho^3} \rho d\rho d\theta = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen} \theta \left[\frac{\rho^2}{2} \cos^2 \theta + \log \rho \right]_1^{\frac{\sqrt{2}}{\cos \theta}} d\theta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \operatorname{sen} \theta \left[\frac{\rho^2}{2} \cos^2 \theta + \log \rho \right]_1^2 d\theta = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen} \theta \left[1 + \log \frac{\sqrt{2}}{\cos \theta} - \frac{1}{2} \cos^2 \theta \right] d\theta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \operatorname{sen} \theta \left[\frac{3}{2} \cos^2 \theta + \log 2 \right] d\theta = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen} \theta \left[-\frac{1}{2} \cos^2 \theta + \left(1 + \frac{1}{2} \log 2 \right) - \log \cos \theta \right] d\theta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \operatorname{sen} \theta \left[\frac{3}{2} \cos^2 \theta + \log 2 \right] d\theta = \\ &= \left[\frac{\cos^3 \theta}{6} - \left(1 + \frac{1}{2} \log 2 \right) \cos \theta + \cos \theta \log \cos \theta - \cos \theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \left[-\frac{\cos^3 \theta}{2} - (\log 2) \cos \theta \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{24} - \left(1 + \frac{1}{2} \log 2 \right) \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \log \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{6} + 1 + \frac{1}{2} \log 2 + 1 + \frac{1}{2} + \log 2 + \frac{\sqrt{2}}{8} + \frac{\sqrt{2}}{2} \log 2 = \\ &= \frac{7}{3} - \frac{5}{6} \sqrt{2} + \frac{3}{2} \log 2. \end{aligned}$$

(Seconda soluzione). L'integrale doppio può essere calcolato anche con la seconda formula di Gauss

$$\iint_T f_y(x, y) dx dy = - \int_{+\partial T} f(x, y) dx.$$

Infatti la funzione integranda è

$$\frac{(x^2 + 1)y}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} = \frac{\partial}{\partial y} \left[-\frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right]$$

e l'insieme di integrazione T è il dominio regolare ad un solo contorno individuato dalla curva generalmente regolare, semplice e chiusa

$$\Gamma = S_1 + C_1 + S_2 + C_2 + S_3,$$

dove:

S_1 è il segmento di estremi $(\sqrt{2}, 0)$ e $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$;

C_1 è la curva semplice che ha come sostegno l'arco della circonferenza $x^2 + y^2 = 4$ di estremi $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ e $(-2, 0)$ che è contenuto nel semipiano $y \geq 0$, orientata nel verso delle ascisse decrescenti;

S_2 è il segmento di estremi $(-2, 0)$ e $(-1, 0)$;

C_2 è la curva semplice che ha come sostegno la semicirconferenza $x^2 + y^2 = 1$, $y \geq 0$, orientata nel verso delle ascisse crescenti;

S_3 è il segmento di estremi $(1, 0)$ e $(\sqrt{2}, 0)$.

Di conseguenza, dato che il verso positivo della frontiera di T è quello della curva Γ , tenendo presente che una parametrizzazione di C_1 e ed una parametrizzazione di $-C_2$ sono, rispettivamente,

$$\begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = 2 \sin t \end{cases} \quad t \in [\frac{\pi}{4}, \pi] \quad \text{e} \quad \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad t \in [0, \pi] \quad ,$$

si ha:

$$\begin{aligned} \iint_T \frac{(x^2 + 1)y}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} dx dy &= \int_{\Gamma} \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx = \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \frac{4 \cos^2 t + 1}{2} (-2 \sin t) dt + \int_{-2}^{-1} \frac{x^2 + 1}{|x|} dx + \int_{\pi}^0 (\cos^2 t + 1)(-\sin t) dt + \int_1^{\sqrt{2}} \frac{x^2 + 1}{x} dx = \\ &= \left[\frac{4}{3} \cos^3 t + \cos t \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} + \left[-\frac{x^2}{2} - \log |x| \right]_{-2}^{-1} + \left[\frac{\cos^3 t}{3} + \cos t \right]_{\pi}^0 + \left[\frac{x^2}{2} + \log |x| \right]_1^{\sqrt{2}} = \\ &= \frac{7}{3} - \frac{5}{6} \sqrt{2} + \frac{3}{2} \log 2 \quad . \end{aligned}$$

