Corso di Analisi matematica 1 per Fisici (a.a. 2007-08)
(prof. Alfonso Villani)

Una raccolta di esercizi

(aggiornamento: 22 maggio 2008)

3 Risolvere le seguenti equazioni nell'incognita x:
a) $x^2(x+1) = x(x-2)$; b) $(3x^2 - 8x)^2 = 9$;
c) $\sqrt{-x^2 - 22x - 4} = 9$; d) $(2x-1)(2x^2+5x-3)(2x^2-3x+5) = 0$;
e) $4x^4 + 11x^2 - 3 = 0$.

6 Risolvere le seguenti disequazioni nell'incognita x:
a) $x + 1 \leq x(x-2)$; b) $\dfrac{5x-3}{4} > \dfrac{2x+5}{3}$;
c) $4x^2 - 28x + 49 \leq 0$; d) $(2x+15)(2x^2+13x-7) < 0$;
e) $(x^2+x-12)(x^2+x+12) > 0$; f) $\dfrac{3-4x}{5x^2-9x+4} \geq 0$;
g) $\dfrac{(3-4x)(x^2-4)}{x^2-2x-15} < 0$.

9 Risolvere i seguenti sistemi di disequazioni nell'incognita x:

$$\text{(a)} \quad \begin{cases} x^2 - \sqrt{2}x - 4 \leq 0 \\ 2x^2 - 5x - 3 > 0 \end{cases} , \qquad \text{(b)} \quad \begin{cases} \dfrac{2x+1}{x^2+3\sqrt{2}x+4} \geq 0 \\ \sqrt{3}x + 1 > 0 \end{cases} , \qquad \text{(c)} \quad \begin{cases} x^2(2x+3) \leq 0 \\ x^2 + 11x + 10 > 0 \\ \dfrac{2x+11}{3x+31} \geq 0 \end{cases} .$$

12 Risolvere, al variare del parametro reale a, le seguenti equazioni nell'incognita x:
a) $a^2(x+1) = a(1-x)$; b) $x^2 + ax + 4 = 0$;
c) $(a^2-4)x^2 + (a+1)x - 1 = 0$; d) $\dfrac{(x-5)(x^2-3ax+2a^2)}{x-a^2} = 0$.

15 Risolvere, al variare del parametro reale a, le seguenti disequazioni nell'incognita x:
a) $x^2 + a(x+1) < 0$; b) $ax(x+1) + 1 > 0$;
c) $ax^2 + (2a-1)x + a \leq 0$; d) $(a-1)x^2 - ax + 2 \geq 0$.

18 a) Siano $A = [-1, 5[\cup [7, 12]$ e $B =]-\infty, \frac{1}{2}[\cup]6, 14[$. Determinare gli insiemi:

$$A \cup B \ , \quad A \cap B \ , \quad A \setminus B \ , \quad B \setminus A \ .$$

b) Siano A, B gli insiemi considerati in a) e sia $C = [3, +\infty[$. Determinare gli insiemi:

$$(A \cap B) \setminus C \ , \quad (A \cup B) \setminus C \ , \quad (A \setminus B) \cap C \ , \quad (A \setminus B) \cup C \ , \quad (A \setminus B) \cup (C \setminus A) \ , \quad (A \setminus B) \cap (C \setminus A) \ .$$

21 Siano A e B due insiemi. Provare che valgono le seguenti uguaglianze:
a) $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$; b) $A \cup (B \setminus A) = B \cup (A \setminus B)$;
c) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$; d) $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$.

24 Siano A, B e C tre insiemi. Esprimere (mediante le operazioni insiemistiche) ognuno dei seguenti insiemi in almeno un modo diverso da quello dato:

$$(A \cup B) \setminus C \quad , \qquad (A \cap B) \setminus C \quad , \qquad (A \setminus B) \setminus C \ .$$

Giustificare le risposte fornite.

27 Per ognuno dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ decidere se i numeri reali elencati in corrispondenza appartengono o meno all'insieme:

a) $A = \mathbb{Q} \cup [0, 3[\,$;
$x_1 = \sqrt{3},\ \ x_2 = -\sqrt{3},\ \ x_3 = 2,\overline{9},\ \ x_4 = 3,1311311131113\ldots,\ \ x_5 = \sqrt{77} - \sqrt{41}$;

b) $B = \big(\mathbb{Q} \cap]-\infty, 2[\big) \cup \{2m+1\ :\ m \in \mathbb{Z}\}$;
$y_1 = 3,\overline{9},\ \ y_2 = 2,\overline{9},\ \ y_3 = 4 - 3\sqrt{2},\ \ y_4 = -2\sqrt[3]{\frac{27}{16}},\ \ y_5 = 1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \ldots + \frac{1}{7^{10}}$;

c) $C = \big(\mathbb{R} \setminus \big(\mathbb{Q} \cap [\sqrt{2}, +\infty[\big)\big) \setminus \mathbb{Z}$;
$z_1 = -\frac{7}{4},\ \ z_2 = -7,\ \ z_3 = \sqrt{2},\ \ z_4 = \sqrt{4},\ \ z_5 = \frac{3}{2}$;

d) $D = \big(\mathbb{R} \setminus \big(\mathbb{Q} \cap [\sqrt{2}, +\infty[\big)\big) \cup \mathbb{Z}$;
$t_1 = -7,\ \ t_2 = 2\sqrt{2},\ \ t_3 = \frac{5}{2},\ \ t_4 = -\frac{5}{2},\ \ t_5 = 4,5 - 2,\overline{1}$;

e) $E = \big(\mathbb{R} \setminus \big(\mathbb{Q} \cap [\sqrt{2}, +\infty[\big)\big) \cap \mathbb{Z}$;
$w_1 = -7,\ \ w_2 = 2\sqrt{2},\ \ w_3 = \frac{5}{2},\ \ w_4 = -2,\overline{9},\ \ w_5 = -2,2\overline{9}$.

30 Siano A, B e C tre insiemi. Esprimere mediante le operazioni insiemistiche di unione, intersezione e differenza i seguenti insiemi:
a) l'insieme degli elementi che appartengono ad uno solo dei tre insiemi A, B e C;
b) l'insieme degli elementi che appartengono esattamente a due dei tre insiemi;
c) l'insieme degli elementi che appartengono ad almeno due dei tre insiemi.

33 a) Siano A, B e C tre insiemi. Provare che

$$A \cup B \cup C \ = \ A \cup (B \setminus A) \cup [C \setminus (A \cup B)]$$

(la precedente uguaglianza esprime l'unione $A \cup B \cup C$ dei tre insiemi A, B e C come unione di tre insiemi a due a due disgiunti).
b) Enunciare e dimostrare un risultato analogo relativamente all'unione di n insiemi.

36 Siano A, B e C sottoinsiemi non vuoti di $\mathbb{R}$.

1) Tradurre le seguenti frasi nel linguaggio della teoria degli insiemi adoperando soltanto i simboli "$\in$", "$\forall$", "$\exists$", "$:$", il simbolo di somma "$+$", quelli di disuguaglianza "$<$", "$\leq$" ecc. ed eventualmente quello di implicazione "$\Longrightarrow$" (non si possono usare le negazioni "$\nexists$", "$\not<$", "$\not\Longrightarrow$" ecc.):

(P$_1$) "Se si sommano due qualsiasi numeri, uno appartenente ad A e l'altro a B, non si ottiene mai un numero maggiore di tutti i numeri appartenenti a C."

