Corso di laurea di primo livello in **Fisica**
Compito di **Analisi Matematica II**
assegnato il 7 febbraio 2007

1 Trovare i punti di estremo relativo per la funzione reale di due variabili reali

$$f(x,y) \;=\; (y-x^2)\,(y-4x^2)\,(y-1)^2 \quad ,$$

specificandone la natura e precisando se si tratta di punti di estremo relativo proprio.

2 Provare che esiste una ed una sola funzione $x \to \varphi(x)$, definita in $]0,+\infty[$ che è una una funzione implicita relativa all'equazione

$$\mathrm{e}^{x+y-1} - \log x + y - 1 \;=\; 0 \quad .$$

Dimostrare inoltre che sono veri i seguenti fatti:

a) φ è derivabile in $]0,+\infty[$ e risulta $\varphi'(x) > -1 \ \forall x \in]0,+\infty[$;
b) $\varphi(1) = \varphi'(1) = 0$;
c) φ è strettamente concava in $]0,+\infty[$;
d) φ è crescente in $]0,1]$ e decrescente in $[1,+\infty[$;
e) $\lim_{x\to 0+} \varphi(x) = \lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = -\infty$;
f) il grafico di φ non ha asintoto per $x \to +\infty$.

3 Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_T \frac{|x-3y-1|}{(x^2+9y^2)^2}\,dx\,dy \quad ,$$

dove T è il seguente dominio:

$$T \;=\; \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, x \geq 0\,,\ \frac{1}{4} \leq x^2+9y^2 \leq 1\} \quad .$$

4 Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''' - 3y'' + 4y' - 2y \;=\; 1 + \operatorname{sen} x\, \cos x \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0 \end{cases} \quad .$$

Corso di laurea di primo livello in **Fisica**
Compito di **Analisi Matematica II**
assegnato il 7 marzo 2007

1 a) Calcolare, in tutti i punti in cui esistono, le derivate parziali prime della funzione

$$f(x,y) \;=\; x \operatorname{arctg}|y-x^2| \quad .$$

b) Trovare tutti i punti di $\mathbb{R}^2$ nei quali f è differenziabile.
c) Trovare i punti di estremo relativo per f specificandone la natura e precisando se si tratta di punti di estremo relativo proprio.

2 Trovare la costante $k \in \mathbb{R}$ per la quale la forma differenziale lineare

$$\left[\mathrm{e}^x \log(y-\mathrm{e}^x) - \frac{\mathrm{e}^{2x}}{y-\mathrm{e}^x}\right] dx \;+\; \frac{\mathrm{e}^x + k}{y-\mathrm{e}^x}\, dy$$

è esatta nel suo insieme di definizione.
Calcolare l'integrale curvilineo della forma differenziale così ottenuta lungo la poligonale Π di vertici $p = (-1, 2\,\mathrm{e}^{-1})$, $q = (-2, 4)$ e $r = (1, 2\,\mathrm{e})$.

3 a) Provare che l'insieme

$$T \;=\; \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x \geq 0,\, z \geq 1,\, x^2 + \sqrt{z} \leq y \leq 5\}$$

è un dominio limitato di $\mathbb{R}^3$, misurabile secondo Peano-Jordan.

b) Calcolare l'integrale triplo

$$\iiint_T \frac{x}{\sqrt{z}}\, dx\, dy\, dz \quad .$$

4 È assegnato il problema di Cauchy:

$$(*) \qquad \begin{cases} y'' + 4y' + 5y \;=\; \mathrm{e}^{-2x}\, \dfrac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x} \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases} \quad .$$

a) Senza risolvere il problema (*) dire qual è l'intervallo di definizione della sua soluzione φ e provare che la funzione φ è crescente nel punto $x_0 = 0$.
b) Risolvere il problema (*).

Corso di laurea di primo livello in **Fisica**
Compito di **Analisi Matematica II**
assegnato il 4 maggio 2007

1 Trovare i punti di estremo relativo per la funzione reale di due variabili reali

$$f(x,y) \;=\; \big[(y-x)^2-1\big](x^2+y^2-1)^2 \quad ,$$

specificandone la natura e precisando se si tratta di punti di estremo relativo proprio. Dire inoltre, motivando la risposta, se i punti trovati sono anche di estremo assoluto.

2 Provare che la curva Γ in $\mathbb{R}^2$ di rappresentazione parametrica

$$x = 1+\sqrt{t} \quad , \quad y = \operatorname{sen}\sqrt{t} \; , \qquad\qquad t \in [0,\pi^2] \; ,$$

è una curva regolare.
Calcolare l'integrale curvilineo lungo Γ di ognuna delle seguenti forme differenziali lineari:

$$\text{a)} \qquad \Big[x+\big(y-\operatorname{sen}(x-1)\big)^7\Big]\,dx \;+\; y^2\,dy \quad ,$$

$$\text{b)} \qquad \frac{4x^3-2xy}{x^4+y^2}\,dx \;+\; \frac{x^2+2y}{x^4+y^2}\,dy \quad ,$$

$$\text{c)} \qquad \left[\frac{4x^3-2xy}{x^4+y^2}+1\right]dx \;+\; \left[\frac{x^2+2y}{x^4+y^2}+\big(y-\operatorname{sen}(x-1)\big)^7\right]dy \quad .$$

3 Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_T \frac{|x^4-y^4|}{x^2y^2}\,dx\,dy \quad ,$$

dove T è il seguente dominio:

$$T \;=\; \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, \tfrac{1}{2} \le xy \le 2\,,\, x \le \sqrt{3}y \le 3x\} \quad .$$

4 Trovare le soluzioni comuni alle due equazioni differenziali:

$$(1) \quad y^{(\mathrm{IV})}-y''+y'+y \;=\; x^2+2x-2 \quad , \quad (2) \quad y^{(\mathrm{IV})}-y \;=\; -x^2$$

(suggerimento: è utile osservare che tutte le soluzioni comuni a (1) e (2) soddisfano una stessa equazione differenziale del secondo ordine).
Provare poi che l'insieme delle soluzioni comuni a (1) e (2) coincide con l'insieme delle soluzioni di una (opportuna) equazione differenziale lineare del primo ordine.

Corso di laurea di primo livello in **Fisica**
Compito di **Analisi Matematica II**
assegnato il 13 giugno 2007

1 a) Calcolare, in tutti i punti in cui esistono, le derivate parziali prime della funzione

$$f(x,y) \;=\; x\left|\sqrt{x^2+y^2}-1\right| \quad ;$$

in particolare, verificare che sulla circonferenza $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2=1\}$ vi sono solamente due punti nei quali esistono entrambe le derivate f_x e f_y.
b) Trovare tutti i punti di $\mathbb{R}^2$ nei quali f è differenziabile.

2 Provare che esiste una ed una sola funzione $x \to \varphi(x)$, definita in tutto $\mathbb{R}$, la quale è una una funzione implicita relativa all'equazione

$$\log(x+y) + \frac{1}{2}\,x + y - 1 \;=\; 0 \quad .$$

Dimostrare inoltre che sono veri i seguenti fatti:
a) φ è derivabile in $\mathbb{R}$;
b) φ è decrescente in $\mathbb{R}$;
c) φ è strettamente convessa in $\mathbb{R}$;
d) risulta:

$$\lim_{x\to-\infty}\varphi(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{x\to+\infty}\varphi(x) = -\infty \quad ;$$

e) (facoltativo) il grafico di φ è dotato di asintoto per $x \to -\infty$ (si tratta della retta $x+y=0$), ma non per $x \to +\infty$.

3 Sia T l'insieme dei punti (x,y,z) di $\mathbb{R}^3$ tali che $\sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{\pi}$.
Calcolare l'integrale triplo

$$\iiint_T \sqrt{x^2+y^2}\;\mathrm{sen}\, z^2\, dx\, dy\, dz \qquad .$$

4 È assegnato il problema di Cauchy:

$$(*) \qquad \begin{cases} y' + 2xy \;=\; x^3y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad .$$

a) Senza risolvere il problema (*) provare che, se φ è una soluzione di (*), il punto $x_0 = 0$ è di massimo relativo per φ.
b) Risolvere il problema (*).