4

a) L'equazione differenziale assegnata è un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica è

$$\begin{aligned} \lambda^4 - 4\lambda^3 + 6\lambda^2 - 4\lambda + 1 + 8(\lambda^2 - 2\lambda + 1) + 16 &= 0 \quad \iff \\ \iff (\lambda - 1)^4 + 8(\lambda - 1)^2 + 16 &= 0 \quad \iff [(\lambda - 1)^2 + 4]^2 = 0 \end{aligned}$$

e quindi, essendo

$$(\lambda - 1)^2 + 4 = 0 \quad \iff (\lambda - 1)^2 = -4 \quad \iff \lambda - 1 = \pm 2i \quad \iff \lambda = 1 \pm 2i \quad ,$$

l'equazione caratteristica ha le due radici doppie $\lambda = 1 \pm 2i$. L'integrale generale dell'omogenea associata è pertanto

$$c_1 e^x \cos 2x + c_2 e^x \sin 2x + c_3 x e^x \cos 2x + c_4 x e^x \sin 2x \quad (c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}) \quad .$$

Cerchiamo un integrale particolare dell'equazione differenziale

$$(1) \quad y^{(IV)} - 4y''' + 6y'' - 4y' + y + 8(y'' - 2y' + y) + 16y = 5x - 4 \quad .$$

Poiché la funzione $5x - 4$ è del tipo $P(x)e^{\alpha x} \cos \beta x$, con $P(x) = 5x - 4$, $\alpha = \beta = 0$, e poiché il numero $\alpha + i\beta = 0$ non è soluzione dell'equazione caratteristica, un integrale particolare della (1) si trova tra le funzioni del tipo $\bar{y}(x) = ax + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Le derivate della funzione $\bar{y}(x)$ sono

$$\bar{y}'(x) = a \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad , \quad \bar{y}^{(n)}(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad , \quad \forall n \geq 2 \quad ,$$

pertanto la $\bar{y}(x)$ è soluzione della (1) se e soltanto se

$$\begin{aligned} -4a + ax + b + 8(-2a + ax + b) + 16(ax + b) &= 5x - 4 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \iff \\ \iff (a + 8a + 16a)x - 4a + b - 16a + 8b + 16b &= 5x - 4 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \iff \\ \iff 25ax - 20a + 25b &= 5x - 4 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \iff \\ \iff \begin{cases} 25a = 5 \\ -20a + 25b = -4 \end{cases} &\iff \begin{cases} a = \frac{1}{5} \\ b = 0 \end{cases} . \end{aligned}$$

Cerchiamo adesso un integrale particolare di

$$(2) \quad y^{(IV)} - 4y''' + 6y'' - 4y' + y + 8(y'' - 2y' + y) + 16y = 64e^{-x} .$$

Poiché la funzione $64e^{-x}$ è del tipo $P(x)e^{\alpha x} \cos \beta x$, con $P(x) = 64$, $\alpha = -1$, $\beta = 0$, e poiché il numero $\alpha + i\beta = -1$ non è soluzione dell'equazione caratteristica, un integrale particolare della (2) si trova tra le funzioni del tipo $\bar{y}(x) = ke^{-x}$ ($k \in \mathbb{R}$). Le derivate della funzione $\bar{y}(x)$ sono

$$\bar{y}^{(n)} = (-1)^n ke^{-x} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad ,$$

pertanto la $\bar{y}(x)$ è soluzione della (2) se e soltanto se

$$\begin{aligned} [1 + 4 + 6 + 4 + 1 + 8(1 + 2 + 1) + 16] ke^{-x} &= 64e^{-x} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \iff \\ \iff 64ke^{-x} &= 64e^{-x} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \iff \quad k = 1 \quad . \end{aligned}$$

Per il principio di sovrapposizione un integrale particolare dell'equazione differenziale assegnata è la funzione $\frac{1}{5}x + e^{-x}$, dunque l'integrale generale di tale equazione è:

$$c_1 e^x \cos 2x + c_2 e^x \sin 2x + c_3 x e^x \cos 2x + c_4 x e^x \sin 2x + \frac{1}{5}x + e^{-x} \quad (c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}) .$$

