Corso di Analisi Matematica 2 per Fisici (a.a. 2006-07)

(prof. Alfonso Villani)

Una raccolta di testi di esercizi

(ultimo aggiornamento: 31-1-2007)

1 Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita nel modo seguente:

$$f(x,y) = \begin{cases} |xy|^p & \text{se } xy \neq 0\,, \\ 0 & \text{se } xy = 0\,, \end{cases}$$

dove l'esponente p è un numero positivo.
Risolvere, al variare di $p > 0$, i seguenti quesiti:
a) studiare la continuità della funzione f;
b) calcolare le derivate direzionali di f nel punto $(0,0)$;
c) studiare la differenziabilità di f nel punto $(0,0)$;
d) calcolare, in tutti i punti in cui esistono, le derivate parziali prime della funzione f;
e) stabilire se nel punto $(0,0)$ sono verificate le ipotesi del teorema del differenziale totale;
f) studiare la continuità di f_x nel punto $(0,0)$;
g) studiare la differenziabilità di f e la continuità delle sue derivate parziali prime nei punti di $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

3 Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita nel modo seguente:

$$f(x,y) = \begin{cases} y|y|^{x^2} & \text{se } y \neq 0\,, \\ 0 & \text{se } y = 0\,. \end{cases}$$

a) Provare che f è continua in $\mathbb{R}^2$.
b) Calcolare, in tutti i punti in cui esistono, le derivate parziali prime e seconde miste della funzione f.
c) Verificare che il limite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f_{xy}(x,y)$ non esiste.
d) Decidere se f è differenziabile in $\mathbb{R}^2$.

4 Sia f la funzione reale di due variabili reali:

$$f(x,y) \;=\; |x - y^3|(x^3 - y) \quad .$$

Dire, giustificando le risposte,
- a) se esiste il limite $\lim_{(x,y)\to\infty} f(x,y)$;
- b) in quali punti esiste la derivata parziale f_x (risp. f_y);
- c) se f è differenziabile nel punto $(-2,2)$;
- d) se f è differenziabile nel punto $(0,0)$.

5 Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita nel modo seguente:

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \operatorname{arctg}(y-x)^{-2} & \text{se } y \neq x\,, \\ \frac{\pi}{2}\, x^2 & \text{se } y = x\,. \end{cases}$$

Provare che f è continua in $\mathbb{R}^2$.

Provare che le derivate parziali f_x, f_y esistono in tutto $\mathbb{R}^2$ e che risulta

$$xy(f_x(x,y) + f_y(x,y)) \;=\; (x+y)f(x,y) \qquad\qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,.$$

Decidere se f è differenziabile in $\mathbb{R}^2$.

6 Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita nel modo seguente:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|xy|^p}{x^2+y^2} & \text{se } xy \neq 0\,, \\ 0 & \text{se } xy = 0\,, \end{cases}$$

dove l'esponente p è un numero positivo.
Risolvere, al variare di $p > 0$, i seguenti quesiti:
a) studiare la continuità della funzione f;
b) calcolare le derivate direzionali di f nel punto $(0,0)$;
c) studiare la differenziabilità di f nel punto $(0,0)$;
d) calcolare, in tutti i punti in cui esistono, le derivate parziali prime della funzione f;
e) studiare la continuità di f_x nel punto $(0,0)$;
f) studiare la differenziabilità di f e la continuità delle sue derivate parziali prime nei punti di $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

8 Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita mediante la legge:

$$f(x,y) = \begin{cases} \big(\max\{x^2, |y|\}\big)^p & \text{se } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0)\,, \end{cases}$$

dove p è un numero positivo.
Risolvere, al variare di $p > 0$, i seguenti quesiti:
a) provare che f è continua in $\mathbb{R}^2$;
b) calcolare, in tutti i punti in cui esistono, le derivate parziali f_x e f_y;
c) calcolare, in tutti i punti in cui esistono, le derivate parziali f_{xx}, f_{xy}, f_{yx} e f_{yy};
d) trovare tutti i punti di $\mathbb{R}^2$ nei quali la funzione f è differenziabile.

10 Provare che la funzione

$$F(v) \;=\; \int_0^{e^v} u \operatorname{sen}(u^2+v)^2 \, du$$

è derivabile in $\mathbb{R}$ ed esprimere la derivata $F'(v)$ mediante le funzioni elementari.

11 Trovare i punti di minimo e di massimo relativo per la funzione

$$f(x,y) \;=\; (y^2 - x^4)(x^2 + y^2 - 20) \quad .$$

12 Trovare i punti di minimo e di massimo relativo per la funzione

$$f(x,y) \;=\; (y^2 - x^2)|y - x^2 + 2| \quad .$$

13 a) Trovare i punti di estremo relativo per la funzione

$$f(x,y) \;=\; x^4 + y^3 - xy + 1 \quad .$$

b) Trovare il minimo ed il massimo assoluti della restrizione di f all'insieme

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y^2 \leq x \leq 1\} \quad .$$

14 Trovare gli eventuali punti di minimo e di massimo relativo per la funzione

$$f(x,y) \; = \; \mathrm{sen}\,(x+y) + \cos x + \cos y \quad .$$

15 Trovare il minimo ed il massimo assoluti della funzione

$$f(x,y) \; = \; \log_{\sqrt{37}} (4x^2 + y^2 + 1)$$

nel cerchio $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, (x-1)^2 + y^2 \le 4\}$.

16 Trovare il minimo ed il massimo assoluti della funzione

$$f(x,y) \; = \; x^2(1+y) + y^2$$

nell'insieme T dei punti $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tali che $x^2 + y^2 \le 8$, $\max\{x, y^2\} \le 2$.

17 a) Calcolare, in tutti i punti in cui esistono, le derivate parziali prime della funzione

$$f(x,y) \; = \; xy\mathrm{e}^{|y-x^2|} \quad .$$

b) Trovare tutti i punti di $\mathbb{R}^2$ nei quali f è differenziabile.
c) Provare che non vi sono punti di estremo relativo per f.
d) Trovare il minimo ed il massimo assoluti della restrizione di f all'insieme $K = [0,1]^2$.

18 Per ognuna delle seguenti funzioni trovare gli eventuali punti di estremo relativo:

$$f(x,y) \; = \; \mathrm{arctg}\left[(y-x^2)(y-1)^2\right] \quad , \quad g(x,y) \; = \; \mathrm{e}^{(x^2+y^2-4)(4x^2+y^2-16)} \quad ,$$

$$h(x,y) \; = \; \left(\frac{1}{2}\right)^{\cosh\left[x^2y^3(x+y-2)\right]} \quad .$$

19 Sia $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, 4x^4 + 16y^2 \le 5\}$.
a) Dimostrare che l'insieme C è compatto.
b) Trovare il minimo ed il massimo assoluti della funzione $(y-x^2)^2$ nell'insieme C.
c) Trovare l'estremo inferiore e l'estremo superiore della restrizione della funzione $\mathrm{e}^{-(y-x^2)^{-2}}$ all'intersezione tra il suo insieme di definizione e l'insieme C, precisando se si tratta, rispettivamente, di minimo e di massimo.

20 Trovare il minimo ed il massimo assoluti della funzione

$$f(x,y,z) \; = \; xy + xz + yz$$

nel tetraedro di vertici $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$.

21 Per ognuna delle seguenti funzioni trovare gli eventuali punti di estremo relativo:

$$f(x,y,z) \; = \; x^2 + y^4 + y^2 + z^3 - 2xz \quad , \quad g(x,y,z) \; = \; xy + xz - x^2 - y^3 - z^2 \quad ,$$

$$h(x,y,z,w) \; = \; x^2 + 2y^2 + z^2 + 2w^2 + yz - 2xw \quad .$$

22 Trovare gli eventuali punti di estremo relativo, di estremo relativo proprio e di estremo assoluto per la funzione di due variabili

$$f(x,y) \;=\; (y-x^3)\,|y^3-x| \quad .$$

23 Provare che la restrizione della funzione $f(x,y)=x+y$ all'insieme

$$C \;=\; \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, \cosh x+\cosh y=4\}$$

è dotata di minimo e di massimo assoluti e trovarli.

24 Sia C l'insieme dei punti $(x,y,x)\in\mathbb{R}^3$ tali che

$$x^2+(y-1)^2+4z^2=1 \quad , \quad 2x+y-1=0 \quad .$$

Trovare i punti di C che hanno minima (risp. massima) distanza dall'asse z.

25 Verificare che la curva Γ in $\mathbb{R}^2$ di rappresentazione parametrica

$$x=t(1-t) \quad , \quad y=\frac{\sqrt{t}+t^{50}}{2} \quad , \qquad\qquad t\in[0,1] \ ,$$

è una curva regolare.
Provare quindi che la forma differenziale lineare

$$\mathrm{e}^{x^2y}(1+2x^2y)\,dx \;+\; (x^3\mathrm{e}^{x^2y}+(1+y^2)^{-1})\,dy$$

è esatta in $\mathbb{R}^2$ e calcolarne l'integrale curvilineo lungo la curva Γ.
Integrare, infine, la suddetta forma differenziale.

26 Verificare che la curva Γ in $\mathbb{R}^3$ di rappresentazione parametrica

$$x=\frac{1}{t} \quad , \quad y=\mathrm{e}^{2t} \quad , \quad z=\int_1^{\frac{1}{t}}\frac{2\mathrm{e}^{tu}}{u}\,du \ , \qquad\qquad t\in[1,2] \ ,$$

è una curva regolare e calcolarne la lunghezza.

27 Sia Γ la curva semplice in $\mathbb{R}^2$ che ha come sostegno il grafico della funzione

$$f(x)=\sqrt[10]{x} \quad , \quad x\in[0,1] \ ,$$

ed è orientata nel verso che va da $(0,0)$ a $(1,1)$.
Provare che Γ è una curva regolare.
Calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_\Gamma \frac{2(y+1)}{(x+y+1)^2}\,dx \;+\; \left[x-y^{10}-\frac{2x}{(x+y+1)^2}\right]dy \quad .$$

28 Calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_\Gamma \frac{x^4+y^4+2xy(xy-1)}{(x^2+y^2)^2}\,dx \;+\; \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dy \quad ,$$

dove Γ indica la curva semplice in $\mathbb{R}^2$ che ha come sostegno il grafico della funzione

$$f(x)=\cos x \quad , \quad x\in[0,2\pi] \ ,$$

ed è orientata nel verso delle ascisse crescenti.

29 Trovare la costante $k \in \mathbb{R}$ tale che la forma differenziale lineare

$$\left[\log(x+y) + \frac{x}{x+y}\right] dx + \frac{x+k}{x+y}\, dy$$

sia esatta.
Della forma differenziale così ottenuta trovare quella primitiva F tale che $F(0,1) = 0$.