Corso di laurea di primo livello in **Fisica**
Compito di **Analisi Matematica II**
assegnato il 14 giugno 2007
(prova scritta straordinaria)

1 a) Calcolare, in tutti i punti in cui esistono, le derivate parziali prime della funzione

$$f(x,y) \;=\; x\left|\operatorname{arctg}(x^2+y^2-1)\right| \;\;;$$

in particolare, verificare che sulla circonferenza $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2=1\}$ vi sono solamente due punti nei quali esistono entrambe le derivate f_x e f_y.
b) Trovare tutti i punti di $\mathbb{R}^2$ nei quali f è differenziabile.

2 Provare che esiste una ed una sola funzione $x \to \varphi(x)$, definita in tutto $\mathbb{R}$, la quale è una una funzione implicita relativa all'equazione

$$\mathrm{e}^{x+y} + \frac{1}{2}\,x + y - 1 \;=\; 0 \quad .$$

Dimostrare inoltre che sono veri i seguenti fatti:
a) φ è derivabile in $\mathbb{R}$;
b) φ è decrescente in $\mathbb{R}$;
c) φ è strettamente concava in $\mathbb{R}$;
d) risulta:

$$\lim_{x\to-\infty} \varphi(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = -\infty \quad .$$

3 Sia T l'insieme dei punti (x,y,z) di $\mathbb{R}^3$ tali che $\sqrt{x^2+y^2} \le z \le 1$.
Calcolare l'integrale triplo

$$\iiint_T \sqrt{x^2+y^2}\; z^4\, \mathrm{e}^{z^4}\, dx\, dy\, dz \quad .$$

4 Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y^{(\mathrm{IV})} - 2y''' + 5y'' - 8y' + 4y \;=\; 10\,\mathrm{e}^x + x \\ y(0) = y'(0) = -y'''(0) = 2 \;,\; y''(0) = \frac{9}{4} \end{cases} \quad .$$

Corso di laurea di primo livello in **Fisica**
Compito di **Analisi Matematica II**
assegnato il 4 luglio 2007

1 a) Calcolare, in tutti i punti in cui esistono, le derivate parziali prime della funzione

$$f(x,y) \;=\; \big(y-x+1\big)^2\,\big|x^2+y^2-1\big| \quad ;$$

in particolare, verificare che sulla circonferenza $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2=1\}$ vi sono solamente due punti nei quali esistono entrambe le derivate f_x e f_y.
b) Trovare tutti i punti di $\mathbb{R}^2$ nei quali f è differenziabile.

2 Sia K l'insieme dei punti (x,y,z) di $\mathbb{R}^3$ tali che $x^2+y^2+4z^4 \le 1$.
a) Provare che K è un insieme sequenzialmente compatto.
b) Trovare il minimo ed il massimo assoluti della funzione

$$f(x,y,z) \;=\; x+y+2z^2$$

nell'insieme K.

3 a) Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_T \frac{(x^2+1)y}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}\,dx\,dy \quad ,$$

dove T è il seguente dominio:

$$T \;=\; \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \le \sqrt{2}\,,\; y \ge 0\,,\; 1 \le x^2+y^2 \le 4\} \quad .$$

b) (Facoltativo) Calcolare lo stesso integrale doppio adoperando un procedimento diverso.

4 a) Trovare tutte le soluzioni $y(x)$ dell'equazione differenziale lineare

$$y^{(\mathrm{IV})} - 4y''' + 6y'' - 4y' + y + 8(y'' - 2y' + y) + 16y = 5x - 4 + 64\mathrm{e}^{-x}$$

che verificano la condizione

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{y(x)}{x\mathrm{e}^x} \;=\; 0 \quad .$$

b) Provare che l'insieme delle soluzioni trovate è l'integrale generale di un'equazione differenziale lineare.

Corso di laurea di primo livello in **Fisica**
Compito di **Analisi Matematica II**
assegnato il 12 settembre 2007

1 Data la funzione reale di due variabili

$$f(x,y) \;=\; \left|(y-x)^2-1\right|(x^2+y^2-1) \quad ,$$

a) provare, senza calcolarne le derivate parziali, che la funzione f ha almeno tre punti di estremo relativo appartenenti al cerchio aperto $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,:\,x^2+y^2<1\}$;
b) trovare tutti i punti di estremo relativo per f, specificandone la natura e precisando se si tratta di punti di estremo relativo proprio;
c) dire, motivando la risposta, se i punti trovati in b) sono anche di estremo assoluto.

2 Provare che esiste una ed una sola funzione $x\to\varphi(x)$, definita in tutto $\mathbb{R}$, la quale è una una funzione implicita relativa all'equazione

$$\mathrm{e}^{2x+y}+x+y-1 \;=\; 0 \quad .$$

Dimostrare inoltre che sono veri i seguenti fatti:
a) φ è derivabile in $\mathbb{R}$;
b) φ è decrescente in $\mathbb{R}$;
c) φ è strettamente concava in $\mathbb{R}$;
d) risulta:

$$\lim_{x\to-\infty}\varphi(x)=+\infty \quad , \quad \lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=-\infty \quad ;$$

e) (facoltativo) il grafico di φ è dotato di asintoto per $x\to-\infty$, ma non per $x\to+\infty$.

3 a) Provare che l'insieme

$$T \;=\; \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,:\,4x^2+y^2\le z\le 1\}$$

è un dominio limitato di $\mathbb{R}^3$, misurabile secondo Peano-Jordan.

b) Calcolare l'integrale triplo

$$\iiint_T \frac{1+4x^2+y^2}{z^2+1}\,\mathrm{e}^{4x^2+y^2-z}\,dx\,dy\,dz \quad .$$

4 a) Risolvere l'equazione differenziale lineare

(∗) $$y'''-y''-y'+y=\mathrm{e}^{2x}(\operatorname{sen}\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^x\cos\mathrm{e}^x)$$

(può essere utile osservare che il termine noto della (*) è uguale a $\mathrm{e}^x\mathrm{D}(\mathrm{e}^x\operatorname{sen}\mathrm{e}^x)$).
b) Trovare tutte le soluzioni $y(x)$ della (*) che verificano la condizione

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y(x)}{\sqrt{x}} \;=\; 0$$

e provare che l'insieme di tali soluzioni costituisce l'integrale generale di un'equazione differenziale lineare del primo ordine.

Corso di laurea di primo livello in **Fisica**
Compito di **Analisi Matematica II**
assegnato il 3 ottobre 2007

1 Sia K l'insieme dei punti (x, y, z) di $\mathbb{R}^3$ tali che $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} + 4z^4 \leq 1$.

a) Provare che K è un insieme sequenzialmente compatto.
b) Trovare il minimo ed il massimo assoluti della funzione

$$f(x, y, z) = x + \frac{3}{2}\,y + 12z^2$$

nell'insieme K.

2 Trovare quella funzione $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ per la quale la forma differenziale lineare

$$\frac{x + 2\log y}{\big(x + \log y\big)^{\frac{3}{2}}}\; dx \;+\; \frac{\varphi(x)}{y\big(x + \log y\big)^{\frac{3}{2}}}\; dy$$

è esatta nel suo insieme di definizione.
Calcolare l'integrale curvilineo della forma differenziale così ottenuta lungo la poligonale Π di vertici $p = (-1, \mathrm{e}^2)$, $q = (2, 4)$ e $r = (1, 1)$.

3 Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_T \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, dx\, dy \quad ,$$

dove T è il seguente dominio:

$$T \;=\; \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \geq 0\,,\, 0 \leq y \leq \tfrac{1}{\sqrt{2}}\,,\, x^2 + y^2 \geq \tfrac{1}{4}\,,\, 3x^2 - y^2 \leq 1\} \quad .$$

4 Risolvere il problema di Cauchy:

$$(*) \qquad \begin{cases} y''' - 3y'' + 4y' - 2y \;=\; \dfrac{\mathrm{e}^x}{\cos^2 x} \;, \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0 \;. \end{cases}$$

Trovare un problema di Cauchy relativo ad un'equazione differenziale lineare del secondo ordine che ha la stessa soluzione del problema (*).