(P$_2$) "Se si sommano due qualsiasi numeri, uno appartenente ad A e l'altro a B, non si ottiene mai un numero maggiore di qualcuno dei numeri appartenenti a C."

(P$_3$) "Vi sono due numeri, uno appartenente ad A e l'altro a B, la cui somma è maggiore di tutti i numeri appartenenti a C."

(P$_4$) "Dato un qualsiasi numero appartenente ad A, è sempre possibile trovarne un altro, appartenente all'insieme B, in modo che la somma dei due numeri sia maggiore di tutti i numeri dell'insieme C."

(P$_5$) "Dato un qualsiasi numero appartenente ad A, è sempre possibile trovarne un altro, appartenente all'insieme B, in modo che la somma dei due numeri sia maggiore di almeno un numero appartenente a C."

2) Per ognuna delle frasi (P$_1$), ... , (P$_5$) precisare A, B e C in maniera tale da ottenere una proposizione vera.

39 Siano $(\mathrm{P}_1), \ldots, (\mathrm{P}_5)$ le proposizioni dell'Esercizio **36**. Stabilire quali delle implicazioni $(\mathrm{P}_i) \Longrightarrow (\mathrm{P}_j)$, $(i, j = 1, \ldots, 5; i \neq j)$ sono vere e quali no; in questo secondo caso esibire un controesempio.

42 Per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ si ha che
a) almeno uno dei due numeri -3 e 1 è soluzione della disequazione nell'incognita x:
(*) $kx^3 - 3k^2x + k + 1 \leq 0$?
b) entrambi i numeri -3 e 1 sono soluzioni della (*)?
c) uno solo dei due numeri -3 e 1 è soluzione della (*)?
d) nessuno dei numeri -3 e 1 è soluzione della (*)?

45 Per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ si ha che:
a) almeno uno dei due numeri -2 e 3 è soluzione del sistema di disequazioni nell'incognita x:

$$\text{(s)} \begin{cases} |k-1|x^4 + x^3 + 3 > 0 \\ 2k|x^2 - 2| + x \leq 0 \end{cases} ?$$

b) entrambi i numeri -1 e 2 sono soluzioni del sistema (s)?
c) uno solo dei due numeri -1 e 2 è soluzione di (s)?
d) nessuno dei numeri -1 e 2 è soluzione di (s)?

48 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita nel modo seguente:

$$f(x) = |x-1|x + 4x - 3 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Rappresentare su una retta cartesiana il segno di $f(x)$ al variare di x.

51 Dimostrare che i seguenti numeri reali sono irrazionali:

$$\text{a) } \sqrt{6}\ , \qquad \text{b) } \frac{4 - 3\sqrt{6}}{5}\ , \qquad \text{c) } \sqrt{2} + \sqrt{3}\ .$$

54 Per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ la disequazione nell'incognita x

$$x^2 - 4(k-1)x + k(3k-4) < 0$$

a) ammette soluzioni?
b) ammette soluzioni positive?
c) ammette soluzioni, ed esse sono tutte positive?
d) ammette sia soluzioni positive che soluzioni negative?

57 Disegnare i grafici delle seguenti funzioni reali definite in tutto $\mathbb{R}$:

$$f_1(x) = |x-1|\ ,\quad f_2(x) = -|x-1|\ ,\quad f_3(x) = 3 - |x-1|\ ,\quad f_4(x) = |3 - |x-1||\ ;$$
$$g_1(x) = 2x - 1\ ,\quad g_2(x) = 4 - 3x\ ,\quad g_3(x) = \max\{2x-1, 4-3x\}\ ,$$
$$g_4(x) = \max\{2x-1, 4-3x\} - 5\ ,\quad g_5(x) = |\max\{2x-1, 4-3x\} - 5|\ ,$$
$$h_1(x) = 2^x\ ,\quad h_2(x) = 2^x - 4\ ,\quad h_3(x) = |2^x - 4|\ .$$

60 Per ognuna delle seguenti coppie $f(x), g(x)$ di funzioni reali della variabile reale x disegnare entrambi i grafici in uno stesso piano cartesiano:

$$\text{a) } f(x) = 2^x,\ g(x) = 5^x\ ,\quad \text{b) } f(x) = \log_3 x,\ g(x) = \log_5 x\ ,$$
$$\text{c) } f(x) = |x|^3,\ g(x) = |x|^5\ ,\quad \text{d) } f(x) = \frac{1}{x^3},\ g(x) = \frac{1}{x^5}\ .$$

63 Disegnare i grafici delle seguenti funzioni reali di variabile reale:

$$\text{a) } \sqrt[5]{x^7}\ ,\quad \text{b) } \sqrt[7]{x^5}\ ,\quad \text{c) } \sqrt[6]{x^5}\ ,\quad \text{d) } \sqrt[4]{x^5}\ ,\quad \text{e) } \sqrt[5]{x^6}\ ,\quad \text{f) } \sqrt[5]{x^4}\ ,\quad \text{g) } \frac{1}{\sqrt[5]{x^7}}\ ,\quad \text{h) } \frac{1}{\sqrt[5]{x^6}}\ ,\quad \text{i) } \frac{1}{\sqrt[6]{x^5}}\ .$$

66 Sia $3\mathbb{Z}$ l'insieme dei numeri interi relativi multipli di 3 (cioè $3\mathbb{Z} = \{3m : m \in \mathbb{Z}\}$) e sia $\mathbb{Q}^+$ l'insieme dei numeri razionali positivi. Decidere quali delle seguenti strutture sono gruppoidi, quali semigruppi e quali gruppi:

$$(3\mathbb{Z}, +)\ ,\ \ (3\mathbb{Z}, -)\ ,\ \ (3\mathbb{Z}, \cdot)\ ,\ \ (3\mathbb{Z}, :)\ ,\ \ (\mathbb{Q}^+, +)\ ,\ \ (\mathbb{Q}^+, -)\ ,\ \ (\mathbb{Q}^+, \cdot)\ ,\ \ (\mathbb{Q}^+, :)\ .$$

69 Siano $(A, *)$ e $(B, \circ)$ due gruppi. Definire un'operazione $\diamond$ nell'insieme $A \times B$ in modo che $(A \times B, \diamond)$ risulti un gruppo.

72 a) Siano A e B due insiemi. Provare che vale l'uguaglianza:
(*) $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
(L'insieme che figura al primo ed al secondo membro della (*) si chiama la *differenza simmetrica* dei due insiemi A e B e si indica con il simbolo $A \bigtriangleup B$).
b) Dimostrare che l'operazione $\bigtriangleup$ gode delle proprietà commutativa ed associativa:
i) $A \bigtriangleup B = B \bigtriangleup A$;
ii) $(A \bigtriangleup B) \bigtriangleup C = A \bigtriangleup (B \bigtriangleup C)$.
(Per dimostrare la ii) conviene provare dapprima l'equivalenza:

$$x \in (A \bigtriangleup B) \bigtriangleup C \Leftrightarrow \begin{array}{l} x \text{ appartiene ad uno solo dei tre insiemi } A, B \text{ e } C \\ \text{oppure} \\ x \text{ appartiene ad ognuno dei tre insiemi } A, B \text{ e } C). \end{array}$$

c) Sia E un insieme. Verificare che la struttura $(\mathcal{P}(E), \bigtriangleup)$ è un gruppo ($\mathcal{P}(E)$ è l'*insieme delle parti,* o *famiglia dei sottoinsiemi,* di E, cioè l'insieme che ha come elementi tutti i sottoinsiemi di E).