30 Decidere se l'insieme aperto

$$A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, x^2) \,:\, x \in]-\infty, 0]\}$$

è, oppure no, stellato rispetto ad un punto.
Decidere quindi se la forma differenziale lineare

$$\frac{-y}{x^2+y^2}\, dx \;+\; \frac{x}{x^2+y^2}\, dy$$

è esatta, oppure no, nell'insieme A.

31 Trovare una funzione $g(y)$, $g \in C^1(\mathbb{R})$, in modo che la forma differenziale lineare

$$\left[\log\big(x + g(y)\big) + \frac{x}{x+g(y)}\right] dx + x\,\frac{g(y)-2}{x+g(y)}\, dy$$

sia esatta nell'insieme aperto $A(g) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x + g(y) > 0\}$ e che il punto $(-1,0)$ appartenga alla frontiera di $A(g)$.
Integrare quindi la forma differenziale così ottenuta.

32 Sia Γ la curva in $\mathbb{R}^2$ di rappresentazione parametrica

$$x = \sqrt{t} \;\;,\;\; y = \int_0^{\sqrt{t}} \operatorname{sen} u \sqrt{\operatorname{sen}^2 u + 2}\, du \;, \qquad\qquad t \in [0, \tfrac{\pi}{4}] \;.$$

Provare che Γ è rettificabile e calcolarne la lunghezza.

33 Per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, sia C_n l'insieme dei punti $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tali che $x \geq 0$, $y \geq 0$, $\sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{y} = 1$.
a) Provare che C_n è il sostegno di una curva semplice Γ_n.
b) Provare che Γ_n è generalmente regolare e trovare le coordinate del punto $P_n \in C_n$ che determina due archi di Γ_n di uguale lunghezza.
c) Provare che Γ_n è regolare.
d) Sia L_n la lunghezza di Γ_n. Provare che $L_n \leq 2$ $\forall n \geq 2$ (suggerimento: usare la disuguaglianza $\sqrt{1+a^2} \leq 1 + |a|$) e che $\lim_{n\to\infty} L_n = 0$.

34 Provare che la forma differenziale lineare

$$\frac{2x^3 - 2xy - y - x^2}{(x^2-y)^2}\, dx + \frac{-x^2+y+x}{(x^2-y)^2}\, dy$$

è esatta nell'aperto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 - y > 0\}$ e trovarne quella primitiva F che si annulla nel punto $(0,-1)$.

35 Sia $(x,y) \to f(x,y)$ una funzione reale, definita in un insieme $K \subseteq \mathbb{R}^2$, e sia $x \to \varphi(x)$ una funzione implicita relativa all'equazione $f(x,y) = 0$, definita in un insieme $I \subseteq \mathbb{R}$.
Provare che, se valgono le ipotesi:

i) l'insieme K è compatto;
ii) la funzione f è continua in K;
iii) la funzione $\varphi : I \to \mathbb{R}$ è l'unica funzione implicita (della variabile x) relativa all'equazione $f(x,y)=0$ avente come insieme di definizione l'insieme I,

allora f è continua in I.
Mostrare inoltre, con appropriati esempi, che ognuna delle ipotesi i), ii) e iii) è essenziale al fine di garantire la continuità di f.

36 Provare che esiste una ed una sola funzione $x \to \varphi(x)$, definita in tutto $\mathbb{R}$, la quale è una una funzione implicita relativa all'equazione

$$e^{x+y} - x + y - 1 \;=\; 0 \quad .$$

Studiare la funzione φ e disegnarne il grafico.

37 Provare che esiste una ed una sola funzione $x \to \varphi(x)$, definita in tutto $\mathbb{R}$, la quale è una una funzione implicita relativa all'equazione

$$\frac{1}{2}x + y - \operatorname{arctg}(x+y) \;=\; 0 \quad .$$

Studiare la funzione φ e disegnarne il grafico.

40 Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_T \left| y^2 - |x| \right| dx\,dy \quad ,$$

essendo

$$\text{a) } T = [-1,1]\times[-1,1] \quad ; \quad \text{b) } T = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, x^2 \le y \le 1\} \quad ;$$
$$\text{c) } T = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, 0 \le y \le \tfrac{2}{\pi}\operatorname{arcsen}\tfrac{x-1}{2}\} \quad .$$

41 Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_T x\sqrt{\frac{1+y}{1-y}}\, dx\,dy \quad ,$$

essendo

$$\text{a) } T = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, |y| \le \frac{1}{2}\,,\; y^2+x^2-2x \le 0\} \quad ;$$
$$\text{b) } T = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, |y| \le \frac{1}{2}\,,\; y^4+x^2-2x \le 0\} \quad .$$

42 Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_T \frac{dx\,dy}{4+y+|y-x^2|} \quad ,$$

essendo $T = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, x\ge 0\,,\; y\ge 0\,,\; x+y\le 2\}$.

43 a) Provare che l'insieme

$$T \;=\; \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, 1 \le x-y \le e\,,\; (x-y)^{\log(x-y)} \le x+2y \le e\}$$

è un dominio di $\mathbb{R}^2$, limitato e misurabile secondo Peano-Jordan.
b) Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_T \left|\log\frac{x-y}{x+2y}\right| \frac{1}{(x-y)(x+2y)}\, dx\,dy \quad .$$

44 Calcolare l'integrale triplo

$$\iiint_T z\,dx\,dy\,dz \quad ,$$

essendo $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, |x| \le 1\,,\, 0 \le z \le y \le \min\{(x-1)^2, (x+1)^2\}\,.$

45 a) Provare che l'insieme

$$T \;=\; \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x \ge 0,\, y \ge 0,\, x^3 + \sqrt{y} \le z \le 1\}$$

è un dominio limitato di $\mathbb{R}^3$, misurabile secondo Peano-Jordan.

b) Scrivere tutte le possibili formule di riduzione a tre integrazioni semplici consecutive per l'integrale triplo

$$\iiint_T f(x,y,x)\,dx\,dy\,dz \quad ,$$

dove f è una funzione reale continua in T.

46 a) Provare che l'insieme

$$T \;=\; \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 0 \le x+2y \le 2,\, 0 \le 2y-z \le 2,\, z-2y \le x-2z \le (x+2y)^2\}$$

è un dominio limitato di $\mathbb{R}^3$, misurabile secondo Peano-Jordan.

b) Calcolare l'integrale triplo

$$\iiint_T |x+z|\,dx\,dy\,dz \quad .$$

47 Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_T y\,dx\,dy \quad ,$$

essendo $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \le xy \le 2\,,\, -2 \le (x-2)y \le -1\}\,.$

48 Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_T (2x-y)\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy \quad ,$$

dove T denota l'insieme dei punti $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ che appartengono al triangolo di vertici $(0,0)$, $(1,0)$, $(-1,1)$ e verificano la disuguaglianza $5(x^2+y^2) \ge 1\,.$

49 Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_T |2x+y| \log\left(1+4x^2+y^2\right)\,dx\,dy \quad ,$$

essendo $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 4x^2+y^2 \le 1\}\,.$

50 Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_T \frac{|x+y-1|}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy \quad ,$$

essendo $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \frac{1}{4} \le x^2+y^2 \le 1\}\,.$

51 Calcolare l'integrale triplo

$$\iiint_T \left[\mathrm{e}^{z^2}\sqrt{x^2+y^2} \;+\; z \operatorname{sen}\left(1-x^2-y^2\right)^2\right]dx\,dy\,dz \quad ,$$

dove T denota l'insieme dei punti (x, y, z) di $\mathbb{R}^3$ tali che $\sqrt{x^2+y^2} \le z \le 1$.

52 Sia T l'insieme dei punti (x, y, z) di $\mathbb{R}^3$ che verificano le disuguaglianze

$$x \ \ge \ y \ \ge z \ , \ 1 \ \le \ (x-y)^2+(y-z)^2 \ , \ (x-y)^2+(y-z)^2+4z^2 \ \le \ 4 \quad .$$

Provare che T è un dominio di $\mathbb{R}^3$, limitato e misurabile secondo Peano-Jordan, e calcolare l'integrale triplo

$$\iiint_T \frac{1}{\sqrt{(x-y)^2+(y-z)^2}}\, dx\, dy\, dz \quad .$$

53 a) Provare che l'insieme:

$$T \ = \ \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 0 \le z \le xy\, , \ x^4 \le x^2y^2+z^2 \le 4x^2\, , \ 1 \le x \le 2\}$$

è un dominio di $\mathbb{R}^3$, limitato e misurabile secondo Peano-Jordan.
b) Calcolare l'integrale triplo

$$\iiint_T \left(xy^2 + \frac{z^2}{x} \right) dx\, dy\, dz \quad .$$

54 Calcolare l'integrale triplo

$$\iiint_T |z| \operatorname{arctg}(x^2+4y^2)\, dx\, dy\, dz \quad ,$$

dove T è l'insieme dei punti (x, y, z) di $\mathbb{R}^3$ tali che $x^2+4y^2 \le z^2 \le 1$.

55 a) Provare che l'insieme:

$$T \ = \ \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z \ge 0\, , \ 1 \le 4x^2+y^2+z^2 \le 4\}$$

è un dominio di $\mathbb{R}^3$, limitato e misurabile secondo Peano-Jordan.
b) Calcolare l'integrale triplo

$$\iiint_T |z-1|\, dx\, dy\, dz \quad .$$

56 Calcolare

$$\iint_T \frac{xy}{(x^2+y^2)^3}\ \mathrm{e}^{(x^2+y^2)^{-1}}\, dx\, dy \quad ,$$

dove T denota l'insieme dei punti $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tali che $\min\{x, y\} \ge 1$ e $x^2+y^2 \le 4$.

57 Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_T \frac{|x^2-y^2|}{x^2+y^2}\ \log(x^2+y^2)\, dx\, dy \quad ,$$

essendo $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 1 \le xy \le 2\, , \ x \le \sqrt{3}y \le 3x\}$.

58 Sia T il dominio di $\mathbb{R}^3$ ottenuto facendo ruotare attorno all'asse z l'insieme

$$D \ = \ \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x = 0\, , \ 0 \le z \le 3\, , \ 0 \le y \le \sqrt[4]{z+1}\} \quad .$$

Calcolare

$$\iiint_T \frac{\mathrm{e}^{x^2+y^2}}{\sqrt{z+1}}\, dx\, dy\, dz \quad .$$

59 Calcolare l'integrale triplo
$$\iiint_T \operatorname{arcsen} y \, dx\, dy\, dz \quad ,$$
essendo $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, \frac{1}{\sqrt{2}} \le y \le 1\,,\; y^2z^2 + x^2 - y^2 \le 0\}$.

60 Calcolare l'integrale doppio
$$\iint_T \left| \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - 1 \right| \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}}\, dx\, dy \quad ,$$
essendo $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \ge 0\,,\; y \ge 0\,,\; 4x^2 + 9y^2 \le 144\}$.