Corso di laurea di primo livello in **Fisica**
Compito di **Analisi Matematica II**
assegnato il 14 dicembre 2007

1 a) Calcolare, in tutti i punti in cui esistono, le derivate parziali prime della funzione

$$f(x,y) \;=\; y\,\bigl|y-x^2+1\bigr| \quad ;$$

in particolare, verificare che sulla parabola $P = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, y-x^2+1=0\}$ vi sono solamente due punti nei quali esistono entrambe le derivate f_x e f_y.

b) Trovare tutti i punti di $\mathbb{R}^2$ nei quali f è differenziabile.

2 È assegnata la forma differenziale lineare

$$(*) \qquad \left[e^x - \frac{y}{x^2+y^2}\right] dx \;+\; \left[1+\frac{x}{x^2+y^2}\right] dy \quad .$$

a) Provare che la (*) è esatta nell'insieme aperto

$$A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,y) \,:\, y\in[0,+\infty[\,\} \quad .$$

b) Provare che la (*) non è esatta in $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.
(Suggerimento: conviene considerare la curva semplice e chiusa che ha come sostegno la circonferenza $C = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2=1\}$.)

c) Trovare una primitiva della (*) nell'insieme A.

3 Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_T \left|x-\tfrac{1}{2}\right|\, dx\, dy \quad ,$$

dove T è il seguente dominio:

$$T \;=\; \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2\le 1\,,\ \sqrt{3}x \ge |y|\} \quad .$$

4 a) Risolvere l'equazione differenziale lineare

$$(*) \qquad y''' - 4y'' + 9y' - 10y = e^x(\cos x - \operatorname{sen} x) \quad .$$

b) Trovare tutte le soluzioni $y(x)$ della (*) che verificano la condizione

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-\frac{3}{2}x}y(x) \;=\; 0 \quad .$$

c) Provare che l'insieme delle soluzioni trovate in b) costituisce l'integrale generale di un'equazione differenziale lineare.

Corso di laurea di primo livello in **Fisica**
Compito di **Analisi Matematica II**
assegnato l'8 gennaio 2008

1 Data la funzione reale di due variabili

$$f(x,y) \;=\; \left(\frac{1}{2008}\right)^{(y-x)^4(x^2+y^2-1)} \qquad ,$$

a) provare, senza calcolarne le derivate parziali, che la funzione f ha almeno due punti di estremo relativo appartenenti al cerchio aperto $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2 < 1\}$;
b) trovare tutti i punti di estremo relativo per f, specificandone la natura e precisando se si tratta di punti di estremo relativo proprio;
c) dire, motivando la risposta, se i punti trovati in b) sono anche di estremo assoluto.

2 Trovare la costante $k \in \mathbb{R}$ per la quale la forma differenziale lineare

$$\left[\log(y-x) + \frac{2x-y}{x-y}\right] dx + \frac{x-k}{y-x}\, dy$$

è esatta nel suo insieme di definizione.
Della forma differenziale così ottenuta calcolare l'integrale curvilineo lungo la poligonale Π di vertici $p = (-2,-1)$, $q = (1, 2008)$ e $r = (0,1)$.

3 Sia T l'insieme dei punti (x,y,z) di $\mathbb{R}^3$ tali che $\sqrt{x^2+y^2} \le z \le 1$.
Calcolare l'integrale triplo

$$\iiint_T z \log(1+x^2+y^2)\, dx\, dy\, dz \qquad .$$

4 a) Risolvere l'equazione differenziale lineare

$$(*) \qquad y''' - 5y'' + 8y' - 4y = \mathrm{e}^x \quad .$$

b) Trovare tutte le soluzioni $y(x)$ della (*) che verificano la condizione

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{y(x)}{\sqrt{x}\mathrm{e}^{2x}} \;=\; 0$$

e provare che l'insieme di tali soluzioni costituisce l'integrale generale di un'equazione differenziale lineare del secondo ordine.

Corso di laurea di primo livello in **Fisica**
Compito di **Analisi Matematica II**
assegnato il 19 febbraio 2009

A

1 Trovare i punti di estremo relativo per la funzione reale di due variabili reali

$$f(x,y) \;=\; |4x^2+9y^2-36|\,(2x-3y) \quad ,$$

specificandone la natura e precisando se si tratta di punti di estremo relativo proprio. Stabilire, inoltre, se i punti trovati sono anche punti di estremo assoluto.

2 Calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_\Gamma \left[\frac{x^3}{x^4+(\mathrm{e}^y-1)^2}+\frac{1}{x^2+y^2}\right]\mathrm{d}x \,+\, \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{e}^y(\mathrm{e}^y-1)}{x^4+(\mathrm{e}^y-1)^2}\;\mathrm{d}y \quad ,$$

essendo Γ la curva semplice che ha come sostegno la semicirconferenza

$$x^2+y^2=4 \quad , \quad y\geq 0$$

ed è orientata nel verso delle x crescenti.

3 Calcolare l'integrale triplo

$$\iiint_T x^2z^2\cos z^3\,dx\,dy\,dz \quad ,$$

dove T è il seguente dominio:

$$T \;=\; \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,:\, y\geq 0\,,\, 0\leq z^3\leq x^2+y^2\leq\pi\} \quad .$$

4 Trovare una soluzione massimale di ognuno dei seguenti problemi di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = 6\sqrt{y}\,x^2\mathrm{e}^{x^3} \\ y(0)=0 \end{cases} \qquad , \qquad \begin{cases} y' = 6\sqrt{y}\,x^2\mathrm{e}^{x^3} \\ y(0)=4 \end{cases} \qquad .$$

Dire inoltre se la soluzione trovata è unica. Giustificare quanto asserito.

Corso di laurea di primo livello in **Fisica**
Compito di **Analisi Matematica II**
assegnato il 19 febbraio 2009

B

1 Trovare i punti di estremo relativo per la funzione reale di due variabili reali

$$f(x,y) \;=\; (3-y^2)\,|y-x^2+4x| \quad ,$$

specificandone la natura e precisando se si tratta di punti di estremo relativo proprio. Stabilire, inoltre, se i punti trovati sono anche punti di estremo assoluto.

2 Calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_\Gamma \left[\frac{x}{x^2+\operatorname{arctg}^2 y}+\frac{4}{\pi}\,y\right] \mathrm{d}x \;+\; \frac{\operatorname{arctg} y}{(1+y^2)(x^2+\operatorname{arctg}^2 y)}\,\mathrm{d}y \quad ,$$

essendo Γ la curva "grafico della restrizione delle funzione $\frac{\pi}{4}\left(\frac{x}{3}-1\right)^{10}$ all'intervallo $[0,3]$, orientato nel verso delle x crescenti".

3 Calcolare l'integrale triplo

$$\iiint_T \sqrt{z(x^2+y^2)}\,\operatorname{sen} z^3\, dx\,dy\,dz \quad ,$$

dove T è il seguente dominio:

$$T \;=\; \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;:\; x\geq |y|\,,\; x^2+y^2\leq z^3\leq\pi\} \quad .$$

4 Trovare una soluzione massimale di ognuno dei seguenti problemi di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \sqrt[4]{y\,\mathrm{e}^x} \\ y(0)=0 \end{cases} \quad , \qquad \begin{cases} y' = \sqrt[4]{y\,\mathrm{e}^x} \\ y(0)=1 \end{cases} \quad .$$

Dire inoltre se la soluzione trovata è unica. Giustificare quanto asserito.