75 Risolvere le seguenti equazioni e disequazioni nell'incognita x:
a) $|4x + 1| + 2x - 3 < 0$; b) $5|x + 1| - 3x + 2 = 0$;
c) $|x^2 + x - 2| - x^2 + 3x \geq 1$; d) $|1 - 5x| + x \leq |3x + 2| + 1$;
e) $||4x - 1| - 3| - 2x + 1 = 0$; f) $|5|x - 2| - 3| \geq 2x - 1$.

78 Risolvere, al variare del parametro reale k, le seguenti disequazioni nell'incognita x:

a) $\dfrac{2kx}{2x - 1} + 3 < \dfrac{x}{1 - 2x}$; b) $\dfrac{k(x - 1) - 1}{x^2 - 3x + 2} \geq 0$;

c) $\dfrac{x - k^2}{(x + k - 2)(x - 4)} \leq 0$; d) $\dfrac{x^2 - k^2}{x - k^2} \leq 0$.

81 Risolvere, al variare del parametro reale k, le seguenti disequazioni nell'incognita x:

a) $x^2 - k(k + 1)x + k^5 \leq 0$; b) $(x - 1)[x^2 - k(k + 1)x + k^5] > 0$;

c) $\dfrac{(x - 1)[x^2 - k(k + 1)x + k^5]}{|k - 2| - x} \leq 0$; d) $\dfrac{(2k - 1)[x^2 - k(k + 1)x + k^5]^3}{2kx - (x + 1)} \leq 0$.

84 Risolvere le seguenti disequazioni nell'incognita x:
a) $9x^3 < x + 2$; b) $x^3 + 12 \geq 5x^2$;
c) $x^4 - 4x^3 + 42 < 29x - 8x^2$; d) $x^4 - 19x^3 + 56x^2 + 341x + 121 \leq 0$;
e) $x^6 - 19x^3 - 216 \geq 0$.

87 Risolvere le seguenti disequazioni nell'incognita x:
a) $6x^4 + 7x^3 + 6x^2 - 1 < 0$; b) $\dfrac{x^4 + x^2 - 2}{x^6 + x^3 - 2} \geq 0$;

c) $x^6 + (3\sqrt{3} - 2\sqrt{2})x^3 - 6\sqrt{6} > 0$; d) $x^8 + (3\sqrt{3} - 2\sqrt{2})x^4 - 6\sqrt{6} > 0$;

e) $4x^4 - 28x^3 + 53x^2 - 28x + 49 > 0$.

90 Risolvere le seguenti disequazioni nell'incognita x:
a) $x^3 + 4x^2 + 2x - 1 \leq 0$; b) $2x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 9x + 5 \leq 0$;
c) $2x^3 + x^2 + 3x - 2 > 0$, d) $x^4 + 4x^2 - 5 \leq 0$.

93 Risolvere le seguenti disequazioni nell'incognita x:
a) $4x^3 + 19x^2 + 15x - 5 < 0$;
b) $x^2(3x + 1) < 4(1 - x)$;
c) $\dfrac{3x^3 + 2}{x - 2} + 1 \leq \dfrac{6(3x + 1)}{x + 1} - \dfrac{x(6x + 1)}{2 - x} - x$;
d) $\dfrac{x^3}{x + 3} - \dfrac{1}{1 - x} \geq 2 - \dfrac{3x^2 - 8x + 1}{x^2 + 2x - 3}$.

96 Siano A, B, C e D insiemi.
a) Che cosa vuol dire che la coppia ordinata (a, b) non appartiene a $A \times B$?
b) Provare che
(*) $A \subseteq C$ e $B \subseteq D \Rightarrow A \times B \subseteq C \times D$.
c) Provare che se nessuno degli insiemi A, B, C e D è vuoto allora è vero pure il viceversa della (*).
d) Provare che valgono le uguaglianze:
i) $(A \cup C) \times B = (A \times B) \cup (C \times B)$, ii) $(A \cap C) \times B = (A \times B) \cap (C \times B)$,
iii) $(A \setminus C) \times B = (A \times B) \setminus (C \times B)$.
e) È vero che $(A \cap C) \times (B \cap D) = (A \times B) \cap (C \times D)$?
f) È vero che $(A \setminus C) \times (B \setminus D) = (A \times B) \setminus (C \times D)$?
g) A che cosa è uguale l'insieme $(A \cup C) \times (B \cup D)$?

99 Stabilire quali delle seguenti funzioni definte in $\mathbb{N}_0$ ed a valori in $\mathbb{N}_0$ sono iniettive:

$$f_1(n) = \begin{cases} 4 - n & \text{se } n \leq 4 \\ n & \text{se } n > 4 \end{cases} \quad , \quad f_2(n) = n^2 + 1 \quad , \quad f_3(n) = \begin{cases} 5n & \text{se } n \in P \\ 4n & \text{se } n \in D \end{cases}$$

$$f_4(n) = \begin{cases} 5n & \text{se } n \in P \\ 3n & \text{se } n \in D \end{cases} \quad , \quad f_5(n) = \begin{cases} n^2 - 1 & \text{se } n \in D \\ n^2 + 6n + 8 & \text{se } n \in P \end{cases}$$

(P e D indicano, rispettivamente, l'insieme dei numeri naturali pari e quello dei numeri naturali dispari). Giustificare le risposte date.

102 Stabilire quali delle seguenti funzioni reali di variabile reale sono iniettive:

$$f_1(x) = \frac{x}{x + 2} \quad , \quad f_2(x) = \frac{x^2}{x^2 + 2} \quad , \quad f_3(x) = \frac{x^3}{x^3 + 2} \quad ,$$

$$f_4(x) = \left(\frac{x}{x + 2}\right)^2 \quad , \quad f_5(x) = \left(\frac{x}{x + 2}\right)^3 \quad .$$

Motivare le risposte date e, per ognuna delle funzioni f_i che è iniettiva, trovare il dominio e la legge della funzione inversa f_i^{-1}.