Osserviamo adesso che, al tendere di x a $+\infty$, le funzioni

$$\frac{e^x \cos 2x}{xe^x} = \frac{\cos 2x}{x} \quad , \quad \frac{e^x \sin 2x}{xe^x} = \frac{\sin 2x}{x} \quad , \quad \frac{\frac{1}{5}x + e^{-x}}{xe^x} = \frac{1}{5e^x} + \frac{1}{xe^{2x}}$$

sono tutte e tre infinitesime, pertanto pure la funzione

$$\frac{c_1 e^x \cos 2x + c_2 e^x \sin 2x + \frac{1}{5}x + e^{-x}}{xe^x}$$

è infinitesima, qualunque siano le costanti $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Invece la funzione

$$(3) \quad \frac{c_3 x e^x \cos 2x + c_4 x e^x \sin 2x}{xe^x} = c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x$$

è infinitesima per $x \rightarrow +\infty$ soltanto se $c_3 = c_4 = 0$, altrimenti è oscillante (ciò segue dal fatto che alcune restrizioni di tale funzione convergono a c_3 per $x \rightarrow +\infty$, altre convergono a $-c_3$, altre a c_4 e altre ancora a $-c_4$). Pertanto le soluzioni $y(x)$ dell'equazione differenziale assegnata che verificano le condizione

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y(x)}{xe^x} = 0$$

sono tutte e sole le funzioni

$$(4) \quad y(x) = c_1 e^x \cos 2x + c_2 e^x \sin 2x + \frac{1}{5}x + e^{-x} \quad , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \quad .$$

b) Dalla teoria delle equazioni differenziali lineari segue che l'insieme costituito dalle funzioni (4) è l'integrale generale di quella equazione differenziale lineare del secondo ordine, a coefficienti costanti,

$$(5) \quad y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x) \quad ,$$

la cui equazione caratteristica

$$(6) \quad \lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0$$

ha le radici $1 \pm 2i$ e che ammette l'integrale particolare $\varphi(x) = \frac{1}{5}x + e^{-x}$. L'esistenza di tale equazione differenziale si prova facilmente nel seguente modo: una volta trovate le costanti reali a_1, a_2 tali che l'equazione (6) abbia le radici $1 \pm 2i$ (cosa possibile perché i numeri complessi $1 \pm 2i$ sono coniugati), l'esistenza del termine noto $f(x)$ tale che l'equazione differenziale (5) ammetta la soluzione $\varphi(x)$ si ottiene subito imponendo la condizione che $\varphi(x)$ sia soluzione della (5), cioè scrivendo:

$$f(x) = \varphi''(x) + a_1 \varphi'(x) + a_2 \varphi(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad .$$

Determiniamo esplicitamente l'equazione (5). L'equazione di secondo grado avente le radici $1 \pm 2i$ è, come già sappiamo dal punto a),

$$(\lambda - 1)^2 + 4 = 0 \quad \iff \quad \lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0 \quad ;$$

pertanto la funzione f è:

$$f(x) = e^{-x} - 2\left(\frac{1}{5} - e^{-x}\right) + 5\left(\frac{1}{5}x + e^{-x}\right) = x - \frac{2}{5} + 8e^{-x} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad .$$

Compito di Analisi Matematica II
assegnato il 19 febbraio 2009 (Compito A)

1

La funzione f è definita e continua in \mathbb{R}^2 . L'insieme degli zeri di f è l'unione $E \cup R$, dove E denota l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ e R la retta $2x - 3y = 0$. Il segno di f in $\mathbb{R}^2 \setminus (E \cup R)$ coincide con il segno della funzione $2x - 3y$, dunque f è positiva in $S_1 \setminus E$ e negativa in $S_2 \setminus E$, essendo S_1 e S_2 i due semipiani aperti:

$$S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < \frac{2}{3}x\} \quad , \quad S_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > \frac{2}{3}x\} \quad .$$

Ne segue che i punti di $E \cap S_1$ sono punti di minimo relativo, ma non di minimo relativo proprio, per la funzione f , mentre i punti di $E \cap S_2$ sono punti di massimo relativo, ma non di massimo relativo proprio; invece i punti della retta R e, in particolare, i due punti dell'intersezione $E \cap R$ non sono punti di estremo relativo per f . Inoltre, considerati i due domini limitati

$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + 9y^2 - 36 \leq 0, 2x - 3y \geq 0\} \quad , \\ D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + 9y^2 - 36 \leq 0, 2x - 3y \leq 0\} \quad ,$$

si ha che il massimo assoluto della restrizione $f|_{D_1}$ viene preso in $\overset{\circ}{D}_1$ e il minimo assoluto di $f|_{D_2}$ viene preso in $\overset{\circ}{D}_2$, pertanto in $\overset{\circ}{D}_1$ vi è necessariamente almeno un punto di massimo relativo per f e in $\overset{\circ}{D}_2$ almeno un punto di minimo relativo.