Corso di laurea di primo livello in **Fisica**
Compito di **Analisi Matematica II**
assegnato il 19 marzo 2009

1 a) Calcolare, in tutti i punti in cui esistono, le derivate parziali prime della funzione reale di due variabili reali

$$f(x,y) \;=\; |xy-4|(y-x) \quad .$$

b) Trovare il minimo ed il massimo assoluto della restrizione di f al rettangolo

$$R=[0,4]\times[0,2] \quad .$$

2 a) Provare che la curva Γ in $\mathbb{R}^2$ di rappresentazione parametrica

$$x=3\,\mathrm{sen}\,\tfrac{\pi\sqrt{t-1}}{2} \quad , \quad y=\sqrt{3}\cos\tfrac{\pi\sqrt{t-1}}{2} \;, \qquad t\in[1,2] \;,$$

è una curva regolare.
b) Calcolare gli integrali curvilinei:

$$(1) \qquad \int_\Gamma x(x^2+3y^2)\;dx \;-\; \frac{xy}{\sqrt{x^2+3y^2}}\;dy \quad ,$$

$$(2) \qquad \int_\Gamma \left[y+\frac{y^2-1}{(x+1)(x+y^2)}\right]dx \;+\; \left[x-\frac{2y}{x+y^2}\right]dy \quad .$$

3 Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_T |x+2y-2|(x-2y)\,dx\,dy \quad ,$$

dove T è il seguente dominio:

$$T \;=\; \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;:\; x\geq 0\,,\; y\geq 0\,,\; x^2+4y^2\leq 4\} \quad .$$

4 È assegnato il problema di Cauchy:

$$(*) \qquad \begin{cases} y'''-3y'-2y \;=\; \mathrm{senh}\,x \\ y(0)=0\,,\; y'(0)=-\frac{1}{4}\,,\; y''(0)=\frac{1}{6} \end{cases} \quad .$$

a) Senza risolvere il problema (*) dire qual è l'intervallo di definizione della sua soluzione massimale φ e calcolare la derivata quinta di φ nel punto $x_0=0$.
b) Risolvere il problema (*).

Corso di laurea di primo livello in **Fisica**
Compito di **Analisi Matematica II**
assegnato l'11 giugno 2009

1 Provare che esiste una ed una sola funzione $x \to \varphi(x)$, definita in tutto $\mathbb{R}$, la quale è una funzione implicita relativa all'equazione

$$\log(x+y) + 2x + y - 1 \;=\; 0 \quad .$$

Dimostrare inoltre che sono veri i seguenti fatti:

a) φ è derivabile in $\mathbb{R}$;
b) φ è decrescente in $\mathbb{R}$;
c) la funzione $x \to x + \varphi(x)$ è decrescente in $\mathbb{R}$;
d) φ è strettamente convessa in $\mathbb{R}$;
e) risulta:

$$\lim_{x\to-\infty} \varphi(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = -\infty \quad ;$$

f) (facoltativo) il grafico di φ è dotato di asintoto per $x \to +\infty$ (si tratta della retta $x + y = 0$), ma non per $x \to -\infty$.

2 È assegnata la forma differenziale lineare

$$(*) \qquad \left[2xy + \frac{y^2}{x^2+y^4}\right] dx \;+\; \left[x^2 - \frac{2xy}{x^2+y^4}\right] dy \quad .$$

a) Provare che la (*) è esatta nell'insieme aperto

$$A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \,:\, x \in [0,+\infty[\,\} \quad .$$

b) Trovare la funzione F, primitiva della (*) in A, tale che $F(-1,0) = 0$.
c) Decidere se la (*) è esatta anche in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

3 a) Provare che l'insieme

$$T \;=\; \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x \geq 0,\, y \geq 1,\, x^2 + \log y \leq z \leq 4\}$$

è un dominio limitato di $\mathbb{R}^3$, misurabile secondo Peano-Jordan. (Suggerimento: esprimere T come insieme normale rispetto al piano xy.)

b) Calcolare l'integrale triplo

$$\iiint_T x \, dx\, dy\, dz \quad .$$

4 È assegnato il problema di Cauchy:

$$(*) \qquad \begin{cases} y'' - 2y' + 2y \;=\; x + \dfrac{e^x}{\cos^3 x} \\ y(0) = 0\,,\; y'(0) = 1 \end{cases} \quad .$$

a) Senza risolvere il problema (*), trovare un problema di Cauchy relativo ad un'equazione differenziale lineare del terzo ordine che ha la stessa soluzione del problema (*).
b) Risolvere il problema (*).

Corso di laurea di primo livello in **Fisica**
Compito di **Analisi Matematica II**
assegnato il 2 luglio 2009

1 a) Calcolare, in tutti i punti in cui esistono, le derivate parziali prime della funzione

$$f(x,y) \;=\; \left|y-x^2\right| \left(x^2-2x+y^2\right) \quad .$$

b) Trovare tutti i punti di $\mathbb{R}^2$ nei quali f è differenziabile.

2 Calcolare l'integrale curvilineo della forma differenziale

$$\left[\log\left(y-x^2\right)+\frac{2x^2}{x^2-y}\right] dx \;-\; \frac{x}{x^2-y}\, dy$$

a) lungo la poligonale Π di vertici $p=(1,2)$, $q=(0,3)$ e $r=(1,5)$;

b) lungo la poligonale Π' di vertici $p'=(0,4)$, $q'=(-1,5)$ e $r=(1,5)$.

3 Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_T xy\, \mathrm{e}^{(x^2+y^2)^2}\, dx\, dy \quad ,$$

essendo T l'insieme

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;:\; y\le \max\{0,\sqrt{3}\,x\}\,,\; (x^2+y^2)^2\le \log 17\} \quad .$$

4 È assegnato il problema di Cauchy:

$$(*) \qquad \begin{cases} y''+4y'+5y \;=\; 5x+9+\dfrac{1}{\mathrm{e}^{2x}\cos^3 x} \\ y(0)=\frac{1}{2}\,,\; y'(0)=3 \end{cases} \quad .$$

a) Senza risolvere il problema (*), trovare un problema di Cauchy, relativo ad una equazione differenziale lineare del terzo ordine, il quale ha la stessa soluzione del problema (*).
b) Risolvere il problema (*).

Corso di laurea di primo livello in **Fisica**
Compito di **Analisi Matematica II**
assegnato il 17 settembre 2009

1 Trovare tutti i punti di estremo relativo per la funzione reale di due variabili reali

$$f(x,y) \;=\; |y-x|(x^2-2x+y^2) \quad ,$$

specificandone la natura e precisando se si tratta di punti di estremo relativo proprio. Dire inoltre, motivando la risposta, se i punti trovati sono anche di estremo assoluto.

2 Stabilire se la forma differenziale lineare

$$\left[\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}+\frac{1}{x^2+y^2}\right] dx - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\; dy$$

è esatta nel suo insieme di definizione.
Calcolare poi l'integrale curvilineo di tale forma differenziale lungo la curva semplice Γ che ha come sostegno l'arco di ellisse $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+4y^2 = 1\,,\, y \geq 0\}$ ed è orientata nel verso delle x crescenti.

3 Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_T \big|\log 2 - \log(1+x^2+4y^2)\big|\, dx\, dy \quad ,$$

dove T è il seguente dominio:

$$T \;=\; \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 2y - x \leq 0\,,\, x^2+4y^2 \leq 4\} \quad .$$

4 Dato il problema di Cauchy:

$$(*) \qquad \begin{cases} y''' - 3y'' + 4y \;=\; 1 + \mathrm{e}^x \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0 \end{cases} \quad ,$$

a) senza risolvere il problema (*) trovare il valore $\varphi^{(\mathrm{IV})}(0)$ della derivata quarta della sua soluzione nel punto $x_0 = 0$;
b) risolvere il problema (*).

Corso di laurea di primo livello in **Fisica**
Compito di **Analisi Matematica II**
assegnato il 22 ottobre 2009

1 a) Calcolare, in tutti i punti in cui esistono, le derivate parziali prime della funzione

$$f(x,y) \;=\; \left|y-x^2\right|\left(y^2-x\right) \quad .$$

b) Trovare tutti i punti di $\mathbb{R}^2$ nei quali f è differenziabile.