105 Calcolare i seguenti logaritmi:

$$\log_{\frac{1}{9}} 3 \ , \quad \log_{2\sqrt{2}} 4 \ , \quad \log_{343} \frac{3}{21} \ , \quad \log_{\pi} \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2 + \sqrt{2}} + \frac{1}{2 - \sqrt{2}}\right)\right] \ ,$$

$$\log_{12} \log_{625} \sqrt[3]{5} \ , \quad \log_8 2^{-\pi} \ , \quad \log_5 \frac{\log_3 32}{\log_3 \sqrt[5]{2}} \ , \quad \log_{32} \log_{81} \log_{144} 12^{\sqrt{12}} \ .$$

108 Calcolare i seguenti logaritmi:

$$\log_{12} 2\sqrt{3}\ , \quad \log_{90} 3\sqrt{10}\ , \quad \log_{18} \frac{1}{3\sqrt{2}}\ , \quad \log_{625} 0,04\ ,$$

$$\log_{\frac{49}{9}} \left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3-\sqrt{2}}+\frac{1}{3+\sqrt{2}}\right)\right) \quad , \quad \log_{3\sqrt{3}} \log_{27} \log_{121} 11^{\sqrt[3]{24}}\ , \quad \log_{\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}} \frac{\log_7 \frac{1}{16}}{\log_7 \frac{\sqrt{2}}{8}}\ .$$

111 Usando solo carta e penna, disporre in ordine crescente i seguenti dieci numeri reali:

$$x_1 = \log_{\frac{1}{8}} \sqrt[3]{(-2)^4}\ , \quad x_2 = 21^{-0,1}\ , \quad x_3 = \log_3 \frac{4}{21} + \log_3 \frac{7}{36}\ ,$$

$$x_4 = \log_{\sqrt{2}} \left(\log_{\sqrt{5}} \left(1-\frac{24}{25}\right)^3 + 28\right)\ , \quad x_5 = \log_{5^{\sqrt{5}}} \sqrt{5}^{2\sqrt{29}}\ ,$$

$$x_6 = (\log_5 2)^{-1} \log_5 4\sqrt{2}\ , \quad x_7 = 22^{-0,1}\ , \quad x_8 = -\left(\frac{2}{3}\right)^{2,3}\ ,$$

$$x_9 = \log_7 \frac{1}{8} + \log_{49} 64\ , \quad x_{10} = \log_2 \log_3 3^{512}\ .$$

114 Per ognuna delle seguenti funzioni reali di variabile reale:

$$4x^3+5 \quad , \quad 4x^2-5|x|+3 \quad , \quad 4x^2-5x+3 \quad ,$$

$$2^{1-3x} \quad , \quad \log_2(1-5x) \quad , \quad 2^{|x+1|} \quad ,$$

a) stabilire se la funzione data è iniettiva oppure no e motivare la risposta data;
b) se la funzione è iniettiva, trovare il dominio, la legge ed il codominio della funzione inversa.

117 Trovare il dominio di ognuna delle seguenti funzioni reali di variabile reale:

$$f(x) = \sqrt{\frac{2x^2-7x+2}{3x-5}}\ , \qquad g(x) = \frac{\sqrt{2x^2-7x+2}}{\sqrt{3x-5}}\ ,$$

$$h(x) = \sqrt{|x-5|-x^2} - \frac{x}{x-2}\ , \quad k(x) = \frac{(|x-4|-\sqrt{7})^{\sqrt{7}}}{\sqrt{\sqrt{11}-|x-5|}}\ .$$

120 Sia A il sottoinsieme di $\mathbb{R}$ costituito da tutti i numeri reali del tipo $p+q\sqrt{2}$ con $p,q \in \mathbb{Q}$. Provare che A è un sottocampo di $\mathbb{R}$.

123 Rappresentare su una retta cartesiana il segno delle seguenti funzioni reali di variabile reale:

$$f(x) = |5x-3|+3x+7 \quad , \quad g(x) = |x^2-4|-|x^2-7x+12|+x \quad ,$$

$$h(x) = ||x^2-1|-x|-3x-2 \quad , \quad m(x) = \frac{|3x+1|-x}{|3x-1|+|x|+2} \quad ,$$

$$l(x) = \frac{|4x-1|-x}{9-x^2} \quad .$$

126 Delle seguenti relazioni nell'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali stabilire quali sono riflessive, quali simmetriche, quali transitive, quali antisimmetriche e quali totali:

$$R_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} : x - y \in \mathbb{Q}\},\ R_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} : xy \in \mathbb{Q}\},$$
$$R_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} : x - y \in \mathbb{N}\},\ R_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} : |x| = |y|\},$$
$$R_5 = \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} : |x| \le |y|\},\ R_6 = \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} : x \ge y\}.$$

129 Sia α un piano e siano r e O, rispettivamente, una retta ed un punto di α. Verificare che ognuna delle relazioni $R_1, \ldots, R_5$, di seguito specificate, è una relazione di equivalenza in α:

$\mathrm{P}R_1\mathrm{Q} \Leftrightarrow \mathrm{P}=\mathrm{Q}=\mathrm{O}$ oppure $\mathrm{P}\neq\mathrm{O}$, $\mathrm{Q}\neq\mathrm{O}$ ed i segmenti OP e OQ sono congruenti;
$\mathrm{P}R_2\mathrm{Q} \Leftrightarrow \mathrm{P}=\mathrm{Q}$ oppure $\mathrm{P}\neq\mathrm{Q}$ ed il segmento PQ è parallelo alla retta r;
$\mathrm{P}R_3\mathrm{Q} \Leftrightarrow \mathrm{P}=\mathrm{Q}$ oppure $\mathrm{P}\neq\mathrm{Q}$ ed il segmento PQ è perpendicolare alla retta r;
$\mathrm{P}R_4\mathrm{Q} \Leftrightarrow \mathrm{P}=\mathrm{Q}=\mathrm{O}$ oppure $\mathrm{P}\neq\mathrm{O}$, $\mathrm{Q}\neq\mathrm{O}$ ed uno dei due segmenti OP e OQ è contenuto nell'altro;
$\mathrm{P}R_5\mathrm{Q} \Leftrightarrow \mathrm{P}=\mathrm{Q}=\mathrm{O}$ oppure $\mathrm{P}\neq\mathrm{O}$, $\mathrm{Q}\neq\mathrm{O}$ ed i segmenti OP e OQ sono paralleli.

Dire inoltre, per ognuna delle relazioni R_i, $i = 1, \ldots, 5$, quali sono gli elementi dell'insieme quoziente $\alpha/_{R_i}$. Giustificare le risposte date.

132 Nell'insieme $\mathbb{R}^2$ si consideri la relazione $\preceq$ definita nel modo seguente:

$$(x,y) \preceq (u,v) \ \Leftrightarrow\ x \le u \text{ e } y \le v\ ,$$

dove $\le$ è l'ordinamento aritmetico in $\mathbb{R}$.
a) Dimostrare che $\preceq$ è una relazione d'ordinamento parziale.
b) Dire se $\preceq$ è totale. Giustificare la risposta.
c) Determinare, se esistono, l'estremo inferiore e l'estremo superiore dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$, precisando se si tratta di minimo e di massimo:

$$A = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}\ ,$$
$$B = \{(0,0),(0,1),(1,0)\}\ ,\quad C = \{(0,1),(1,0)\}\ .$$

135 Si consideri l'insieme parzialmente ordinato $(A,\preceq)$, dove $A = \{3,5,10,15,60,90\}$ e $\preceq$ è la seguente relazione d'ordinamento parziale in A:

$$x \preceq y \ \Leftrightarrow\ x \text{ è un divisore di } y.$$

Trovare un sottoinsieme B di A in modo che:
a) B non sia limitato superiormente;
b) B sia limitato superiormente ma non abbia l'estremo superiore;
c) B abbia l'estremo superiore ma non il massimo;
d) B abbia il massimo.