61 Calcolare l'integrale triplo
$$\iiint_T \log(x^2+y^2+z^2)\, dx\, dy\, dz \quad ,$$
essendo

a) $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4\,,\; 0 \le x \le y\,,\; 0 \le z \le \sqrt{x^2+y^2}\}$;

b) $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2+z^2-2z \ge 0\,,\; x^2+y^2 \le 2z^2\,,\; 1 \le z \le 2\}$.

69 Determinare una soluzione φ dell'equazione differenziale
$$y' = \frac{|y|}{1+x^2}$$
tale che $\varphi(0)) = -1$.

71 Risolvere l'equazione differenziale
$$y' = x^2\sqrt{2y-1} \quad .$$

72 Risolvere l'equazione differenziale
$$y' + 2xy = x^2 \mathrm{e}^{-x^2} \quad .$$

73 Trovare le eventuali soluzioni comuni alle due equazioni differenziali
$$y' = |y| \quad , \quad y'' = |y| \quad .$$

74 Determinare una soluzione φ dell'equazione differenziale
$$y' = |y \log x|$$
tale che $\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = 3$.

75 Integrare in $]0, +\infty[$ la seguente equazione differenziale:
$$y' = \frac{y}{x} + \operatorname{sen}\frac{y}{x} \quad .$$

76 a) Provare che il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \operatorname{sen}^2 y + \operatorname{sen} y + 1 \quad (*) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

ha un'unica soluzione φ, definita in tutto $\mathbb{R}$.
b) Provare che φ è monotòna.
c) Calcolare $\varphi'(0)$ e $\varphi''(0)$.
d) Determinare le costanti $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ in modo che la funzione $\varphi(x + c_1) + c_2$ soddisfi la (*) ed assuma il valore 2π per $x = 1$.

77 Risolvere l'equazione differenziale

$$y' = \frac{x}{y}\,\mathrm{e}^{\left(\frac{y}{x}\right)^2} + \frac{y}{x} \quad .$$

78 Trovare le eventuali soluzioni comuni alle due equazioni differenziali

$$y' - 5y = 3\mathrm{e}^{2x} \quad , \quad y'' - 3y' + 2y = \mathrm{e}^{5x} \quad .$$

79 Risolvere l'equazione differenziale

$$y' = \frac{5x^2 - 3xy + y^2}{x^2} \quad .$$

80 Trovare una funzione $\varphi :]-\infty, 0[\to \mathbb{R}$ che sia soluzione nell'intervallo $]-\infty, 0[$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \mathrm{e}^{\frac{|y|}{x}} + \dfrac{y}{x} \\ y(-1) = 0 \end{cases} \quad .$$

Dimostrare inoltre che tale funzione è unica.

81 Risolvere l'equazione differenziale

$$y'' + y = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \quad .$$

82 Risolvere l'equazione differenziale

$$y''' - 5y'' + 8y' - 4y = x^2 - 1 \quad .$$

83 Risolvere l'equazione differenziale

$$y^{(\mathrm{IV})} - 2y'' - 3y = x + \mathrm{e}^x \quad .$$

84 Risolvere l'equazione differenziale

$$y'' + ky = k^2 x + \operatorname{sen} x \quad ,$$

al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$.

85 Risolvere l'equazione differenziale

$$y''' - 3y'' + 2y = \operatorname{sen}^2 2x \quad .$$

86 Determinare una coppia di funzioni $\varphi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in modo che la forma differenziale

$$\left[3x^2y - \varphi(y)\right] dx \;+\; \left[\psi(x) - 2xy\right] dy$$

sia esatta in $\mathbb{R}^2$ e che risulti $\varphi(0) = 0$, $\psi(0) = 1$.
Successivamente integrare la forma differenziale così ottenuta.

87 Risolvere l'equazione differenziale

$$y' = (y - x)^2 \quad .$$

88 Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \mathrm{e}^{-(2x+3y)} - \dfrac{2}{3} \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad ,$$

precisando l'intervallo nel quale è definita la soluzione massimale.

89 Trovare, in ognuno dei due intervalli $]-\infty, -1[$ e $]1, +\infty[$, l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y' - \frac{2x^2 - 1}{x(x^2 - 1)}\, y = x^2\sqrt{x^2 - 1} \quad .$$

90 Risolvere l'equazione differenziale

$$y^{(\mathrm{VIII})} - 2y^{(\mathrm{IV})} + y = 0 \quad .$$

91 Sia φ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 9y' + 20y = \mathrm{e}^{-3x} \operatorname{sen} \mathrm{e}^{x} \\ y(\log\pi) = y'(\log\pi) = 0 \end{cases} \quad .$$

1) Dimostrare che la funzione φ è decrescente nel punto $x = \log\pi$.
2) Esprimere $\varphi(x)$ mediante le funzioni elementari.

92 Scrivere l'equazione differenziale lineare il cui integrale generale in $]0, +\infty[$ è

$$y(x) \;=\; c_1\mathrm{e}^{x} + c_2\mathrm{e}^{-x} + c_3\cos 2x + c_4\operatorname{sen} 2x + \log x \quad ,$$

dove c_1, c_2, c_3 e c_4 rappresentano delle costanti arbitrarie.
Determinare poi i valori del parametro $a \in \mathbb{R}$, per i quali esistono integrali $y_1(x)$ di tale equazione verificanti le condizioni

$$y_1^{(\mathrm{V})}(1) = a^2 \quad , \quad y_1'''(1) = 0 \quad , \quad y_1'(1) = a \quad .$$

93 Risolvere l'equazione differenziale

$$y' = \frac{1}{\sqrt{x}}\, y \;+\; \mathrm{e}^{-4\sqrt{x}}\, y^3 \quad .$$

94 Determinare una funzione $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in modo che la forma differenziale

$$y\mathrm{e}^{-x}\, dx \;+\; \left[\varphi'(x) + \varphi(x) + y^2\right] dy$$

sia esatta in $\mathbb{R}^2$ e che risulti $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = -1$.
Trovare le primitive della forma differenziale così ottenuta.

95 Risolvere l'equazione differenziale

$$y''' - y'' - y' + y = \big(1 + e^x\big)e^{2x + e^x} \quad .$$

96 Risolvere l'equazione differenziale

$$y' - 4y = \frac{2xe^{6x}}{3\sqrt{y}} \quad .$$

97 Sia φ una funzione reale, definita e continua in $[0, \pi]$, tale da aversi

$$\varphi(x) \;=\; \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(x+t)\,\varphi(t)\,dt \;+\; x \qquad \forall x \in [0, \pi] \quad .$$

1) Dimostrare che φ è derivabile in $[0, \pi]$.
2) Dimostrare che φ è indefinitamente derivabile in $[0, \pi]$.
3) Dimostrare che φ è unica ed esprimerla mediante le funzioni elementari (suggerimento: determinare un'equazione differenziale lineare di cui φ è soluzione).

98 Risolvere l'equazione differenziale

$$y' + \frac{y}{x+1} = -y^2 \quad .$$

99 Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = xy + x\sqrt[4]{y} \\ y(1) = 1 \end{cases} \quad .$$

100 Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -\dfrac{x}{x^2+1}\,y - \dfrac{1}{(x^2+1)^2}\,\dfrac{1}{y} \\ y(0) = \sqrt{2} \end{cases} \quad .$$

101 Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -\dfrac{y}{x} + xy^2 \operatorname{sen} x \\ y(\dfrac{\pi}{2}) = -\dfrac{4}{\pi} \end{cases} \quad .$$

Soluzioni di alcuni esercizi

1 a) La funzione f è continua in tutto $\mathbb{R}^2$, qualunque sia $p > 0$.

b) Si ha $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0 \ \ \forall p > 0$; invece, se v è un qualunque vettore unitario diverso da $(1,0)$ e da $(0,1)$, la derivata $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ esiste soltanto se $p > \frac{1}{2}$, nel qual caso risulta $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = 0$.

c) La funzione f è differenziabile in $(0,0)$ per $p > \frac{1}{2}$.

d) Risulta

$$f_x(x,y) \begin{cases} = \dfrac{p|xy|^p}{x} & \text{se } xy \neq 0\,, \\ = 0 & \text{se } x = 0, y \neq 0 \text{ e } p > 1\,, \\ \nexists & \text{se } x = 0, y \neq 0 \text{ e } p \leq 1\,, \\ = 0 & \text{se } y = 0\,. \end{cases}$$

e) Si verifica facilmente che, per $p > 1$, le derivate parziali f_x e f_y, che esistono in tutto $\mathbb{R}^2$, sono continue in $(0,0)$, quindi sono verificate le ipotesi del teorema del differenziale totale. Invece, per $p \leq 1$, nessuna delle due derivate esiste in un tutto un intorno di $(0,0)$, quindi non sono verificate neanche le ipotesi della versione “più fine” del teorema del differenziale totale.

f) È stato già detto che per $p > 1$ la derivata f_x è continua in $(0,0)$.
Per $p \leq 1$ la derivata f_x esiste nell'insieme $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,y) \,:\, y \neq 0\}$, insieme che contiene $(0,0)$ e per il quale $(0,0)$ è un punto di accumulazione. Per $p = 1$ la f_x è continua in $(0,0)$; ciò segue facilmente dal fatto che la restrizione di f_x all'insieme $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, xy \neq 0\}$ è infinitesima per $(x,y) \to (0,0)$; infatti:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x|_A \ = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|xy|}{x} \ = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|}{x}\,|y| \ = \ 0$$

(prodotto di una funzione infinitesima per una limitata). Invece, per $p < 1$, la f_x non è continua in $(0,0)$; infatti il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x|_A \ = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{p|xy|^p}{x} \ = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|}{x}\,|x|^{p-1}|y|^p$$

non esiste (la restrizione al grafico della funzione $\varphi(x) = |x|^{(1-p)/p}$ è oscillante per $(x,y) \to (0,0)$).

g) Nell'insieme aperto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, xy \neq 0\}$ le derivate parziali f_x e f_y esistono e sono continue, e conseguentemente f è differenziabile, qualunque sia l'esponente $p > 0$.
Per i punti dell'insieme $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, xy = 0\} \setminus \{(0,0)\}$ si ha:

se $p \leq 1$, una delle due derivate parziali non esiste, quindi f non è differenziabile;

se $p > 1$, le derivate parziali f_x e f_y sono, come è facile verificare, continue in tutto $\mathbb{R}^2$, quindi f è differenziabile.