2 È assegnata la forma differenziale lineare

$$(*) \qquad \frac{x^2y^3}{x^6+y^6}\,dx \;+\; \frac{x^6-x^3y^2+y^6}{x^6+y^6}\,dy \quad .$$

a) Provare che la (*) è esatta nell'insieme aperto

$$A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \,:\, x \in]-\infty,0]\,\} \quad .$$

b) Trovare una primitiva della (*) nell'insieme A.
c) Decidere se la (*) è esatta anche in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

3 Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_T xy\,\log\left(1+4x^2+y^2\right)dx\,dy \quad ,$$

essendo T l'insieme

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, y \geq \min\{0, 2\sqrt{3}\,x\}\,,\; 4x^2+y^2 \leq 8\} \quad .$$

4 Trovare la soluzione massimale del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 2\,\sqrt{y}\;\mathrm{e}^{x-\sqrt{y}} \\ y(0) = \log^2\left(\frac{3}{2}\right) \end{cases} \quad .$$

Corso di laurea di primo livello in **Fisica**
Compito di **Analisi Matematica II**
assegnato il 3 dicembre 2009

1 Data la funzione reale di due variabili

$$f(x,y) \;=\; |y-x|\,(x^2+y^2-1) \quad ,$$

a) provare, senza calcolarne le derivate parziali, che la funzione f ha almeno due punti di minimo relativo appartenenti al cerchio aperto $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2<1\}$;
b) trovare tutti i punti di estremo relativo per f, specificandone la natura e precisando se si tratta di punti di estremo relativo proprio;
c) dire, motivando la risposta, se i punti trovati in b) sono anche di estremo assoluto.

2 È assegnata la forma differenziale lineare

$$(*) \qquad \left[x + \frac{y}{x^2+y^2}\right]\, dx \;+\; \left[1 - \frac{x}{x^2+y^2}\right]\, dy \quad .$$

a) Provare che la (*) è esatta nell'insieme aperto

$$A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \,:\, x \in]-\infty, 0]\,\} \quad .$$

b) Trovare una primitiva della (*) nell'insieme A.
c) Provare che la (*) non è esatta nell'insieme $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

3 Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_T \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy \quad ,$$

essendo T l'insieme

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \geq \tfrac{1}{2}\,,\, x+y \geq 0\,,\, x^2+y^2 \leq 1\} \quad .$$

4 È assegnato il problema di Cauchy:

$$(*) \qquad \begin{cases} y''' - 3y'' + 4y \;=\; 2 - \mathrm{e}^x \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0 \end{cases} \quad .$$

a) Senza risolvere il problema (*) trovare il valore $\varphi^{(\mathrm{IV})}(0)$ della derivata quarta della sua soluzione nel punto $x_0 = 0$.
b) Risolvere il problema (*).

Corso di laurea di primo livello in **Fisica**
Compito di **Analisi Matematica II**
assegnato il 11 gennaio 2010

1 Data la funzione reale di due variabili

$$f(x,y) \;=\; |y+x|\,(1-x^2-y^2) \quad ,$$

a) provare, senza calcolarne le derivate parziali, che la funzione f ha almeno due punti di massimo relativo appartenenti al cerchio aperto $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2<1\}$;
b) trovare tutti i punti di estremo relativo per f, specificandone la natura e precisando se si tratta di punti di estremo relativo proprio;
c) dire, motivando la risposta, se i punti trovati in b) sono anche di estremo assoluto.

2 È assegnata la forma differenziale lineare

$$(*) \qquad \left[2xy - \frac{y}{x^2+y^2}\right]\,dx \;+\; \left[x^2 + \frac{x}{x^2+y^2}\right]\,dy \quad .$$

a) Provare che la (*) è esatta nell'insieme aperto

$$A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0)\,:\, x\in[0,+\infty[\,\} \quad .$$

b) Trovare una primitiva della (*) nell'insieme A.
c) Provare che la (*) non è esatta nell'insieme $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

3 Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_T \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy \quad ,$$

essendo T l'insieme

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, x\geq \tfrac{1}{2}\,,\; y-x\leq 0\,,\; x^2+y^2\leq 1\} \quad .$$

4 È assegnato il problema di Cauchy:

$$(*) \qquad \begin{cases} y''' + 3y'' - 4y \;=\; 2 - \mathrm{e}^{-x} \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0 \end{cases} \quad .$$

a) Senza risolvere il problema (*) trovare il valore $\varphi^{(\mathrm{IV})}(0)$ della derivata quarta della sua soluzione nel punto $x_0 = 0$.
b) Risolvere il problema (*).

Corso di Laurea di primo livello in **Fisica**
Compito di **Analisi Matematica II**
assegnato il 24 giugno 2011

1 Trovare i punti di estremo relativo per la funzione reale di due variabili reali

$$f(x,y) \;=\; xy|y-x^2+1| \quad ,$$

specificandone la natura e precisando se si tratta di punti di estremo relativo proprio. Dire inoltre, motivando la risposta, se i punti trovati sono anche di estremo assoluto.

2 Calcolare l'integrale curvilineo della forma differenziale

$$\frac{8x^2+y^2-4}{\sqrt{4x^2+y^2-4}}\; dx \;+\; \frac{xy}{\sqrt{4x^2+y^2-4}}\; dy$$

lungo la poligonale Π di vertici $p=(0,-4)$, $q=(2011,1)$ e $r=(0,4)$.

3 Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_T \frac{2x-y}{4x^2+y^2}\, dx\, dy \quad ,$$

essendo T l'insieme

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, y\geq 0\,,\, \tfrac{1}{4}\leq 4x^2+y^2\leq 1\,,\, 2x+y\leq 1\} \quad .$$

4 Trovare la soluzione massimale del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' - \dfrac{1}{2(1+x^2)}\; y = \dfrac{y^3}{x}\; \mathrm{e}^{-\operatorname{arctg} x} \\ y(1) = -\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{8}} \end{cases} \qquad .$$

Corso di Laurea di primo livello in **Fisica**
Compito di **Analisi Matematica II**
assegnato il 13 luglio 2011

1 a) Studiare la differenziabilità della funzione reale di due variabili reali

$$f(x,y) \;=\; xy|x^2+y^2-4|$$

nei punti: $(0,0)$, $(0,2)$ e $(1,\sqrt{3})$.
b) Trovare il massimo ed il minimo assoluti della restrizione di f all'insieme

$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \geq 0\,,\, y \geq 0\,,\, x+y \leq 1\}\ .$$

2 Calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_\Gamma \left[\frac{x}{x^2+\log(1+y^2)} + \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\right] \mathrm{d}x \,+\, \frac{y}{(1+y^2)(x^2+\log(1+y^2))}\,\mathrm{d}y \quad ,$$

essendo Γ la curva semplice che ha come sostegno la semicirconferenza

$$x^2+y^2=4 \quad , \quad y \geq 0$$

ed è orientata nel verso delle x crescenti.

3 Calcolare l'integrale triplo

$$\iiint_T \sqrt{4x^2+y^2}\, z^4 \operatorname{sen} z^4 \, dx\, dy\, dz \quad ,$$

essendo T l'insieme dei punti (x,y,z) di $\mathbb{R}^3$ tali che $\sqrt{4x^2+y^2} \leq z \leq \sqrt[4]{\pi}\,$.

4 Trovare (almeno) due soluzioni massimali distinte del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 6x^2 \mathrm{e}^{-y}\sqrt{\mathrm{e}^y - 1}\ , \\ y(1) = 0\ . \end{cases}$$

Corso di Laurea di primo livello in **Fisica**
Compito di **Analisi Matematica II**
assegnato il 14 settembre 2011

1 Trovare i punti di estremo relativo per la funzione reale di due variabili reali

$$f(x,y) \;=\; |xy|(x+y^2-1) \quad ,$$

specificandone la natura e precisando se si tratta di punti di estremo relativo proprio. Dire inoltre, motivando la risposta, se i punti trovati sono anche di estremo assoluto.

2 Provare che la curva Γ in $\mathbb{R}^2$ di rappresentazione parametrica

$$x = \sqrt[3]{t} \quad , \quad y = 1 + \mathrm{e}^{1-t\,\sqrt[3]{t}} \ , \qquad\qquad t \in [-1,1] \ ,$$

è una curva regolare.
Calcolare l'integrale curvilineo lungo Γ delle seguenti forme differenziali lineari:

$$\text{a)} \qquad x^3 \left(y - \mathrm{e}^{1-x^4}\right)^2 dx \;+\; \frac{x^2}{y-1} dy \quad ,$$

$$\text{b)} \qquad \frac{16x^2+y^4+4y^2}{16x^2+y^4}\, dx \;+\; \frac{-8xy}{16x^2+y^4}\, dy \quad .$$

3 Calcolare l'integrale triplo

$$\iiint_T x(1-2z^2)\,\mathrm{e}^{x^2+y^2-z^2}\, dx\, dy\, dz \quad ,$$

essendo T l'insieme dei punti (x,y,z) di $\mathbb{R}^3$ tali che $x \geq 0$ e $0 \leq z \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq 1$.