138 Risolvere le seguenti equazioni nell'incognita x:

a) $\log_3(3x-7) = 2$;
b) $5^{x^2} + 25^{x^2-1} = \frac{11}{4}$;
c) $\log_3(x(x-3)) = \log_3(2x-5)$;
d) $\frac{1}{2}\log_3 x = \log_3 30 + 2\log_9 \frac{3}{5}$;
e) $\log_{\frac{1}{2}} |x^2 - |x| - 4| = 0$;
f) $4^{x+5} - \dfrac{3}{4^x} = 16$.

141 Risolvere le seguenti disequazioni nell'incognita x:

a) $\sqrt{3}^{|3-|x||} > 3\sqrt[3]{3}$;
b) $\log_2(x^2+x) > 1$;
c) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2^{x^2-4|x|}} \le \dfrac{1}{9}$;
d) $\log_2 \log_{\frac{1}{2}} \log_2 x > 0$;
e) $\left(3^{\sqrt{x+1}}\right)^{\sqrt{x+1}} \cdot 3^{x^2} \cdot 3^{2x} > 3^{-1}$;
f) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-2x-2) < 0$;
g) $\log_x 2 + 1 \le 0$;
h) $\log_{-x}(|x| - x) > \dfrac{|x+1|}{x+1}$;
i) $x^{x\log_2 x} > 1$;
l) $x^{x^4-1} > 1$.

144 Provare per induzione che:
1) $\sum_{i=1}^{n}(2i-1)=n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$;
2) $\sum_{i=1}^{n} i^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \quad \forall n \in \mathbb{N}$;
3) $\sum_{i=1}^{n}(2i-1)^2=\frac{1}{3}n(4n^2-1) \quad \forall n \in \mathbb{N}$;
4) $\sum_{i=1}^{n} i^3=\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$;
5) $\sum_{i=1}^{n}(2i-1)^3=n^2(2n^2-1) \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

147 Risolvere le seguenti disequazioni nell'incognita $n \in \mathbb{N}_0$:
a) $3^{n-1}>n^2+5n$; b) $5^n-2^n>3^{n+2}$;
c) $2^n \geq 3n+n^2$; d) $2^n>n^3$.
(suggerimento: verificare che ognuna delle precedenti disuguaglianze è, definitivamente, una proposizione induttiva).

150 Risolvere le seguenti equazioni reciproche:

$$\text{a)}\;\; x^3+6x^2-6x-1=0\,; \qquad \text{b)}\;\; x^3+6x^2+6x+1=0\,;$$
$$\text{c)}\;\; x^4-7x^3+14x^2-7x+1=0\,; \qquad \text{d)}\;\; x^5-3x^4+5x^3-5x^2+3x-1=0\,;$$
$$\text{e)}\;\; x^6-2x^5-2x^4+2x^2+2x-1=0\,; \qquad \text{f)}\;\; 6x^4-35x^3+62x^2-35x+6=0\,;$$
$$\text{g)}\;\; 12x^6-40x^5-39x^4+170x^3-39x^2-40x+12=0\,.$$

153 Per ognuna delle funzioni $f_i : [-1,+\infty[\to \mathbb{R}$, $i=1,\ldots,4$, di seguito specificate:

$$f_1(x)=\begin{cases} x & \text{se } x\in[-1,0]\,, \\ \left(\frac{1}{2}\right)^x & \text{se } x\in]0,+\infty[\,, \end{cases} \qquad f_2(x)=\begin{cases} 1-x & \text{se } x\in[-1,1]\,, \\ \log_{\frac{1}{2}} x & \text{se } x\in]1,+\infty[\,, \end{cases}$$

$$f_3(x)=\begin{cases} \sqrt[3]{x} & \text{se } x\in[-1,1]\,, \\ \frac{1}{\sqrt[3]{x}} & \text{se } x\in]1,+\infty[\,, \end{cases} \qquad f_4(x)=\begin{cases} 2^{x+2} & \text{se } x\in[-1,1]\,, \\ -x^2 & \text{se } x\in]1,+\infty[\,, \end{cases}$$

a) disegnare il grafico della funzione f_i;
b) stabilire se la funzione f_i è iniettiva e motivare la risposta data;
c) qualora f_i sia iniettiva, trovare il dominio e la legge della funzione inversa f_i^{-1} e disegnarne il grafico.

156 Sia $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ così definita:

$$f(x)=\begin{cases} x^3 & \text{se } x\in[-1,1]\setminus\{\frac{1}{2}\}\ , \\ 2 & \text{se } x=\frac{1}{2}\ . \end{cases}$$

a) Disegnare il grafico di f e dire se f è monotona. Giustificare la risposta.
b) Provare che f è iniettiva e trovare il dominio e la legge di f^{-1}.

159 Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ così definita:

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{se } x\in\mathbb{Q}\ , \\ -x & \text{se } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\ . \end{cases}$$

a) Provare che f è iniettiva e che risulta $f=f^{-1}$.
b) Dire se esistono intervalli I tali che $f|_I$ è monotona. Giustificare la risposta.

162 Risolvere le seguenti disequazioni nell'incognita x:
a) $\dfrac{10x(x+1)^2-25x+1}{x^2+4x+11}\leq 1$;
b) $2\sqrt{5}x^4+21x^3-21x-2\sqrt{5}>0$;
c) $2x^4-11x^3+9x^2-11x+2\leq 0$;
d) $x^5+\dfrac{8-7\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}x^4+\dfrac{9\sqrt{3}-28}{2\sqrt{3}}x^3+\dfrac{28-9\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}x^2+\dfrac{7\sqrt{3}-8}{2\sqrt{3}}x-1\geq 0.$

165 a) Provare per induzione che:

1) qualunque sia $n \in \mathbb{N}$, il numero intero $n(n+1)(n+2)$ è divisibile per 6;
2) qualunque sia $n \in \mathbb{N}$, il numero intero $n(n+1)(n+2)(n+3)$ è divisibile per 24.

b) Generalizzare i risultati della parte a) provando che il numero intero $\Pi_{i=0}^{k-1}(n+i)$ è divisibile per $k!$, qualunque siano $n, k \in \mathbb{N}$.