3 a) Per provare la continuità di f nei punti $(x_0, 0)$ è conveniente osservare che in tutti i punti della striscia $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, |y| \leq 1\}$ risulta $|f(x,y)| \leq |y|$.

b) Si ha:

$$f_x(x,y) = \begin{cases} 2xy|y|^{x^2} \log|y| & \text{se } y \neq 0\,, \\ 0 & \text{se } y = 0\,, \end{cases} \qquad f_y(x,y) = \begin{cases} (1+x^2)|y|^{x^2} & \text{se } y \neq 0\,, \\ 0 & \text{se } y = 0, x \neq 0\,, \\ 1 & \text{se } x = y = 0\,, \end{cases}$$

$$f_{xy}(x,y) = \begin{cases} 2x|y|^{x^2}\left[(1+x^2)\log|y|+1\right] & \text{se } y \neq 0\,, \\ 0 & \text{se } y = 0\,, \end{cases}$$

$$f_{yx}(x,y) = f_{xy}(x,y) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \quad ;$$

invece, nel punto $(0,0)$, la derivata f_{yx} non esiste .

c) Il limite, per $(x,y) \to (0,0)$, della restrizione di f_{xy} ad una qualunque retta passante per $(0,0)$ è uguale a zero. Invece, se si considera la restrizione al grafico della funzione (della variabile x) $\mathrm{e}^{-\frac{1}{|x|}}$ (grafico per il quale $(0,0)$ è un punto di accumulazione), si trova:

$$\lim_{x\to 0\pm} f_{xy}\big(x, \mathrm{e}^{-\frac{1}{|x|}}\big) \;=\; \lim_{x\to 0\pm} 2x\mathrm{e}^{-|x|}\left(-\frac{1}{|x|} - |x| + 1\right) \;=\; \mp 2 \quad .$$

d) Studiando la continuità delle derivate parziali prime si trova che f_x è continua in $\mathbb{R}^2$, f_y è continua in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, mentre il limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_y(x,y)$ non esiste. Per il teorema del differenziale totale possiamo allora concludere che f è differenziabile in tutti i punti di $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. Però, per la versione "più fine" del teorema del differenziale totale (che richiede l'esistenza, in un intorno del punto considerato, e la continuità, in tale punto, di una delle due derivate parziali e soltanto l'esistenza, nel punto considerato, dell'altra derivata) la f è differenziabile anche in $(0,0)$.
La differenziabilità di f nel punto $(0,0)$ si può anche acquisire in base alla definizione, osservando che il rapporto

$$\frac{\Delta f_{(0,0)}(x,y) - df_{(0,0)}(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad = \quad \frac{f(x,y) - y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

è uguale a zero nei punti $(x,0)$, $x \neq 0$, mentre, per $y \neq 0$, applicando il teorema di Lagrange alla funzione $t \to |y|^t$ nell'intervallo di estremi 0 e x^2, si ha

$$\frac{f(x,y)-y}{\sqrt{x^2+y^2}} \;=\; \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\big(|y|^{x^2} - 1\big) \;=\; \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\, x^2|y|^{\xi}\log|y| \;,$$

con $0 \le \xi = \xi(x,y) \le x^2$, e quindi

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\Delta f_{(0,0)}(x,y) - df_{(0,0)}(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \;=\; \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y}{|y|}\,\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\, x|y|^{\xi}|y|\log|y| \;=\; 0 \;,$$

dal momento che le funzioni $\frac{y}{|y|}$ e $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ sono limitate, $|y|^{\xi}$ è, per $(x,y) \to (0,0)$, definitivamente limitata (infatti $|y|^{\xi} \le 1$ per $0 < |y| \le 1$) e

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x \;=\; 0 \quad , \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} |y|\log|y| = \lim_{y\to 0} |y|\log|y| = 0 \quad .$$

6 a) La funzione f è continua in ogni punto di $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, qualunque sia $p > 0$; invece, nel punto $(0,0)$, f è continua se e soltanto se $p > 1$

b) Si ha $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0 \;\; \forall p > 0$; invece, se v è un qualunque vettore unitario diverso da $(1,0)$ e da $(0,1)$, la derivata $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ esiste soltanto se $p > \frac{3}{2}$, nel qual caso risulta $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = 0$.

c) La funzione f è differenziabile in $(0,0)$ per $p > \frac{3}{2}$.

d) Risulta

$$
f_x(x,y) \quad \begin{cases} = \dfrac{|xy|^p}{x(x^2+y^2)^2}\left[p(x^2+y^2)-2x^2\right] & \text{se } xy \neq 0\,, \\ \qquad\qquad = \ 0 & \text{se } x=0, y\neq 0 \text{ e } p>1\,, \\ \qquad\qquad\quad \nexists & \text{se } x=0, y\neq 0 \text{ e } p\leq 1\,, \\ \qquad\qquad = \ 0 & \text{se } y=0\,. \end{cases}
$$

e) Calcolando la restrizione di f_x all'insieme dei punti, diversi da $(0,0)$, di una retta di equazione $y = mx$, con $m \neq 0$, si trova:

$$
f_x(x,mx) \ = \ \frac{|m|^p}{(1+m^2)^2}\,\big[p(1+m^2)-2\big]\,\frac{|x|}{x}\,|x|^{2p-3} \quad ;
$$

ne segue facilmente che il limite, per $(x,y) \to (0,0)$, di tale restrizione esiste, e vale zero, se $p > \frac{3}{2}$, mentre, per $p \leq \frac{3}{2}$, il limite esiste (e vale zero) soltanto se $p(1+m^2)-2 = 0$, cioè $m = \pm\sqrt{\frac{2}{p}-1}$; se ne conclude che, per $p \leq \frac{3}{2}$, il limite

$$
\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y)
$$

non esiste, dunque f_x non è continua in $(0,0)$. Per decidere sulla continuità di f in $(0,0)$ nel caso $p > \frac{3}{2}$, osserviamo che la restrizione di f_x all'insieme aperto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, xy \neq 0\}$ può scriversi come segue:

$$
(*) \qquad\qquad f_x(x,y) = \frac{|x|}{x}\,\frac{|x|^{p-1}|y|^p}{x^2+y^2}\left[p - \frac{2x^2}{x^2+y^2}\right] \qquad\qquad \forall (x,y) \in A
$$

e che le funzioni $\frac{|x|}{x}$ e $p - \frac{2x^2}{x^2+y^2}$ sono limitate, mentre, per la funzione $g(x,y) = \frac{|x|^{p-1}|y|^p}{x^2+y^2}$, usando le coordinate polari, si ottiene la maggiorazione

$$
|g(x,y)| \ = \ |g(\rho\cos\theta, \rho \operatorname{sen}\theta)| \ = \ \frac{\rho^{2p-1}}{\rho^2}\,|\cos\theta|^{p-1}|\operatorname{sen}\theta|^p \ \leq \ \rho^{2p-3} \ = \ \sqrt{(x^2+y^2)^{2p-3}} \quad ,
$$

da cui segue che

$$
\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) \ = \ 0
$$

se $p > \frac{3}{2}$. Se ne deduce facilmente che, per $p > \frac{3}{2}$, la f_x è continua in $(0,0)$.

f) Nell'insieme aperto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, xy \neq 0\}$ le derivate parziali f_x e f_y esistono e sono continue, e conseguentemente f è differenziabile, qualunque sia l'esponente $p > 0$.
Per i punti $(x_0, 0)$ dell'insieme $X = \{(x_0,0) \,:\, x_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\}$, utilizzando l'espressione (*) per la restrizione di f_x all'insieme A e l'analoga espressione per la f_y, si hanno i seguenti risultati:

la derivata parziale f_x esiste in un intorno di $(x_0,0)$ ed è continua in $(x_0,0)$, qualunque sia l'esponente $p > 0$;

per $p > 1$ la derivata parziale f_y esiste in tutto $\mathbb{R}^2$ ed è continua in $(x_0,0)$;

per $p \leq 1$ non esiste né la derivata $f_y(x_0,y_0)$ né il limite

$$
\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} f_y(x,y) \quad .
$$

Analoghi risultati si hanno per i punti dell'insieme $Y = \{(0,y_0) \,:\, y_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$.
Di conseguenza, per quanto riguarda la differenziabilità di f nei punti (x_0,y_0) dell'insieme $X \cup Y = C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, xy = 0\} \setminus \{(0,0)\}$, si può concludere che f è differenziabile in (x_0,y_0) solo se $p > 1$.

11 I punti $(0, \pm\sqrt{10})$ sono di minimo relativo proprio; i punti $(\pm\frac{2}{3}\sqrt{10}, 0)$ sono di massimo relativo proprio.

12 I punti $(\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{11}{2}}, \frac{1}{2})$ sono di minimo relativo proprio; il punto $(0, -\frac{4}{3})$ è di massimo relativo proprio; i punti (x, x^2-2) sono di minimo relativo (non proprio) se $|x| < 1$ o $|x| > 2$ e di massimo relativo (non proprio) se $1 < |x| < 2$.

13 a) Il punto $\left(\frac{1}{\sqrt[5]{48}}, \frac{4}{\sqrt[5]{48^3}}\right)$ è di minimo relativo proprio.

b) $\max\limits_{C} f = 2 + \frac{2}{3\sqrt{3}} = f\left(1, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; $\min\limits_{C} f = 1 - \frac{5}{3\sqrt[5]{48^4}} = f\left(\frac{1}{\sqrt[5]{48}}, \frac{4}{\sqrt[5]{48^3}}\right)$.

14 Le soluzioni del sistema $f_x = f_y = 0$ sono i punti:

$$\text{a) } \left(-\tfrac{\pi}{2} + 2h\pi, -\tfrac{\pi}{2} + 2h\pi + 2k\pi\right) \ , \ \text{b) } \left(\tfrac{\pi}{6} + 2h\pi, \tfrac{\pi}{6} + 2h\pi + 2k\pi\right) \ , \ \text{c) } \left(\tfrac{5\pi}{6} + 2h\pi, \tfrac{5\pi}{6} + 2h\pi + 2k\pi\right) \ ,$$
$$\text{d) } \left(-\tfrac{\pi}{2} + 2h\pi, \tfrac{3\pi}{2} - 2h\pi + 2k\pi\right) \qquad (h, k \in \mathbb{Z}) \ .$$

Dall'esame delle derivate seconde si deduce che i punti del tipo b) e c) sono, rispettivamente, di minimo e di massimo relativo proprio. Nei punti del tipo a) e d) si annullano tutte le derivate seconde; però, considerando le restrizioni di f alle rette parallele alla retta $y = x$, passanti per i punti in questione, si trova che i punti del tipo a) e d) non sono di estremo relativo.

15 $\min\limits_{C} f = 0 = f(0,0)$; $\max\limits_{C} f = 2 = f(3,0)$.