4 Trovare (almeno) due soluzioni massimali distinte del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = x^2 y^{-3} \sqrt[4]{y^4-1} \ , \\ y(2) = 1 \ . \end{cases}$$

Corso di Laurea di primo livello in **Fisica**
Compito di **Analisi Matematica II**
assegnato il 4 ottobre 2011

1 a) Studiare la differenziabilità della funzione reale di due variabili reali

$$f(x,y) \;=\; y\left|\sqrt{x^2+y^2}-1\right|$$

nei punti $(1,1)$ e $(0,0)$.
b) Trovare il minimo ed il massimo assoluto della restrizione di f all'insieme

$$K = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2\le 1\}\ .$$

2 a) Decidere se la forma differenziale

$$(*) \qquad \left[\frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x-1)}{(\mathrm{e}^x-1)^2+y^4}+\frac{1}{x^2+y^2}\right]\mathrm{d}x \;+\; \frac{y^3}{(\mathrm{e}^x-1)^2+y^4}\,\mathrm{d}y$$

è esatta nel suo insieme di definizione.
b) Calcolare l'integrale curvilineo della (*) lungo la curva semplice che ha come sostegno l'arco di circonferenza

$$x^2+y^2=9\quad,\quad x\ge 0\quad,\quad y\ge 0$$

ed è orientata nel verso delle y crescenti.

3 Calcolare l'integrale triplo

$$\iiint_T y\,\mathrm{sen}\,\pi z^4\,dx\,dy\,dz \quad ,$$

essendo T l'insieme dei punti (x,y,z) di $\mathbb{R}^3$ che verificano le seguenti disuguaglianze

$$x^2+y^2\le z^2\le 1\ ,\quad 2x\ge z\ge 0\ ,\quad y\ge 0\ .$$

4 a) Risolvere l'equazione differenziale

$$(\mathrm{E}) \qquad y''-y'-2y=\mathrm{e}^{2x}\,\tfrac{3x-1}{x^2}\ .$$

b) Trovare un'equazione differenziale del primo ordine tale che l'insieme delle sue soluzioni sia contenuto nell'insieme delle soluzioni della (E).

Corso di Laurea di primo livello in **Fisica**
Compito di **Analisi Matematica II**
assegnato il 7 dicembre 2011

1 Sia K l'insieme dei punti (x, y, z) di $\mathbb{R}^3$ tali che $4x^4 + y^2 + z^2 \leq 1$.
a) Provare che K è un insieme sequenzialmente compatto.
b) Trovare il minimo ed il massimo assoluti nell'insieme K della funzione

$$f(x, y, z) \;=\; 2x^2 + y + z\ .$$

2 Provare che esiste una ed una sola funzione $x \to \varphi(x)$, definita in tutto $\mathbb{R}$, la quale è una una funzione implicita relativa all'equazione

$$\mathrm{e}^{2x+y} + x + y - 1 \;=\; 0\quad .$$

Dimostrare inoltre che sono veri i seguenti fatti:
a) φ è derivabile in $\mathbb{R}$;
b) φ è decrescente in $\mathbb{R}$;
c) φ è strettamente concava in $\mathbb{R}$;
d) risulta:

$$\lim_{x\to-\infty} \varphi(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = -\infty \quad .$$

3 Calcolare l'integrale triplo

$$\iiint_T \frac{1 + 4x^2 + z^2}{y^2 + 1}\, \mathrm{e}^{4x^2+z^2-y}\, dx\, dy\, dz \quad ,$$

essendo

$$T \;=\; \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ :\ 4x^2 + z^2 \leq y \leq 1\}\ .$$

4 a) Risolvere l'equazione differenziale

(E) $$y'' + y' - 2y = 2x(2x + 1)\mathrm{e}^{x^2}\ .$$

b) Trovare un'equazione differenziale del primo ordine tale che l'insieme delle sue soluzioni sia contenuto nell'insieme delle soluzioni della (E).

Corso di Laurea di primo livello in **Fisica**
Compito di **Analisi Matematica II**
assegnato l'8 febbraio 2012

1 Trovare tutti i punti di $\mathbb{R}^2$ nei quali la funzione reale di due variabili reali

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|y}{\sqrt[4]{x^2+y^2}} & \text{se } \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

è differenziabile.

2 Sia Γ una qualunque curva semplice e chiusa che ha come sostegno la circonferenza di centro $(2,0)$ e raggio uno ed è orientata nel verso antiorario. Calcolare la circuitazione lungo Γ della forma differenziale

$$\Big[3x^2y\cos(x^3+y) + |x-2|y\Big]\,dx \ + \Big[\operatorname{sen}(x^3+y) + y\cos(x^3+y)\Big]\,dy \ .$$

3 Calcolare l'integrale triplo

$$\iiint_T x^2|z-2|\,dx\,dy\,dz \ ,$$

essendo

$$T \ = \ \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z \geq 0 \ , \ (4x^2+y^2)^2 \leq 4-z\} \ .$$

4 È assegnato il problema di Cauchy:

$$(*) \qquad \begin{cases} y'' + 4y' + 5y \ = \ \mathrm{e}^{-2x}\,\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} \ , \\ y(0) = 0 \ , \ y'(0) = e^{-2} \ . \end{cases}$$

a) Senza risolvere il problema (*) dire qual è l'intervallo di definizione della sua soluzione φ e provare che la funzione φ è strettamente concava nel punto $x_0 = 0$.
b) Risolvere il problema (*).

Corso di Laurea di primo livello in **Fisica**
Compito di **Analisi Matematica II**
assegnato il 7 marzo 2012

1 a) Calcolare, in tutti i punti in cui esistono, le derivate parziali prime della funzione reale di due variabili reali

$$f(x,y) \;=\; |x+y|(x^2+y^2-4) \quad .$$

b) Trovare tutti i punti di $\mathbb{R}^2$ nei quali f è differenziabile.

2 a) Decidere se la forma differenziale

$$(*) \qquad \left[\frac{2\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x-1)^3}{(\mathrm{e}^x-1)^4+y^2}+\frac{1}{x^2+y^2}\right]\mathrm{d}x \;+\; \frac{y}{(\mathrm{e}^x-1)^4+y^2}\,\mathrm{d}y$$

è esatta nel suo insieme di definizione.
b) Calcolare l'integrale curvilineo della (*) lungo la curva semplice che ha come sostegno l'arco di circonferenza

$$x^2+y^2=9 \quad , \quad x\geq 0 \quad , \quad y\leq 0$$

ed è orientata nel verso delle y crescenti.

3 Calcolare l'integrale triplo

$$\iiint_T \sqrt{4y^2+z^2}\,x^4 \operatorname{sen} x^4 \,dx\,dy\,dz \quad ,$$

essendo T l'insieme dei punti (x,y,z) di $\mathbb{R}^3$ tali che $\sqrt{4y^2+z^2}\leq x\leq \sqrt[4]{\pi}\,.$

4 Trovare una soluzione massimale di ognuno dei seguenti problemi di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \sqrt[4]{y\,\mathrm{e}^{2x}} \\ y(0)=0 \end{cases} \qquad , \qquad \begin{cases} y' = \sqrt[4]{y\,\mathrm{e}^{2x}} \\ y(0)=1 \end{cases} \quad .$$

Dire inoltre se la soluzione trovata è unica. Giustificare quanto asserito.

Corso di Laurea di primo livello in **Fisica**
Compito di **Analisi Matematica II**
assegnato il 14 maggio 2012

1 a) Calcolare, in tutti i punti in cui esistono, le derivate parziali prime della funzione reale di due variabili reali

$$f(x,y) \;=\; |x-y|(x^2+y^2-1) \quad .$$

b) Trovare tutti i punti di $\mathbb{R}^2$ nei quali f è differenziabile.