Per liberare la legge di f dal valore assoluto conviene considerare la funzione reale di due variabili reali

$$g(x, y) = (4x^2 + 9y^2 - 36)(2x - 3y) \quad ,$$

che è di classe C^∞ in \mathbb{R}^2 e per la quale si ha

$$g_x(x, y) = 8x(2x - 3y) + 2(4x^2 + 9y^2 - 36) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad , \\ g_y(x, y) = 18y(2x - 3y) - 3(4x^2 + 9y^2 - 36) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad .$$

Tramite la g possiamo scrivere

$$f(x, y) = \begin{cases} g(x, y) & \forall (x, y) \in A, \\ -g(x, y) & \forall (x, y) \in B, \\ 0 & \forall (x, y) \in E, \end{cases}$$

dove B è l'interno del dominio di Jordan avente come frontiera l'ellisse E e A è il complementare di tale dominio. Si ha quindi

$$f_x(x, y) = g_x(x, y) \quad , \quad f_y(x, y) = g_y(x, y) \quad \forall (x, y) \in A \quad , \\ f_x(x, y) = -g_x(x, y) \quad , \quad f_y(x, y) = -g_y(x, y) \quad \forall (x, y) \in B \quad .$$

Pertanto i punti stazionari per la funzione f nell'insieme $A \cup B = \mathbb{R}^2 \setminus E$ sono tutti e soli i punti stazionari per g in tale insieme. Troviamo i punti stazionari per g :

$$\begin{aligned} \begin{cases} g_x(x, y) = 0 \\ g_y(x, y) = 0 \end{cases} & \iff \begin{cases} 4x(2x - 3y) + 4x^2 + 9y^2 - 36 = 0 \\ 6y(2x - 3y) - (4x^2 + 9y^2 - 36) = 0 \end{cases} \iff \\ & \iff \begin{cases} (4x + 6y)(2x - 3y) = 0 \\ 4x(2x - 3y) + 4x^2 + 9y^2 - 36 = 0 \end{cases} \iff \\ & \iff \left\{ \begin{array}{l} y = -\frac{2}{3}x \\ 4x(2x - 3y) + 4x^2 + 9y^2 - 36 = 0 \end{array} \right. \cup \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{2}{3}x \\ 4x^2 + 9y^2 - 36 = 0 \end{array} \right. ; \end{aligned}$$

le soluzioni del secondo sistema sono i punti comuni alla retta R ed all'ellisse E , che abbiamo già esaminato e che, peraltro, non appartengono a $A \cup B$. Risolvendo il primo sistema otteniamo:

$$\begin{cases} y = -\frac{2}{3}x \\ 4x(2x + 2x) + 4x^2 + 4x^2 - 36 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -\frac{2}{3}x \\ 24x^2 = 36 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = \frac{3}{2} \\ y = -\frac{2}{3}x \end{cases} \iff \\ \iff (x, y) = \left(\sqrt{\frac{3}{2}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \quad \circ \quad (x, y) = \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right) .$$

Dalle considerazioni svolte in precedenza segue che uno dei due punti trovati deve appartenere a $\overset{\circ}{D}_1$ e l'altro a $\overset{\circ}{D}_2$. Si verifica immediatamente che

$$\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \in \overset{\circ}{D}_1 \quad , \quad \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right) \in \overset{\circ}{D}_2 \quad .$$

Pertanto $\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ è l'unico punto di massimo assoluto per la restrizione $f|_{D_1}$ ed è un punto di massimo relativo proprio per f ; analogamente $\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ è l'unico punto di minimo assoluto per la restrizione $f|_{D_2}$ ed è un punto di minimo relativo proprio per f .

Per rispondere all'ultima parte del quesito osserviamo che, considerata la restrizione di f all'insieme dei punti dell'asse x , si ha:

$$f(x, 0) = |4x^2 - 36| 2x \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad ,$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x, 0) = \pm\infty \quad ,$$

pertanto la funzione f non è limitata né inferiormente né superiormente, quindi non vi sono punti di estremo assoluto per f .