17 a) Posto

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y > x^2\} \quad , \quad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y < x^2\} \ ,$$

si ha:

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= y(1-2x^2)e^{y-x^2} \quad , \quad f_y(x,y) = x(1+y)e^{y-x^2} \qquad \forall (x,y) \in A \ , \\ f_x(x,y) &= y(1+2x^2)e^{x^2-y} \quad , \quad f_y(x,y) = x(1+y)e^{x^2-y} \qquad \forall (x,y) \in B \ . \end{aligned}$$

Nei punti $(x_0, y_0) \in C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = x^2\}$ i limiti laterali del rapporto incrementale rispetto alla variabile x [y] valgono $y_0(1-2x_0^2)$ e $y_0(1+2x_0^2)$ [$x_0(1+y_0)$ e $x_0(1-y_0)$], pertanto l'unico di tali punti in cui esiste la derivata parziale f_x [f_y] è $(0,0)$ e si ha $f_x(0,0) = 0$ [$f_y(0,0) = 0$].

b) La funzione f è differenziabile in tutti i punti di $A \cup B \cup \{(0,0)\}$.

Per i punti di $A \cup B$ ciò segue subito dal teorema del differenziale totale. In $(0,0)$ si ha

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f_x(0,0)x - f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xye^{|y-x^2|}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\, ye^{|y-x^2|} = 0 \ , \end{aligned}$$

dato che $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ è una funzione limitata.

c) Il sistema $f_x = f_y = 0$ ha come unica soluzione $(0,0)$, pertanto non vi sono punti di estremo relativo in $A \cup B$. D'altra parte, essendo $f(x,y) = x^3 \ \forall (x,y) \in C$, neanche i punti di C sono di estremo relativo per f.

d) $\min\limits_{K} f = 0$ (viene preso nei punti $(x,y) \in K$ tali che $x = 0$ o $y = 0$); $\max\limits_{K} f = \sqrt{\frac{e}{2}} = f(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$.

25 La rappresentazione parametrica data assicura che la curva Γ è semplice (infatti la funzione $\varphi_2(t) = \frac{\sqrt{t}+t^{50}}{2}$, $t \in [0,1]$, è crescente) ma non che Γ sia regolare (φ_2 non è derivabile per $t = 0$). Per avere una parametrizzazione regolare di Γ basta effettuare il cambiamento di parametro $t = s^2$, $s \in [0,1]$; si ottiene così la parametrizzazione regolare di Γ:

$$x = s^2(1-s^2) \quad , \quad y = \frac{s + s^{100}}{2} \ , \qquad\qquad s \in [0,1] \ .$$

Per quanto riguarda la forma differenziale assegnata si trova:

$$\int_\Gamma \mathrm{e}^{x^2y}(1+2x^2y)\,dx \ + \ (x^3\mathrm{e}^{x^2y} + (1+y^2)^{-1})\,dy \ = \ \frac{\pi}{4} \ ,$$

$$\int \mathrm{e}^{x^2y}(1+2x^2y)\,dx \ + \ (x^3\mathrm{e}^{x^2y} + (1+y^2)^{-1})\,dy \ = \ x\mathrm{e}^{x^2y} + \operatorname{arctg} y \ + \ k.$$

27 $\frac{2}{3}$.

28 $2\pi - 1 + \frac{1}{4\pi^2+1}$.

35 Supponiamo, per assurdo, che vi sia un punto $c \in I$ nel quale la funzione φ non sia continua, cioè esista $\varepsilon^* > 0$ tale che

$$\forall \delta > 0 \quad \exists x \in]c-\delta, c+\delta[\cap I \ : \ |\varphi(x) - \varphi(c)| \geq \varepsilon^* \ ,$$

e quindi, in particolare (prendendo $\delta = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$),

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \ \exists x_n \in]c - \tfrac{1}{n}, c + \tfrac{1}{n}[\cap I \ : \ |\varphi(x_n) - \varphi(c)| \geq \varepsilon^* \ .$$

Poiché K è compatto, la successione $\{(x_n, \varphi(x_n)\}$, che si viene così a determinare, ha un'estratta, $\{(x_{n_k}, \varphi(x_{n_k})\}$, convergente ad un punto $(\overline{x}, \overline{y}) \in K$, cioè:

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} \ = \ \overline{x} \quad , \quad \lim_{k\to\infty} \varphi(x_{n_k}) \ = \ \overline{y} \ .$$

Poiché, per costruzione, la successione $\{x_n\}$ è tale che:

$$|x_n - c| \leq \tfrac{1}{n} \quad , \quad |\varphi(x_n) - \varphi(c)| \geq \overline{\varepsilon} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \ ,$$

si ha:

$$\overline{x} \ = \ \lim_{k\to\infty} x_{n_k} \ = \ \lim_{n\to\infty} x_n \ = \ c \quad , \quad |\overline{y} - \varphi(c)| \ = \ \lim_{k\to\infty} |\varphi(x_{n_k}) - \varphi(c)| \geq \varepsilon^* \ ;$$

inoltre, dalla continuità di f nel punto $(c, \overline{y})$, si ricava che

$$f(c, \overline{y}) \ = \ \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}, \varphi(x_{n_k})) \ = \ \lim_{k\to\infty} 0 \ = \ 0 \ .$$

Allora la funzione $\varphi_1 : I \to \mathbb{R}$, definita ponendo

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{se } x \in I \setminus \{c\}, \\ \overline{y} & \text{se } x = c, \end{cases}$$

è una funzione implicita relativa all'equazione $f(x,y) = 0$, definita nell'insieme I e diversa dalla funzione φ. Questa conclusione è però assurda in quanto viene ad essere contraddetta l'ipotesi iii).

Controesempi. i) $f(x,y) = (xy-1)(x^2+y^2)$.
L'unica funzione implicita φ, definita in tutto $\mathbb{R}$, è $\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{cases}$ che non è continua.

ii) $f(x,y) = \begin{cases} y - 1 & \text{se } x \leq 0, \\ y + 1 & \text{se } x > 0. \end{cases}$

Anche in questo caso l'unica funzione implicita φ, definita in tutto $\mathbb{R}$, cioè $\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \le 0, \\ -1 & \text{se } x > 0, \end{cases}$ non è continua.

iii) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1,\ K = [-1,1]^2,\ \varphi(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & \text{se } x \in [-1,0[\,, \\ -\sqrt{1-x^2} & \text{se } x \in [0,1]\,. \end{cases}$

40

$$\text{a)} \quad \iint_T \big|y^2 - |x|\big|\, dx\, dy \ = \ 4 \iint_{[0,1]^2} \big|y^2 - x\big|\, dx\, dy \ =$$

$$= \ 4 \left[\int_0^1 dy \int_0^{y^2} (y^2 - x)\, dx \ + \ \int_0^1 dy \int_{y^2}^1 (x - y^2)\, dx \right] \ = \ \frac{22}{15} \quad ;$$

$$\text{b)} \quad \iint_T \big|y^2 - |x|\big|\, dx\, dy \ = \ 2 \iint_D \big|y^2 - x\big|\, dx\, dy \ =$$

$$\Big(\text{essendo } \ D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \le x \le 1\,,\ x^2 \le y \le 1\} \Big)$$

$$= \ 2 \left[\int_0^1 dy \int_0^{y^2} (y^2 - x)\, dx \ + \ \int_0^1 dy \int_{y^2}^{\sqrt{y}} (x - y^2)\, dx \right] \ = \ \frac{23}{70} \quad ;$$

$$\text{c)} \quad \iint_T \big|y^2 - |x|\big|\, dx\, dy \ = \ \int_0^1 dy \int_{1+2\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2}}^3 (x - y^2)\, dx \ = \ \frac{7}{3} - \frac{4}{\pi^3}\big(\pi^2 - 4\pi + 8\big) \quad .$$

41

$$\text{a)} \quad \iint_T x\sqrt{\frac{1+y}{1-y}}\, dx\, dy \ = \ \int_{-\frac12}^{\frac12} \sqrt{\frac{1+y}{1-y}}\, dy \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}} x\, dx \ = \ 2 \quad ;$$

$$\text{b)} \quad \iint_T x\sqrt{\frac{1+y}{1-y}}\, dx\, dy \ = \ \int_{-\frac12}^{\frac12} \sqrt{\frac{1+y}{1-y}}\, dy \int_{1-\sqrt{1-y^4}}^{1+\sqrt{1-y^4}} x\, dx \ = \ 2 \int_{-\frac12}^{\frac12} \sqrt{\frac{1+y}{1-y}}\, \sqrt{1-y^4}\, dy \ =$$

$$= \ 2 \int_{-\frac12}^{\frac12} (1+y)\sqrt{1+y^2}\, dy \ = \ 2 \int_{-\frac12}^{\frac12} \sqrt{1+y^2}\, dy \ + \ 2 \int_{-\frac12}^{\frac12} y\sqrt{1+y^2}\, dy \ =$$

$$= \ 4 \int_0^{\frac12} \sqrt{1+y^2}\, dy \ = \ 2 \Big[y\sqrt{1+y^2} + \log\big(y + \sqrt{1+y^2}\big) \Big]_0^{\frac12} \ = \ \frac{\sqrt5}{2} \ + 2\log\frac{\sqrt5 + 1}{2} \quad .$$

43 a) Le disequazioni che definiscono l'insieme T suggeriscono di cercare un cambiamento di variabili $(x,y) = \Phi(u,v)$ per il quale si abbia

$$(*) \qquad \begin{cases} x - y = \mathrm{e}^u \\ x + 2y = \mathrm{e}^v \end{cases} \quad .$$

Infatti, se si riesce a trovare una funzione $\Phi : A \to \mathbb{R}^2$ (A aperto di $\mathbb{R}^2$) soddisfacente le ipotesi del teorema di cambiamento delle variabili negli integrali multipli (in particolare l'ipotesi di iniettività), con $\Phi(A) \supseteq T$, e tale, inoltre, che, per ogni $(u,v) \in A$, posto $(x,y) = \Phi(u,v)$, riescano verificate le (*), allora, per $(u,v) \in A$, valgono le equivalenze

$$\Phi(u,v) \in T \iff \begin{cases} 1 \le \mathrm{e}^u \le \mathrm{e} \\ \mathrm{e}^{u^2} \le \mathrm{e}^v \le \mathrm{e} \end{cases} \iff \begin{cases} 0 \le u \le 1 \\ u^2 \le v \le 1 \end{cases} \iff (u,v) \in D \quad ,$$

dove D è il dominio normale rispetto all'asse v così definito:

$$D = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \leq u \leq 1,\ u^2 \leq v \leq 1\} \quad ;$$

si ha, pertanto, $T = \Phi(D)$ e quindi, grazie al teorema di cambiamento delle variabili negli integrali multipli, si può concludere che T è, al pari di D, un dominio di $\mathbb{R}^2$, limitato e misurabili secondo Peano-Jordan.
Cerchiamo di determinare la funzione Φ. Osserviamo che, per ogni $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, il sistema (*) (nelle incognite x e y) ha un'unica soluzione:

$$(**) \qquad x \;=\; \tfrac{1}{3}\big(2\mathrm{e}^u + \mathrm{e}^v\big) \quad , \quad y \;=\; \tfrac{1}{3}\big(\mathrm{e}^v - \mathrm{e}^v\big) \quad ,$$

pertanto la funzione Φ cercata è la $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita ponendo:

$$\Phi(u,v) \;=\; \Big(\tfrac{1}{3}\big(2\mathrm{e}^u + \mathrm{e}^v\big)\,,\, \tfrac{1}{3}\big(\mathrm{e}^v - \mathrm{e}^v\big)\Big) \qquad\qquad \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2 \quad .$$