2 a) Decidere se la forma differenziale

$$(*) \qquad \left[\frac{\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)\left(\operatorname{arctg}^2 x+y^2\right)}+\frac{x}{x^2+y^2}\right]\mathrm{d}x \;+\; \frac{y}{\operatorname{arctg}^2 x+y^2}\,\mathrm{d}y$$

è esatta nel suo insieme di definizione.
b) Calcolare l'integrale curvilineo della (*) lungo la curva semplice che ha come sostegno l'arco di circonferenza

$$x^2+y^2=1 \quad , \quad x\ge 0 \quad , \quad y\le 0$$

ed è orientata nel verso delle y crescenti.

3 Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_T \frac{2x-y}{4x^2+y^2}\,dx\,dy \quad ,$$

essendo T l'insieme

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, 4x^2+y^2\le 1\,,\, 2x+y\ge 1\} \quad .$$

4 Trovare una soluzione massimale di ognuno dei seguenti problemi di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = 6\sqrt{y}x^2 \\ y(0)=0 \end{cases} \qquad , \qquad \begin{cases} y' = 6\sqrt{y}x^2 \\ y(0)=1 \end{cases} \quad .$$

Dire inoltre se la soluzione trovata è unica. Giustificare quanto asserito.

Corso di Laurea in **Fisica**
Compito di **Analisi Matematica II** (Prof. A. Villani)
assegnato il 28 gennaio 2013

1 a) Calcolare, in tutti i punti in cui esistono, le derivate parziali prime della funzione reale di due variabili reali $f(x,y) = y|\sqrt{x^2+y^2}-4|$.

b) Trovare tutti i punti di $\mathbb{R}^2$ nei quali f è differenziabile.

2 a) Provare che l'insieme $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+7y^2+z^2 = 1\,,\ x+y+z = 1\}$ è sequenzialmente compatto.

b) Trovare il massimo ed il minimo assoluti della restrizione della funzione reale di tre variabili reali $g(x,y,z) = 4^{\sqrt{x^2+z^2}}$ all'insieme K.

3 Data la serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)x^{2n+1}}{2^{2n}}$,

a) determinarne l'insieme di convergenza;
b) trovarne la funzione somma $f(x)$;
c) calcolare la derivata $f^{(15)}(0)$.

4 Calcolare l'integrale triplo

$$\iiint_T \frac{xy|z^3|}{1+(x^2+y^2)^4}\,dx\,dy\,dz \quad ,$$

essendo T l'insieme $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \le 0\,,\ y \ge 0\,,\ z^2 \le x^2+y^2 \le 1\}$.

5 È assegnato il problema di Cauchy:

$$(*) \qquad \begin{cases} y' + \frac{1}{2}xy = xy^3 \\ y(0) = 1 \end{cases} .$$

a) Senza risolvere il problema (*) provare che, se φ è una soluzione di (*), il punto $x_0 = 0$ è di minimo relativo per φ.
b) Risolvere il problema (*).

Corso di Laurea in **Fisica**
Compito di **Analisi Matematica II** (Prof. A. Villani)
assegnato il 28 gennaio 2013
(programma 2010-11)

1 a) Calcolare, in tutti i punti in cui esistono, le derivate parziali prime della funzione reale di due variabili reali $f(x,y) \;=\; y|\sqrt{x^2+y^2}-4|$.
b) Trovare tutti i punti di $\mathbb{R}^2$ nei quali f è differenziabile.

2 a) Provare che l'insieme $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+7y^2+z^2 = 1\,,\, x+y+z = 1\}$ è sequenzialmente compatto.
b) Trovare il massimo ed il minimo assoluti della restrizione della funzione reale di tre variabili reali $g(x,y,z) = 4^{\sqrt{x^2+z^2}}$ all'insieme K.

3 a) Decidere se la forma differenziale

$$(*) \qquad \left[\frac{\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)\left(\operatorname{arctg}^2 x + y^2\right)} + \frac{x}{x^2+y^2}\right] \mathrm{d}x \;+\; \frac{y}{\operatorname{arctg}^2 x + y^2}\,\mathrm{d}y$$

è esatta nel suo insieme di definizione.
b) Calcolare l'integrale curvilineo della (*) lungo la curva semplice che ha come sostegno l'arco di circonferenza

$$x^2+y^2 = 1 \quad , \quad x \geq 0 \quad , \quad y \geq 0$$

ed è orientata nel verso delle y decrescenti.

4 Calcolare l'integrale triplo

$$\iiint_T \frac{xy|z^3|}{1+(x^2+y^2)^4}\, dx\, dy\, dz \quad ,$$

essendo T l'insieme $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x \leq 0\,,\, y \geq 0\,,\, z^2 \leq x^2+y^2 \leq 1\}$.

5 È assegnato il problema di Cauchy:

$$(*) \qquad \begin{cases} y' + \frac{1}{2}xy \;=\; xy^3 \\ y(0) = 1 \end{cases} .$$

a) Senza risolvere il problema (*) provare che, se φ è una soluzione di (*), il punto $x_0 = 0$ è di minimo relativo per φ.
b) Risolvere il problema (*).

Corso di Laurea in **Fisica**
Compito di **Analisi Matematica II** (Prof. A. Villani)
assegnato il 18 febbraio 2013

1 Trovare i punti di estremo relativo per la funzione reale di due variabili reali

$$f(x,y) \;=\; (x+y)|\sqrt{x^2+y^2}-4|\ ,$$

specificandone la natura e precisando se si tratta di punti di estremo relativo proprio. Dire inoltre, motivando la risposta, se i punti trovati sono anche di estremo assoluto.

2 Trovare il massimo ed il minimo assoluti della restrizione della funzione reale di tre variabili reali

$$g(x,y,z) = \log_{\frac{1}{2}}\left(\tfrac{1}{2}+\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

all'insieme

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2+7z^2 = 1\,,\ x-y+z = 1\}\ .$$

3 Data la serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)x^{2n+3}}{4^{2n+1}}$,
a) determinarne l'insieme di convergenza;
b) trovarne la funzione somma $f(x)$;
c) calcolare la derivata $f^{(15)}(0)$.

4 Calcolare l'integrale triplo

$$\iiint_T \frac{xy^3|z^5|}{1+(4x^2+y^2)^3}\,dx\,dy\,dz \quad ,$$

essendo T l'insieme $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x \geq 0\,,\ y \leq 0\,,\ z^2 \leq 4x^2+y^2 \leq 1\}$.

5 È assegnato il problema di Cauchy:

$$(*) \qquad \begin{cases} y' + xy \;=\; (xy)^3 \\ y(0) = -\frac{1}{2} \end{cases} \ .$$

a) Senza risolvere il problema (*) provare che, se φ è una soluzione di (*), il punto $x_0 = 0$ è di minimo relativo per φ.
b) Risolvere il problema (*), precisando l'intervallo di definizione della funzione massimale.

Corso di Laurea in **Fisica**
Compito di **Analisi Matematica II** (Prof. A. Villani)
assegnato il 18 febbraio 2013
(programma 2010-11)

1 Trovare i punti di estremo relativo per la funzione reale di due variabili reali

$$f(x,y) \;=\; (x+y)|\sqrt{x^2+y^2}-4|\ ,$$

specificandone la natura e precisando se si tratta di punti di estremo relativo proprio. Dire inoltre, motivando la risposta, se i punti trovati sono anche di estremo assoluto.

2 Trovare il massimo ed il minimo assoluti della restrizione della funzione reale di tre variabili reali

$$g(x,y,z) = \log_{\frac{1}{2}}\left(\tfrac{1}{2}+\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

all'insieme

$$K = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;:\; x^2+y^2+7z^2=1\,,\; x-y+z=1\}\ .$$

3 a) Decidere se la forma differenziale

$$(*)\qquad \left[\frac{x}{1+x^2+4y^2}+y\mathrm{e}^{1-(x^2+4y^2)}\right]\mathrm{d}x \;+\; \frac{4y}{1+x^2+4y^2}\,\mathrm{d}y$$

è esatta nel suo insieme di definizione.
b) Calcolare l'integrale curvilineo della (*) lungo la curva semplice che ha come sostegno l'arco di ellisse

$$x^2+4y^2=1 \quad , \quad x\geq 0 \quad , \quad y\leq 0$$

ed è orientata nel verso delle x crescenti.