167 Risolvere le seguenti equazioni e disequazioni irrazionali:

$$\text{a) } x = 3 + \sqrt{x^2 - 2x} \; ; \qquad \text{b) } \sqrt{x} + \sqrt{x-1} - \sqrt{x+1} = 0 \; ; \qquad \text{c) } \sqrt[3]{x} + \sqrt{|x|} = 0 \; ;$$
$$\text{d) } \sqrt{3x^2 + x - 2} < 4x + 1 \; ; \qquad \text{e) } \sqrt{x-2} - x + 4 \geq 0 \; ; \qquad \text{f) } 3 - \sqrt{x+2} > \sqrt{x+1} \; .$$

168 Risolvere le seguenti disequazioni:

$$\text{a) } \sqrt[4]{x^4 + x^2 - 2} < x \; ; \qquad \text{b) } \sqrt{x^2 + 8x} \geq 2x + 1 \; ;$$
$$\text{c) } \sqrt[3]{6x^2 + 8x + 3} \leq x + 2 \; ; \qquad \text{d) } \sqrt{5x^2 + 4x - 1} \leq 3x - 1 \; .$$

171 Risolvere le seguenti disequazioni:

$$\text{a) } \frac{\sqrt{8x^3 - 1}}{2x + 1} \geq \sqrt{2x - 3} \; ; \qquad \text{b) } \frac{\sqrt{8x^3 + 1}}{2x - 3} \leq \sqrt{2x + 3} \; ;$$
$$\text{c) } \sqrt{x - 1} > \sqrt[3]{x^2 - 3x + 2} \; ; \qquad \text{d) } \sqrt{\frac{10 + 3x - x^2}{x - 1}} \geq 2\frac{x}{\sqrt{|x|}} \; .$$

174 Razionalizzare le disequazioni

$$\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} \leq h(x) \quad , \quad \sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} \geq h(x) \; .$$

177 Provare per induzione che:

1) $(1+x)^n \; \geq \; 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 \quad \forall x \in [0, +\infty[\; , \; \forall n \in \mathbb{N}\, ;$

2) $(1+x)^n \; > \; 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 \quad \forall x \in]0, +\infty[\; , \; \forall n \in \mathbb{N}\, , \; n \geq 3\, .$

180 Portare qualche esempio di proposizione $P(n)$, $n \in \mathbb{N}_0$, la quale sia induttiva (cioè tale che l'implicazione

$$n \in \mathbb{N}_0,\; P(n) \text{ è vera } \Longrightarrow P(n+1) \text{ è vera}$$

sia vera), ma risulti falsa per qualunque valore di $n \in \mathbb{N}_0$.

183 Risolvere le seguenti disequazioni nell'incognita x :

$$\text{a) } \log_{\frac{1}{3}}(x^6 + x^3 - 2) + \log_3 4 > 0 \; ; \quad \text{b) } \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{x+2}} \geq 5^{\frac{x}{x+3}} \; ;$$
$$\text{c) } \log_2(1 - 3x) - 2\log_2 \frac{x+2}{\sqrt{2}} > 1 \; ; \quad \text{d) } \log_x^2 2 > \log_x \frac{1}{2} + 2\log_2 x \; ;$$
$$\text{e) } \log_{\frac{3}{4}} \left(x^2(4x^2 - 17x + 8)\right) < \log_{\frac{3}{4}}(17x - 4) \; ;$$
$$\text{f) } 4x + 1 - \log_2 \sqrt{x+2} < 5x^3 - \log_4(x+2) \; ;$$

g) $x^{\sqrt{2}} \leq x^{\sqrt{x}+\sqrt{2-x}}$; h) $\log_3 \log_{\frac{1}{3}} |2x-1| < 2$;

i) $\dfrac{|2^x - 1| - 3}{\log_2(x+1)+3} \geq 0$; l) $\dfrac{2^{\sqrt{4x-1}} - 3 \cdot 3^{|x|}}{9 - 3^{|x|+1}} < 1$;

m) $\sqrt{2^x+1} - \sqrt[3]{4^x-1} \geq 0$; n) $\left(\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\sqrt{|x+1|}}\right)^{\sqrt{x+2}} \leq \dfrac{1}{4}$;

o) $\log_2(x+3) + \log_{\frac{1}{2}}(1-5x) \leq 1$; p) $\log_{4x-1} x^{x^2+\frac{1}{4}} > \log_{4x-1} x^{x+\frac{1}{16}}$.

186 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita nel modo seguente:

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{se } x \in \,]-\infty, -1[\\ -(x+1) & \text{se } x \in \,[-1, 0[\\ \left(\dfrac{1}{2}\right)^x & \text{se } x \in [0, +\infty[\end{cases} .$$

a) Disegnare il grafico di f e dire se f è monotona in $\mathbb{R}$, giustificando la risposta.
b) Provare che f è iniettiva e trovare il dominio di f^{-1}.
c) Trovare la legge di f^{-1}.
d) Disegnare il grafico di f^{-1}.

189 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita nel modo seguente:

$$f(x) = \begin{cases} -4^x & \text{se } x \in \,]-\infty, 1[\\ \log_2 x & \text{se } x \in [1, +\infty[\end{cases} .$$

a) Disegnare il grafico di f .
b) Dire se f è monotona in $\mathbb{R}$. Giustificare la risposta.
c) Provare che f è iniettiva.
d) Trovare il dominio e la legge della funzione inversa.
e) Disegnare il grafico della funzione inversa.

192 Trovare i domini delle seguenti funzioni reali della variabile reale x:

a) $\sqrt[4]{\dfrac{2x-1}{3x-1}} - \log(x+5)$, b) $\dfrac{\log(3-\sqrt{1-2x})}{\sqrt{x+2}}$, c) $\sqrt{1-\log_3(x+5)} - (x+3)^{-5}$,

d) $\dfrac{\sqrt{72-4^x-2^x}}{x+4}$, e) $\sqrt{\log_3^2 x - 2\log_3 x - 3}$, f) $\log \dfrac{2x-3}{4x-5} + \sqrt{2x+1}$.

195 Risolvere il sistema di disequazioni

$$\begin{cases} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-7} > 4\sqrt{2} \\ \log_3(10x-3) \geq 3 \\ \sqrt{11x-28} \leq x \end{cases} .$$

198 Provare che i seguenti sottoinsiemi dell'insieme $\mathbb{R}$, dotato dell'ordinamento aritmetico, sono tutti limitati e trovare, per ognuno di essi, l'estremo superiore e l'estremo inferiore, precisando se si tratta, rispettivamente, di massimo e di minimo. Giustificare le risposte date.
$A = \left\{\frac{n}{n+1} \,:\, n \in \mathbb{N}\right\}$; $B =]0,1[\cup \{2,4\}$;
$C = \{r\sqrt{3} \,:\, r \in]0,2[\cap \mathbb{Q}\}$; $D = \left\{\frac{x}{x^2+1} : x \in \mathbb{R}\right\}$;
$E = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x = +1, C_1C_2C_3\ldots$ ed esattamente quattro delle cifre C_i sono diverse da zero$\}$.

201 Sia X un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$ tale che

$$\max X = 4 \quad , \quad \inf X = -\tfrac{1}{3} \quad , \quad X \text{ non ha minimo} \quad .$$

Trovare l'estremo superiore e l'estremo inferiore dell'insieme $Y = \{-3x + 2 \,:\, x \in X\}$ e decidere se si tratta, rispettivamente, di massimo e di minimo.