Tale funzione Φ è definita in un insieme aperto, è di classe C^1 ed il suo determinante jacobiano

$$J_\Phi(u,v) \;=\; \begin{vmatrix} \frac{2}{3}\mathrm{e}^u & \frac{1}{3}\mathrm{e}^v \\ -\frac{1}{3}\mathrm{e}^u & \frac{1}{3}\mathrm{e}^v \end{vmatrix} \;=\; \tfrac{1}{3}\mathrm{e}^{u+v}$$

è sempre diverso da zero; inoltre Φ è iniettiva; infatti il sistema (**), nelle incognite e^u e e^v, è un sistema di Cramer e quindi lo stesso sistema, considerato nelle incognite u e v, ha al più una soluzione. Infine, tenendo presente che l'insieme immagine di $\mathbb{R}^2$ mediante la funzione $(u,v) \to (\mathrm{e}^u, \mathrm{e}^v)$ è il quadrante $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$, si prova facilmente che l'insieme immagine $B = \Phi(\mathbb{R}^2)$ è l'insieme aperto

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x - y > 0\,,\, x + 2y > 0\} \quad ,$$

che, ovviamente, contiene T.
b) Per calcolare l'integrale doppio

$$\iint_T \left|\log\frac{x-y}{x+2y}\right| \frac{1}{(x-y)(x+2y)}\,dx\,dy$$

utilizziamo il cambiamento di variabili $(x,y) = \Phi(u,v)$ trovato in a):

$$\iint_T \left|\log\frac{x-y}{x+2y}\right| \frac{1}{(x-y)(x+2y)}\,dx\,dy \;=\; \iint_D \left|\log\frac{\mathrm{e}^u}{\mathrm{e}^v}\right| \frac{1}{\mathrm{e}^u\mathrm{e}^v}\,\frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{u+v}\,du\,dv \;=$$

$$=\; \frac{1}{3}\iint_D |u-v|\,du\,dv \;=\; \int_0^1 du \int_{u^2}^{u}(u-v)dv \;+\; \int_0^1 du \int_u^1 (v-u)dv \;=\; \frac{11}{180} \quad .$$

44

$$\iiint_T z\,dx\,dy\,dz \;=\; \iint_D dx\,dy \int_0^y z\,dz \;=$$

$\big($essendo $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, |x| \leq 1\,,\, 0 \leq y \leq \min\{(x-1)^2, (x+1)^2\}\}\big)$

$$=\; \int_{-1}^0 \int_0^{(x+1)^2} \int_0^y z\,dz \;+\; \int_0^1 \int_0^{(x-1)^2} \int_0^y z\,dz \;=\; \frac{1}{21} \quad .$$

45 a) Possiamo scrivere l'insieme T come insieme normale rispetto al piano xy nel modo seguente:

$$T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 0 \le x \le 1,\, 0 \le y \le (1-x^3)^2,\, x^3 + \sqrt{y} \le z \le 1\} = \\ = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, (x,y) \in D,\, x^3 + \sqrt{y} \le z \le 1\} \quad ,$$

avendo posto

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \le x \le 1,\, 0 \le y \le (1-x^3)^2\} \quad .$$

L'insieme "base" D è, a sua volta, un insieme normale rispetto all'asse x e, dato che le funzioni 0 e $(1-x^3)^2$ sono continue in $[0,1]$, verificano la disuguaglianza $0 \le (1-x^3)^2 \;\; \forall x \in [0,1]$ e non esiste alcun sottointervallo aperto di $[0,1]$ in ogni punto del quale sia verificata l'uguaglianza $0 = (1-x^3)^2$, si può affermare che D è un dominio limitato di $\mathbb{R}^2$, misurabile secondo Peano-Jordan. Per lo stesso motivo, dato che le funzioni $x^3+\sqrt{y}$ e 1 sono continue in D, verificano la disuguaglianza $x^3+\sqrt{y} \le 1 \;\; \forall (x,y) \in D$ e non esiste alcun disco aperto contenuto in D in ogni punto del quale sia verificata l'uguaglianza $x^3 + \sqrt{y} = 1$, si può concludere che l'insieme T è un dominio limitato di $\mathbb{R}^3$, misurabile secondo Peano-Jordan.

b) È possibile considerare T dominio normale rispetto ad ognuno dei piani xy, xz e yz; inoltre, in ciascuno dei tre casi, è possibile considerare il dominio "base" D dominio normale rispetto a ciascuno dei due assi coordinati che individuano il suo piano. Si ottengono così le sei formule di riduzione:

$$\iiint_T f(x,y,x)\,dx\,dy\,dz \quad =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{(1-x^3)^2} dy \int_{x^3+\sqrt{y}}^1 f(x,y,x)\,dz \;=\; \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt[3]{1-\sqrt{y}}} dx \int_{x^3+\sqrt{y}}^1 f(x,y,x)\,dz \;=$$

$$= \int_0^1 dx \int_{x^3}^1 dz \int_0^{(z-x^3)^2} f(x,y,x)\,dy \;=\; \int_0^1 dz \int_0^{\sqrt[3]{z}} dx \int_0^{(z-x^3)^2} f(x,y,x)\,dy \;=$$

$$= \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^1 dz \int_0^{\sqrt[3]{z-\sqrt{y}}} f(x,y,x)\,dx \;=\; \int_0^1 dz \int_0^{z^2} dy \int_0^{\sqrt[3]{z-\sqrt{y}}} f(x,y,x)\,dx \quad .$$

47 *Prima soluzione.* Possiamo considerare T dominio normale rispetto all'asse y. Si ha:

$$T = T_1 \cup T_2 \quad ,$$

$$T_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \le y \le \tfrac{3}{2}\,,\, \tfrac{1}{y} \le x \le 2 - \tfrac{1}{y}\} \quad ,$$

$$T_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \tfrac{3}{2} \le y \le 2\,,\, 2 - \tfrac{2}{y} \le x \le \tfrac{2}{y}\} \quad ,$$

pertanto

$$\iint_T y\,dx\,dy \;=\; \int_1^{\frac{3}{2}} y\,dy \int_{\frac{1}{y}}^{2-\frac{1}{y}} dx \;+\; \int_{\frac{3}{2}}^2 y\,dy \int_{2-\frac{2}{y}}^{\frac{2}{y}} dx \;=\; \int_1^{\frac{3}{2}} (2y-2)\,dy \;+\; \int_{\frac{3}{2}}^2 (4-2y)\,dy \;=\; \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \;=\; \frac{1}{2} \quad .$$

Seconda soluzione. Le disequazioni che definiscono l'insieme T suggeriscono di cercare un cambiamento di variabili $(x,y) = \Phi(u,v)$ tale che

$$(*) \qquad \begin{cases} xy = u \\ (x-2)y = v \end{cases}$$

(infatti un cambiamento di variabili di questo tipo trasforma il dominio di integrazione nel rettangolo $[1,2]\times[-2,-1]$).
Risolvendo il sistema (*) rispetto alle incognite x e y si trova che:

- se $u\neq v$ vi è un'unica soluzione: $x=\frac{2u}{u-v}$, $y=\frac{u-v}{2}$;
- se $u=v$ il sistema è impossibile per $u\neq 0$ ed indeterminato (con le infinite soluzioni $(x,0)\,,\ x\in\mathbb{R}$) se $u=0$.

Pertanto, considerata l'applicazione $(x,y)\to\big(xy,(x-2)y\big)=\big(xy,xy-2y\big)$, da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$, si ha che la sua restrizione Ψ all'insieme $\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ y\neq 0\}$ (insieme che, ovviamente, contiene il dominio T) è una bigezione tra Ω e $A=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2\ :\ u\neq v\}$ e l'inversa di Ψ è l'applicazione $\Phi: A\to\mathbb{R}^2$, data da: $\Phi(u,v)=\big(\frac{2u}{u-v},\frac{u-v}{2}\big)\ \forall(u,v)\in A$.
L'applicazione Φ verifica le ipotesi del teorema sul cambiamento delle variabili negli integrali multipli; essa è, infatti, definita in un insieme aperto, è iniettiva e di classe C^1 ed il suo determinante jacobiano

$$J_\Phi(u,v)\ =\ \begin{vmatrix} \frac{2(u-v)-2u}{(u-v)^2} & \frac{2u}{(u-v)^2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{vmatrix}\ =\ \frac{1}{v-u}$$

è sempre diverso da zero nell'insieme A.
Come abbiamo già anticipato, l'insieme $\Phi^{-1}(T)$ è il rettangolo $D=[1,2]\times[-2,-1]$, pertanto, effettuando il cambiamento di variabili $(x,y)=\Phi(u,v)$ nell'integrale da calcolare, si ha:

$$\iint_T y\,dx\,dy\ =\ \iint_D \frac{u-v}{2}\left|\frac{1}{v-u}\right|du\,dv\ =$$

(dato che nell'insieme D risulta $v-u<0$)

$$=\ \iint_D \frac{1}{2}\,du\,dv\ =\ \frac{1}{2}\quad .$$

50

$$\iint_T \frac{|x+y-1|}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy\ =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\cos\theta+\mathrm{sen}\,\theta}} \frac{1-\rho(\cos\theta\mathrm{sen}\,\theta)}{\rho^3}\,d\rho\ +\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_{\frac{1}{\cos\theta+\mathrm{sen}\,\theta}}^{1} \frac{\rho(\cos\theta\mathrm{sen}\,\theta)-1}{\rho^3}\,d\rho\ +$$

$$+\ \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} d\theta\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1-\rho(\cos\theta\mathrm{sen}\,\theta)}{\rho^3}\,d\rho\ =\ 2(2\pi-1)\quad .$$

51 Posto, per ogni $r\in[0,+\infty[$,

$$T_r\ =\ \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ x^2+y^2\leq r^2\}\quad ,$$

si ha

$$\iiint_T \Big[\mathrm{e}^{z^2}\sqrt{x^2+y^2}\ +\ z\,\mathrm{sen}\,\big(1-x^2-y^2\big)^2\Big]\,dx\,dy\,dz\ =$$

$$=\ \int_0^1 \mathrm{e}^{z^2}\,dz\iint_{T_z}\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\ +\ \iint_{T_1}\mathrm{sen}\,\big(1-x^2-y^2\big)^2\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 z\,dz\ =\ \frac{\pi}{12}\big(7\ -\ 3\cos 1\big)\quad .$$