4 Calcolare l'integrale triplo

$$\iiint_T \frac{xy^3|z^5|}{1+(4x^2+y^2)^3}\,dx\,dy\,dz \quad ,$$

essendo T l'insieme $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;:\; x\geq 0\,,\; y\leq 0\,,\; z^2\leq 4x^2+y^2\leq 1\}$.

5 È assegnato il problema di Cauchy:

$$(*)\qquad \begin{cases} y'+xy \;=\; (xy)^3 \\ y(0) = -\frac{1}{2} \end{cases} .$$

a) Senza risolvere il problema (*) provare che, se φ è una soluzione di (*), il punto $x_0 = 0$ è di minimo relativo per φ.
b) Risolvere il problema (*), precisando l'intervallo di definizione della funzione massimale.

Corso di Laurea in **Fisica**
Compito di **Analisi Matematica II** (Prof. A. Villani)
assegnato il 18 febbraio 2013 (prova in itinere)

A

1 Trovare il massimo ed il minimo assoluti della funzione reale di due variabili reali

$$f(x,y) \;=\; (x^2+y^2-1)(x-y)$$

nell 'insieme $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \geq 0\,,\, x^2+y^2 \leq \frac{4}{3}\}$.

2 Trovare tutti i punti di $\mathbb{R}^2$ nei quali la funzione reale di due variabili reali

$$g(x,y) \;=\; (x^2+y^2-1)|x-y|$$

è differenziabile. Giustificare le risposte date.

3 a) Provare che l'insieme $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2+4z^2 = 1\,,\, y-z = 1\}$ è sequenzialmente compatto.
b) Trovare il massimo ed il minimo assoluti della restrizione della funzione reale di tre variabili reali $h(x,y,z) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+y^2+z}$ all'insieme K.

4 Data la serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+5}}{2^{2n-3}(n+1)}$,
a) determinarne l'insieme di convergenza;
b) trovarne la funzione somma $f(x)$;
c) calcolare le derivate $f^{(29)}(0)$ e $f^{(30)}(0)$.

5 È assegnato il problema di Cauchy:

$$(*) \qquad \begin{cases} y' + \frac{x}{x^2+1}\, y \;=\; xy^3 \\ y(0) = \frac{1}{2} \end{cases} .$$

a) Senza risolvere il problema (*) provare che, se φ è una soluzione di (*), il punto $x_0 = 0$ è di massimo relativo per φ.
b) Risolvere il problema (*), precisando l'intervallo di definizione della funzione massimale.

Corso di Laurea in **Fisica**
Compito di **Analisi Matematica II** (Prof. A. Villani)
assegnato il 18 febbraio 2013 (prova in itinere)

B

1 Trovare il massimo ed il minimo assoluti della funzione reale di due variabili reali

$$f(x,y) \;=\; (x^2+y^2-4)(x+y)$$

nell 'insieme $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \geq 0\,,\, x^2+y^2 \leq 5\}$.

2 Trovare tutti i punti di $\mathbb{R}^2$ nei quali la funzione reale di due variabili reali

$$g(x,y) \;=\; (x^2+y^2-4)|x+y|$$

è differenziabile. Giustificare le risposte date.

3 a) Provare che l'insieme $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 4x^2+4y^2+z^2 = 1\,,\, 2y-x = 1\}$ è sequenzialmente compatto.

b) Trovare il massimo ed il minimo assoluti della restrizione della funzione reale di tre variabili reali $h(x,y,z) = \log(1+x+4y^2+z^2)$ all'insieme K.

4 Data la serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)x^{4n+5}}{4^{2n-3}}$,

a) determinarne l'insieme di convergenza;
b) trovarne la funzione somma $f(x)$;
c) calcolare le derivate $f^{(33)}(0)$ e $f^{(34)}(0)$.

5 Trovare le soluzioni comuni alle due equazioni differenziali lineari:

$$(1)\quad y^{(\mathrm{IV})}+4y''+3y'-2y \;=\; 6(\mathrm{e}^x-1)+4x \quad , \quad (2)\quad y^{(\mathrm{IV})}+3y''+4y' \;=\; 8(\mathrm{e}^x-1)\ .$$

Provare poi che l'insieme delle soluzioni comuni a (1) e (2) coincide con l'insieme delle soluzioni di una (opportuna) equazione differenziale lineare del primo ordine.

Corso di Laurea in **Fisica**
Compito di **Analisi Matematica II** (Prof. A. Villani)
assegnato il 6 maggio 2013

1 Provare che la successione di funzioni

$$(*) \qquad \left\{ \frac{n\sqrt{x}}{nx+1} \right\}$$

converge semplicemente, ma non uniformemente, nell'intervallo $[0, +\infty[$.
Provare poi che la (*) converge uniformemente in ogni intervallo $[a, +\infty[$, $a > 0$.

2 Trovare il massimo ed il minimo assoluti della restrizione della funzione reale di tre variabili reali

$$g(x, y, z) = x^2 + y + 2z$$

all'insieme

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + 4y^2 + 4z^2 \leq 16\} \ .$$

3 Calcolare l'integrale curvilineo della forma differenziale

$$\frac{x^4 + y^4 + 2xy(xy-1)}{\left(x^2+y^2\right)^2}\, dx \ + \ \frac{x^2 - y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\, dy$$

lungo la poligonale Π di vertici $p = (0, 1)$, $q = (7, 8)$ e $r = (8, 1)$.

4 Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_T \frac{xy}{(x^2+y^2)^3}\, \mathrm{e}^{(x^2+y^2)^{-1}}\, dx\, dy \quad ,$$

essendo T l'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \geq 1\,,\ y \geq 0\,,\ x^2 + y^2 \leq 4\}$.

5 È assegnato il problema di Cauchy:

$$(\mathrm{C}) \qquad \begin{cases} y'' + 9y' + 20y \ = \ \mathrm{e}^{-3x} \operatorname{sen} \mathrm{e}^{x} \\ y(\log \pi) = y'(\log \pi) = 0 \end{cases} .$$

a) Senza risolvere il problema (C) provare che la sua soluzione φ è strettamente decrescente nel punto $x_0 = \log \pi$.
b) Risolvere il problema (C).

Corso di Laurea in **Fisica**
Compito di **Analisi Matematica II** (Prof. A. Villani)
assegnato il 6 maggio 2013
(programma 2010-11)

1 Trovare tutti i punti di $\mathbb{R}^2$ nei quali la funzione reale di due variabili reali

$$f(x,y) \;=\; \mathrm{e}^{(x^2+y^2)|x-y|}$$

è differenziabile. Giustificare le risposte date.

2 Trovare il massimo ed il minimo assoluti della restrizione della funzione reale di tre variabili reali

$$g(x,y,z) = x^2 + y + 2z$$

all'insieme

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + 4y^2 + 4z^2 \le 16\} \,.$$

3 Calcolare l'integrale curvilineo della forma differenziale

$$\frac{x^4 + y^4 + 2xy(xy-1)}{\left(x^2+y^2\right)^2}\, dx \;+\; \frac{x^2 - y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\, dy$$

lungo la poligonale Π di vertici $p = (0,1)$, $q = (7,8)$ e $r = (8,1)$.

4 Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_T \frac{xy}{(x^2+y^2)^3}\, \mathrm{e}^{(x^2+y^2)^{-1}}\, dx\, dy \quad ,$$

essendo T l'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \ge 1 \,,\, y \ge 0 \,,\, x^2 + y^2 \le 4\}$.

5 È assegnato il problema di Cauchy:

$$\text{(C)} \qquad \begin{cases} y'' + 9y' + 20y \;=\; \mathrm{e}^{-3x} \operatorname{sen} \mathrm{e}^{x} \\ y(\log \pi) = y'(\log \pi) = 0 \end{cases} \quad .$$

a) Senza risolvere il problema (C) provare che la sua soluzione φ è strettamente decrescente nel punto $x_0 = \log \pi$.
b) Risolvere il problema (C).