204 Risolvere le seguenti equazioni:

$$\text{a) } \operatorname{sen} x = \tfrac{\sqrt{3}}{2} \;; \quad \text{b) } \cos x = \tfrac{\sqrt{2}}{2} \;; \quad \text{c) } \operatorname{tg} x = -\sqrt{3} \;; \quad \text{d) } |\operatorname{sen} x| = \tfrac{1}{2} \;; \quad \text{e) } |\cos x| = \tfrac{\sqrt{2}}{2} \;;$$
$$\text{f) } 3\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x - 4\cos x - 2 = 0 \;; \quad \text{g) } \operatorname{tg}^4 x - 4\operatorname{tg}^2 x + 3 = 0 \;;$$
$$\text{h) } 3\operatorname{tg} x = 2\cos x \;; \quad \text{i) } 2\cos^2 x = 1 + 2\operatorname{sen} x \;; \quad \text{l) } 4\operatorname{sen}^2(2x - \tfrac{\pi}{6}) - 8\cos(2x - \tfrac{\pi}{6}) + 1 = 0 \;.$$

207 Risolvere le seguenti equazioni:

$$\text{a) } \operatorname{sen} x - \cos x = 0 \;; \quad \text{b) } \operatorname{sen} x + \cos x = 1 \;; \quad \text{c) } \sqrt{3}\cos x - \operatorname{sen} x = 1 \;; \quad \text{d) } \sqrt{3}\operatorname{sen} x - \cos x = 1 \;;$$
$$\text{e) } \operatorname{tg}(\tfrac{\pi}{4} + x) - 3\operatorname{tg} x = 2 \;; \quad \text{f) } \operatorname{tg} x + \operatorname{sen} x = 1 + \cos x \;; \quad \text{g) } \operatorname{tg} x + \cos 2x = 1 \;.$$

210 Risolvere le seguenti equazioni:

$$\text{a) } \cos(x + \tfrac{\pi}{3}) = \cos(x - \tfrac{\pi}{4}) \;; \quad \text{b) } \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 3x = \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 4x \;; \quad \text{c) } \operatorname{sen} 3x = 8\operatorname{sen}^3 x \;;$$
$$\text{d) } \operatorname{sen}(5x - 1) = \cos x \;; \quad \text{e) } 1 + \cos x = \cos\tfrac{x}{2} \;; \quad \text{f) } \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}\tfrac{x}{2} = \tfrac{1}{\cos x} + 2 \;; \quad \text{g) } \log_\pi \cos(5x + 2) = 1 \;.$$

213 Per ognuno dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ stabilire se si tratta di un insieme limitato superiormente [inferiormente] oppure no e, in caso affermativo, trovare l'estremo superiore [inferiore], precisando se si tratta di massimo [minimo]. Giustificare le risposte date.
$A = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x = -0, C_1C_2C_3\ldots$ e ognuna delle cifre C_i può assumere soltanto i valori 0 e 3$\}$.
$A_1 = \{x - y \,:\, x, y \in A\}$; $\qquad A_2 = A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$;
$B = \left\{\frac{3n^2}{4n+1} \,:\, n \in \mathbb{N}\right\}$; $\qquad C = \left\{\frac{x}{x+1} \,:\, -2 \le x < -1\right\}$;
$D = \left\{(-1)^n \frac{1}{n+1} \,:\, n \in \mathbb{N}\right\}$; $\qquad E = \left\{x^3 - x \,:\, 1 < x \le 2\right\}$;
$F = \left\{\frac{1}{1+|x|} + \frac{1}{1+x^2+y^2} \,:\, x, y \in]-\infty, -1[\right\}$; $\qquad G = \left\{\log_{\frac{1}{2}} \frac{n}{n+1} \,:\, n \in \mathbb{N}\right\}$;
$H = \left\{e^{-x^2} \,:\, x \in \mathbb{R}\right\}$; $\qquad I = \left\{e^{-x^3} \,:\, x \in \mathbb{R}\right\}$;
$L = \left\{\frac{n-2}{n} r_n \,:\, n \in \mathbb{N}\right\}$, dove r_n è il resto della divisione $n : 5$.

216 Sia A, B due sottoinsiemi non vuoti di $\mathbb{R}$ e sia $A + B = \{a + b \,:\, a \in A, b \in B\}$. Provare che:
1) $A+B$ è limitato superiormente se e soltanto se entrambi gli insiemi A e B sono limitati superiormente.
2) $A + B$ è dotato di massimo se e soltanto se entrambi gli insiemi A e B sono dotati di massimo.
3) se A e B sono limitati superiormente, allora $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

219 Siano A, B due sottoinsiemi non vuoti di $\mathbb{R}$, con $A, B \subseteq [0, +\infty[$, e sia $AB = \{ab \,:\, a \in A, b \in B\}$. Provare che:
1) se entrambi gli insiemi A e B sono limitati superiormente, allora anche AB è limitato superiormente, ma il viceversa non è vero.
2) se A e B sono limitati superiormente, allora $\sup(AB) = \sup A \cdot \sup B$.

222 Risolvere le seguenti disequazioni e sistemi di disequazioni:

$$\text{a) } \operatorname{sen} x > \tfrac{1}{2} \;; \quad \text{b) } \cos(x + \tfrac{\pi}{10}) \le \tfrac{\sqrt{3}}{2} \;; \quad \text{c) } \cos x < 1 \;; \quad \text{d) } \operatorname{sen} x > 2 \;; \quad \text{e) } \operatorname{tg} x \ge \sqrt{3} \;;$$
$$\text{f) } -1 \le \operatorname{tg} x < 0 \;; \quad \text{g) } |\operatorname{sen} x| < \tfrac{\sqrt{2}}{2} \;; \quad \text{h) } -1 < \cos x < -\tfrac{1}{2} \;; \quad \text{i) } \operatorname{tg}(-3x - 2\tfrac{\pi}{5}) \le -\sqrt{3} \;.$$

225 Trovare l'interno, la frontiera ed il derivato di ognuno dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$:

$E_1 = [0,1[\cup([2,3[\cap\mathbb{Q})$; $\qquad E_2 = (]-\infty,-\sqrt{2}[\setminus\mathbb{Z})\cup([\sqrt{2},+\infty[\setminus\mathbb{Q})$;

$E_3 = \{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots\}$; $\qquad E_4 = \{m+\frac{1}{n}:\ m\in\mathbb{Z},\ n\in\mathbb{N}\}$;

$E_5 = ([0,1]\cap\mathbb{Q})\setminus\{\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\ldots\}$; $\qquad E_6 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}[\dfrac{1}{2n+2},\dfrac{1}{2n+1}[$.

228 Sia E un sottoinsieme di $\mathbb{R}$. Dimostrare che:

i) $\partial E\setminus E\subseteq \mathrm{D}E$;

ii) $\mathrm{D}E\setminus E\subseteq\partial E$;

iii) $E\cup(\partial E) = E\cup(\mathrm{D}E)$.

231 Sia X un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$ limitato superiormente e sia $L=\sup X$. Provare che:
a) $L\in\partial X$;
b) se l'insieme X non ha il massimo, allora $L\in \mathrm{D}X$;
c) l'implicazione contraria della b) è falsa.

234 Siano $E,F\subseteq\mathbb{R}$. Provare che:
a) $E\subseteq F \implies \overset{\circ}{E}\subseteq\overset{\circ}{F}$, ma il viceversa non è vero;
b) $\overset{\circ}{E}\cup\overset{\circ}{F}\subseteq(E\cup F)^\circ$, ma, in generale, non si ha l'uguaglianza;
c) $\overset{\circ}{E}\cap\overset{\circ}{F} = (E\cap F)^\circ$.