52 Osserviamo che le disuguaglianze che definiscono T possono scriversi:

$$x - y \geq 0 \ , \ y - z \geq 0 \ , \ 1 \leq (x-y)^2 + (y-z)^2 \ , \ (x-y)^2 + (y-z)^2 + (2z)^2 \leq 4 \ ,$$

pertanto, se consideriamo l'applicazione $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definita ponendo

$$\Psi(x,y,z) = \big(x-y, y-z, 2z\big) \qquad \forall (x,y.z) \in \mathbb{R}^3 \ ,$$

abbiamo che T è uguale alla controimmagine $\Psi^{-1}(D)$ dell'insieme

$$D = \{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 : u \geq 0 \, , \, v \geq 0 \, , \, 1 \leq u^2 + v^2 \, , \, u^2 + v^2 + w^2 \leq 4\} \ ,$$

insieme che, come facilmente si verifica, è un dominio di $\mathbb{R}^3$, limitato e misurabile secondo Peano-Jordan (basta scrivere l'insieme D come insieme normale rispetto al piano uv:

$$D = \{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 : (u,v) \in E \, , \, \alpha(u,v) \leq w \leq \beta(u,v)\} \ ,$$

dove l'insieme "base" E è dato da

$$E = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u \geq 0 \, , \, v \geq 0 \, , \, 1 \leq u^2 + v^2 \leq 4\}$$

e le funzioni α e β sono

$$\alpha(u,v) = -\sqrt{4 - (u^2+v^2)} \quad , \quad \beta(u,v) = \sqrt{4 - (u^2+v^2)} \ ,$$

ed osservare che E è un dominio di $\mathbb{R}^2$, limitato e misurabile secondo Peano-Jordan, le due funzioni α e β sono continue in E, verificano la disuguaglianza $\alpha(u,v) \leq \beta(u,v)$ $\forall (u,v) \in E$ e non esiste alcun sottoinsieme aperto, non vuoto, A di E tale che $\alpha(u,v) = \beta(u,v)$ $\forall (u,v) \in A$).
Osserviamo ancora che l'applicazione Ψ è una bigezione tra $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^3$; infatti, per ogni $(u,v,w) \in \mathbb{R}^3$, l'equazione $\Psi(x,y,z) = (u,v.w)$, cioè il sistema $x - y = u \, , \, y - z = v \, , \, 2z = w$, ha un'unica soluzione: $(x,y,z) = (u + v + \frac{w}{2}, v + \frac{w}{2}, \frac{w}{2})$, sicché Ψ è una bigezione ed è uguale all'inversa della funzione $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, data da

$$\Phi(u,v,w) = \big(u + v + \tfrac{w}{2}, v + \tfrac{w}{2}, \tfrac{w}{2}\big) \qquad \forall (u,v,w) \in \mathbb{R}^3 \ .$$

La funzione Φ verifica le ipotesi del teorema di cambiamento delle variabili negli integrali multipli; essa, infatti, è definita in un insieme aperto (l'intero $\mathbb{R}^3$), è iniettiva e di classe C^1 ed il suo determinante jacobiano è sempre diverso da zero:

$$J_\Phi(u,v,w) = \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)}{\partial(u,v,w)} = \frac{1}{2} \qquad \forall (u,v,w) \in \mathbb{R}^3 \ .$$

Il teorema di cambiamento delle variabili assicura allora che l'insieme $T = \Phi(D)$ è, al pari di D, un dominio di $\mathbb{R}^3$, limitato e misurabile secondo Peano-Jordan; inoltre, effettuando il cambiamento di variabili $(x,y,z) = \Phi(u,v,w)$, si ha:

$$\iiint_T \frac{1}{\sqrt{(x-y)^2 + (y-z)^2}} \, dx \, dy \, dz = \frac{1}{2} \iiint_D \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}} \, du \, dv \, dw \ .$$

Per calcolare l'integrale del secondo membro osserviamo che dalle disequazioni che definiscono D si deduce che

$$D(w) \neq \emptyset \iff 1 \leq 4 - w^2 \iff |w| \leq \sqrt{3}$$

e per tali valori di w la sezione $D(w)$ è data da

$$D(w) = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u \geq 0 \, , \, v \geq 0 \, , \, 1 \leq u^2 + v^2 \leq 4 - w^2\} \ ,$$

dunque si tratta di un dominio limitato e misurabile di $\mathbb{R}^2$ (settore di corona circolare), se $|w| < \sqrt{3}$, ovvero di un insieme di misura nulla (grafico della funzione $v = \sqrt{1-u^2}$, $u \in [0,1]$), se $|w| = \sqrt{3}$. Per $|w| < \sqrt{3}$, adoperando le coordinare polari, si trova:

$$\iint_{D(w)} \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\, du\, dv \;=\; \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_1^{\sqrt{4-w^2}} d\rho \;=\; \frac{\pi}{2}\Big(\sqrt{4-w^2}-1\Big)\ ;$$

osservando che, per $|w| = \sqrt{3}$, si ha $\frac{\pi}{2}\Big(\sqrt{4-w^2}-1\Big) = 0$, possiamo allora concludere che l'uguaglianza

$$\iint_{D(w)} \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\, du\, dv \;=\; \frac{\pi}{2}\Big(\sqrt{4-w^2}-1\Big)$$

è vera per ogni $w \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$, dunque

$$w \;\to\; \iint_{D(w)} \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\, du\, dv$$

è una funzione continua in $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$. È allora lecito applicare, per il calcolo dell'integrale esteso a D, la formula di riduzione per sezioni parallele al piano uv:

$$\iiint_T \frac{1}{\sqrt{(x-y)^2+(y-z)^2}}\, dx\, dy\, dz \;=\; \frac{1}{2}\iiint_D \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\, du\, dv\, dw \;=\; \frac{1}{2}\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{\pi}{2}\Big(\sqrt{4-w^2}-1\Big)\, dw \;=$$

(dato che la funzione integranda è pari)

$$=\; \frac{\pi}{2}\int_0^{\sqrt{3}} \Big(\sqrt{4-w^2}-1\Big)\, dw \;=\; \frac{\pi}{2}\left[2\text{arcsen}\,\frac{w}{2} \;+\; \frac{w}{2}\sqrt{4-w^2} \;-\; w\right]_0^{\sqrt{3}} \;=\; \frac{\pi}{2}\left[\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right].$$

53 a) *Prima soluzione.* Riscriviamo in maniera opportuna le disequazioni che definiscono T:

$$\begin{cases} 0 \le z \le xy \\ x^4 \le x^2y^2 + z^2 \le 4x^2 \\ 1 \le x \le 2 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 \le x \le 2 \\ 0 \le z \le xy \\ x^2(x^2-y^2) \le z^2 \le x^2(4-y^2) \end{cases} \iff$$

(dalla seconda riga, tenuto conto della prima, segue $y \ge 0$; dalla terza riga si ha $4 - y^2 \ge 0$ e quindi $y \le 2$)

$$\iff \begin{cases} 1 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le 2 \\ 0 \le z \le xy \\ x^2(x^2-y^2) \le z^2 \le x^2(4-y^2) \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 1 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le 2 \\ 0 \le z \le xy \\ \max\left\{0, x^2(x^2-y^2)\right\} \le z^2 \le \min\left\{x^2(4-y^2), x^2y^2\right\} \end{cases} \iff$$

(dall'ultima riga segue $x^2(x^2 - y^2) \leq x^2y^2$ e da questa, tenuto delle prime due righe, segue ancora $\frac{x}{\sqrt{2}} \leq y$)

$$\iff \quad \begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ \frac{x}{\sqrt{2}} \leq y \leq 2 \\ 0 \leq z \leq xy \\ \max\left\{0, x^2(x^2 - y^2)\right\} \leq z^2 \leq \min\left\{x^2(4 - y^2), x^2y^2\right\} \end{cases} \quad \iff$$

$$\iff \quad \begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ \frac{x}{\sqrt{2}} \leq y \leq 2 \\ \sqrt{\max\left\{0, x^2(x^2 - y^2)\right\}} \leq z \leq \sqrt{\min\left\{x^2(4 - y^2), x^2y^2\right\}} \end{cases} .$$

Abbiamo così provato che T è un insieme normale del tipo

$$\begin{cases} (x, y) \in D \\ \alpha(x, y) \leq z \leq \beta(x, y) \end{cases} .$$

Per tale insieme sono verificate tutte le ipotesi atte a garantire che si tratti di un dominio limitato di $\mathbb{R}^3$, misurabile secondo Peano-Jordan; infatti:

- l'insieme base $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 1 \leq x \leq 2 \, , \ \frac{x}{\sqrt{2}} \leq y \leq 2\}$ è un dominio di $\mathbb{R}^2$, limitato e misurabile secondo Peano-Jordan (è un trapezio);
- le funzioni $\alpha(x, y) = \sqrt{\max\left\{0, x^2(x^2 - y^2)\right\}}$ e $\beta(x, y) = \sqrt{\min\left\{x^2(4 - y^2), x^2y^2\right\}}$ sono definite e continue in D e risulta, come facilmente si verifica, $\alpha(x, y) < \beta(x, y) \ \forall (x, y) \in D^\circ$.

Seconda soluzione. L'osservazione che

$$\begin{cases} 0 \leq z \leq xy \\ x^4 \leq x^2y^2 + z^2 \leq 4x^2 \\ 1 \leq x \leq 2 \end{cases} \quad \iff \quad \begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq \dfrac{z}{x} \leq y \\ x^2 \leq y^2 + \left(\dfrac{z}{x}\right)^2 \leq 4x \end{cases}$$

suggerisce di considerare un cambiamento di variabili $(x, y, z) = \Phi(u, v, w)$ per il quale si abbia

$$x = u \ , \ y = v \ , \ \frac{z}{x} = w \ \ ,$$

vale a dire

$$x = u \ , \ y = v \ , \ z = uw \ \ .$$

Consideriamo pertanto la funzione $\Phi : A = \big(\mathbb{R} \setminus \{0\}\big) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo

$$\Phi(u, v, w) \ = \ (u, v, uw) \qquad \forall (u, v, w) \in A \ \ .$$

Tale funzione è una bigezione tra l'insieme A e l'insieme A stesso, è di classe C^1 ed il suo determinante jacobiano

$$J_\Phi(u, v, w) \ = \ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ w & 0 & u \end{vmatrix} \ = \ u$$

è sempre diverso da zero in A; sono quindi soddisfatte tutte le ipotesi del teorema sul cambiamento delle variabili negli integrali multipli. È ovvio che $T \subseteq A$ e

$$\Phi^{-1}(T) \;=\; \{(u,v,w) \,:\, 1 \le u \le 2\,,\, 0 \le w \le v\,,\, u^2 \le v^2+w^2 \le 4\} \quad .$$

È inoltre facile verificare che l'insieme $S = \Phi^{-1}(T)$ è un dominio di $\mathbb{R}^3$, limitato e misurabile secondo Peano-Jordan; infatti si ha

$$\begin{cases} 1 \le u \le 2 \\ 0 \le w \le v \\ u^2 \le v^2+w^2 \le 4 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 \le v^2+w^2 \le 4 \\ 0 \le w \le v \\ 1 \le u^2 \le v^2+w^2 \\ 1 \le u \le 2 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 \le v^2+w^2 \le 4 \\ 0 \le w \le v \\ 1 \le u \le \sqrt{v^2+w^2} \end{cases} \quad ,$$

sicché S è un insieme normale rispetto al piano vw:

$$S \;=\; \{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 \,:\, (v,w) \in E\,,\, \gamma(v,w) \le u \le \delta(v,w)\ \forall (v,w) \in E\} \quad ,$$

per il quale sono verificate le ipotesi che assicurano che si tratta di un dominio di $\mathbb{R}^3$, limitato e misurabile secondo Peano-Jordan: l'insieme base E è un dominio di $\mathbb{R}^2$, limitato e misurabile secondo Peano-Jordan (settore di corona circolare) e le funzioni $\gamma(v,w) = 1$ e $\delta(v,w) = \sqrt{v^2+w^2}$ sono continue in E e soddisfano la disuguaglianza $\gamma(v,w) < \delta(v,w)\ \forall (u,v) \in E^\circ$. Per il teorema sul cambiamento delle variabili negli integrali multipli possiamo concludere che anche l'insieme $T = \Phi(S)$ è un dominio di $\mathbb{R}^3$, limitato e misurabile secondo Peano-Jordan.

b) Utilizzando il cambiamento di variabili introdotto in a) (*seconda soluzione*) si ha:

$$\iiint_T \left(xy^2 + \frac{z^2}{x} \right) dx\,dy\,dz \;=\; \iiint_S u^2\,(v^2+w^2)\; du\,dv\,dw \;=$$

$$= \iint_E (v^2+w^2)\; dv\,dw \int_1^{\sqrt{v^2+w^2}} u^2\,du \;=\; \frac{1}{3}\int_E (v^2+w^2)\left[(v^2+w^2)^{\frac{3}{2}} - 1 \right] dv\,dw \;=$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_1^2 \left[\rho^6 - \rho^3\right] d\rho \;=\; \frac{\pi}{12}\left[\frac{127}{7} - \frac{31}{4} \right] \quad .$$

54

$$\iiint_T |z|\,\mathrm{arctg}\,(x^2+4y^2)\,dx\,dy\,dz \;=$$

$\big($dato che $(x,y,z) \in T \implies (x,y,-z) \in T\,,\ f(x,y,-z) = f(x,y,z)\big)$

$$= \; 2\iiint_{T_1} |z|\,\mathrm{arctg}\,(x^2+4y^2)\,dx\,dy\,dz \;=$$

$\big($essendo $T_1 = T \cap \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, z \ge 0\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+4y^2 \le 1\,,\ \sqrt{x^2+4y^2} \le z \le 1\}\big)$

$$= \; 2\iint_D \mathrm{arctg}\,(x^2+4y^2)\,dx\,dy \int_{\sqrt{x^2+4y^2}}^1 z\,dz \;=\; \iint_D \big(1-(x^2+4y^2)\big)\,\mathrm{arctg}\,(x^2+4y^2)\,dx\,dy \;=$$

$\big($essendo $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+4y^2 \le 1\}\big)$

$$= \frac{1}{2}\int_{D'} \big(1-(u^2+v^2)\big)\,\mathrm{arctg}\,(u^2+v^2)\,du\,dv \ =$$

$\big(D' = \{(u,v)\in\mathbb{R}^2 \,:\, u^2+v^2\le 1\}\big)$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho(1-\rho^2)\,\mathrm{arctg}\,\rho^2\,d\rho \ =$$

$$= \frac{\pi}{4}\Big[\rho^2 - \big(\rho^2-1\big)^2\mathrm{arctg}\,\rho^2 - \log\big(\rho^2+1\big)\Big]_0^1 \ = \ \frac{\pi}{4}\big(1-\log 2\big) \quad .$$

55 a) Riscriviamo le disequazioni che definiscono l'insieme T nel modo seguente:

$$\begin{cases} z\ge 0 \\ 1\le 4x^2+y^2+z^2\le 4 \end{cases} \iff \begin{cases} z\ge 0 \\ 1-\big(4x^2+y^2\big)\le z^2\le 4-\big(4x^2+y^2\big) \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 4x^2+y^2\le 4 \\ z\ge 0 \\ \max\big\{0\,,\,1-\big(4x^2+y^2\big)\big\}\le z^2\le 4-\big(4x^2+y^2\big) \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 4x^2+y^2\le 4 \\ \sqrt{\max\big\{0\,,\,1-\big(4x^2+y^2\big)\big\}}\le z\le \sqrt{4-\big(4x^2+y^2\big)} \end{cases} .$$

Ne segue che T è un insieme normale del tipo

$$\begin{cases} (x,y)\in D \\ \alpha(x,y)\le z\le \beta(x,y) \end{cases} ,$$

per il quale sono verificate tutte le ipotesi atte a garantire che si tratti di un dominio limitato di $\mathbb{R}^3$, misurabile secondo Peano-Jordan; infatti:

- D è un dominio di $\mathbb{R}^2$, limitato e misurabile secondo Peano-Jordan (è un dominio regolare a un solo contorno);
- le funzioni $\alpha(x,y) = \sqrt{\max\big\{0\,,\,1-\big(4x^2+y^2\big)\big\}}$ e $\beta(x,y) = \sqrt{4-\big(4x^2+y^2\big)}$ sono continue in D (ricordiamo che, se f e g sono due funzioni continue, allora anche $\max\{f,g\}$ è una funzione continua; infatti $\max\{f,g\} = \frac{1}{2}(f+g+|f-g|)$);
- risulta $\alpha(x,y)\le\beta(x,y)$ $\forall(x,y)\in D$ e non esiste alcun insieme aperto non vuoto $A\subseteq D$ tale che $\alpha(x,y)=\beta(x,y)$ $\forall(x,y)\in A$ (infatti l'uguaglianza $\alpha(x,y)=\beta(x,y)$ è verificata solo nei punti dell'ellisse $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, 4x^2+y^2=1\}$).

b) Per calcolare l'integrale triplo conviene cercare di adoperare la formula di riduzione per sezioni parallele al piano xy. Osserviamo che

$$\begin{cases} z\ge 0 \\ 1\le 4x^2+y^2+z^2\le 4 \end{cases} \iff \begin{cases} z\ge 0 \\ 1-z^2\le 4x^2+y^2\le 4-z^2 \end{cases} ,$$

pertanto la proiezione di T sull'asse z è l'intervallo $[0,2]$ e, per quanto riguarda le sezioni $T(z)$, si ha:

$$T(z) \ = \ \begin{cases} \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, 1-z^2\le 4x^2+y^2\le 4-z^2\} & \text{se } 0\le z<1\ , \\ \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, 4x^2+y^2\le 4-z^2\} & \text{se } 1\le z<2\ , \\ \{(0,0)\} & \text{se } z=2\ , \end{cases}$$

quindi $T(z)$ è o un dominio regolare (a due contorni oppure a un solo contorno, a seconda che sia $0 \le z < 1$ ovvero $1 \le z < 2$) oppure un insieme di misura nulla (se $z = 2$). Osserviamo che, se $z \in [0,1[$, si ha

$$1 - z^2 \le 4x^2 + y^2 \iff 1 \le \frac{x^2}{\left(\frac{1}{2}\sqrt{1-z^2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\sqrt{1-z^2}\right)^2}$$

e, se $z \in [1,2[$, risulta

$$4x^2 + y^2 \le 4 - z^2 \iff \frac{x^2}{\left(\frac{1}{2}\sqrt{4-z^2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\sqrt{4-z^2}\right)^2} \le 1 \quad .$$

Di conseguenza, ricordando che la misura di un dominio regolare ad un solo contorno, la cui frontiera è un'ellisse di semiassi a e b, è uguale a πab, si ha che

$$\int_{T(z)} |z-1|\, dx\, dy = \begin{cases} (1-z)\,\dfrac{\pi}{2}\left(4 - z^2 - (1-z^2)\right) = \dfrac{3\pi}{2}(1-z) & \text{se } z \in [0,1[\ , \\ \dfrac{\pi}{2}(z-1)(4-z^2) & \text{se } z \in [1,2[\ , \\ 0 & \text{se } z = 0\ , \end{cases}$$

dunque

$$z \to \int_{T(z)} |z-1|\, dx\, dy$$

è una funzione continua e pertanto è lecito concludere che

$$\iiint_T |z-1|\, dx\, dy\, dz = \int_0^2 dz \iint_{T(z)} |z-1|\, dx\, dy =$$

$$= \frac{3\pi}{2}\int_0^1 (1-z)\, dz + \frac{\pi}{2}\int_1^2 (z-1)(4-z^2)\, dz = \frac{11}{24}\pi \quad .$$

56

$$\int_T \frac{xy}{(x^2+y^2)^3}\, e^{(x^2+y^2)^{-1}}\, dx\, dy =$$

$\big($dato che $(x,y) \in T \implies (y,x) \in T\ ,\ f(y,x) = f(x,y)\big)$

$$= 2\iint_{T_1} \frac{xy}{(x^2+y^2)^3}\, e^{(x^2+y^2)^{-1}}\, dx\, dy =$$

$\big($essendo $T_1 = T \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y \le x\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2 \le 4\ ,\ 1 \le y \le x\}\big)$

$$= 2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos\theta \operatorname{sen}\theta\, d\theta \int_{\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}}^{2} \frac{1}{\rho^3}\, e^{\frac{1}{\rho^2}}\, d\rho = \frac{1}{2}\, e^{\frac{1}{2}} - \frac{5}{8}\, e^{\frac{1}{4}} \quad .$$

57

$$\iint_T \frac{|x^2-y^2|}{x^2+y^2}\, \log(x^2+y^2)\, dx\, dy = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left|\, \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta \,\right| d\theta \int_{\sqrt{\frac{1}{\cos\theta \operatorname{sen}\theta}}}^{\sqrt{\frac{2}{\cos\theta \operatorname{sen}\theta}}} \rho \log\rho^2\, d\rho =$$

$$= \log\frac{\sqrt{3}}{2}\left[\log\frac{\sqrt[4]{3}}{8\sqrt{2}} + 1\right] \quad .$$