237 Verificare, in base alla definizione di limite di una successione, che risulta:

$$\text{a)}\ \lim_{n\to\infty}\frac{2^n-1}{2^n+1}=1\ ;\qquad \text{b)}\ \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+7}-\sqrt{n})=0\ ;$$

$$\text{c)}\ \lim_{n\to\infty}\log_{\frac{1}{2}}(n^2-2n+3)=-\infty\ ;\qquad \text{d)}\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2-\log_5(n^2+2)}=+\infty\ ;$$

$$\text{e)}\ \lim_{n\to\infty}4^{\frac{n}{n^2+1}}=1\ ;\qquad \lim_{n\to\infty}\left(n^2-n-30\right)^{7-4\sqrt{3}}=+\infty\ .$$

240 Risolvere le seguenti disequazioni e sistemi di disequazioni:

a) $\operatorname{sen}x+\cos x>1$; b) $4\operatorname{sen}^4x-11\operatorname{sen}^2x+6<0$; c) $\log_{10}\operatorname{sen}\geq 10$; d) $\operatorname{sen}\log_3 x\geq 1$;

e) $2\cos^4x-5\cos^3x+5\cos x-2>0$; f) $\frac{1}{\sqrt{2}}<2^{-|\cos x|}\leq 1$; g) $\operatorname{sen}^6x-4\operatorname{sen}^3x+3>0$;

h) $\sqrt{2}\cos^3-(3+\sqrt{2})\cos^2x+(3+\sqrt{2})\cos x-\sqrt{2}>0$; i) $2\cos 2x-2(\sqrt{3}+1)\cos x+\sqrt{3}>-2$.

243 Utilizzando i teoremi di confronto e tenendo presenti i limiti delle successioni notevoli $\{a^n\}$, $\{\log_a n\}$, $\{n^p\}$ e $\{a^{\frac{1}{n}}\}$, trovare i limiti delle seguenti successioni:

$$\text{a)}\ \left\{\log_{4+(-1)^n}n\right\}\ ,\ \text{b)}\ \left\{\log_{4+(-1)^n}\left(n+\sqrt{n}-\tfrac{1}{2}\right)\right\}\ ,\ \text{c)}\ \left\{5^{\frac{(-1)^n}{n}}\right\}$$

$$\text{d)}\ \{(\pi+\cos n\pi)^n\}\ ,\ \text{e)}\ \{(\pi+\cos n\pi)^{n+\pi}\}\ ,\ \text{f)}\ \left\{n^{\frac{1}{5}}+5-4\operatorname{sen}\tfrac{n\pi}{5}\right\}\ ,\ \text{g)}\ \left\{n^{-5+\operatorname{sen}\frac{n\pi}{5}}\right\}\ ,$$

$$\text{h)}\ \left\{\left(n+5-4\operatorname{sen}\tfrac{n\pi}{5}\right)^{-5+\operatorname{sen}\frac{n\pi}{5}}\right\}\ ,\ \text{i)}\ \left\{\left(\frac{2}{5-\operatorname{sen}^3n^2}\right)^n\right\}\ ,\ \text{l)}\ \left\{\left(\frac{2}{5-\operatorname{sen}^3n^2}\right)^{3n+\pi}\right\}\ .$$

246 a) Provare che, se $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono due successioni regolari, allora anche la successione $\big\{\max\{a_n, b_n\}\big\}$ è regolare (conviene esaminare separatamente i due casi: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ e $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$).

b) Se la successione $\big\{\max\{a_n, b_n\}\big\}$ è regolare, si può concludere che almeno una delle due successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ è regolare?

c) Generalizzare il risultato a) provando che, se $\{a_{1,n}\}, \ldots, \{a_{k,n}\}$ sono k successioni regolari, allora anche la successione $\big\{\max\{a_{1,n}, \ldots, a_{k,n}\}\big\}$ è regolare (conviene procedere per induzione su k).

249 Risolvere le seguenti disequazioni:

$$\text{a)}\ \cos x - \operatorname{sen} x > 0\ ;\quad \text{b)}\ 4\operatorname{sen}^3 x - 3\operatorname{sen} x - 1 < 0\ ;\quad \text{c)}\ 1 - \cos x - \sqrt{3}\operatorname{sen} x < 0\ ;$$

$$\text{d)}\ \operatorname{tg} x + \operatorname{sen} x - \cos x - 1 > 0\ ;\quad \text{e)}\ \operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x < 0\ ;\quad \text{f)}\ \operatorname{sen}^3 x - \cos^3 x < 0\ ;$$

$$\text{g)}\ \sqrt[4]{17 - \sqrt[3]{7\operatorname{sen} x - 6}} - 2 > 0\ ;\quad \text{h)}\ 5^{2\operatorname{sen} x} - 26 \cdot 5^{\operatorname{sen} x} + 25 \leq 0\ ;$$

$$\text{i)}\ \log_3\left(\sqrt{3}\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x + 2\sqrt{3}\right) - \log_3(5\operatorname{tg} x + \sqrt{3}) < 0\ .$$

252 Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri reali sulla quale si hanno le seguenti informazioni:
1) la successione $\{a_n\}$ è convergente;
2) $\sup_{n\in N} a_n = 5$;
3) $a_n < 5\ \ \forall n \in \mathbb{N}$.
Qual è il limite della successione $\{a_n\}$? Giustificare la risposta data.

255 a) Trovare il limite della successione $\left\{\frac{[nx]}{n}\right\}$ $(x \in \mathbb{R})$.
b) Provare che una successione $\{x_n\}$ converge ad un numero x e x è un maggiorante di $\{x_n\}$, allora $x = \sup_{n\in\mathbb{N}} x_n$.
c) Trovare l'estremo superiore della successione $\left\{\frac{[nx]}{n}\right\}$.
d) Provare che $[x] = \min_{n\in\mathbb{N}} \frac{[nx]}{n}$.

258 Calcolare i limiti delle seguenti successioni:

$$\text{a)}\ \left\{\sqrt[3]{n+4} - \sqrt[3]{n}\right\}\ ,\quad \text{b)}\ \left\{\left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n}\right)\sqrt{n+1}\right\}\ ,\quad \text{c)}\ \left\{\frac{n^2 - \operatorname{sen} n}{2n^2 + n}\right\}$$

$$\text{d)}\ \{n^n\}\ ,\quad \text{e)}\ \{n!\}\ ,\quad \text{f)}\ \left\{\frac{(n+1)^3}{n!}\right\}\ ,\quad \text{g)}\ \left\{\frac{\sqrt{n+1}}{n}\operatorname{sen} n!\right\}\ ,$$

$$\text{h)}\ \left\{\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2n^2 - \operatorname{sen} n}\right\}\ ,\quad \text{i)}\ \left\{\frac{n^3 + n^2}{2n^2 - \operatorname{sen}\frac{1}{n}}\right\}\ ,\quad \text{l)}\ \left\{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}}\right\}\ ,$$

$$\text{m)}\ \left\{\left(\sqrt[n]{a} - 1\right)^n\right\}\ (a > 0)\ ,\quad \text{n)}\ \left\{(\cos \pi x)^{2n}\right\}\ (x \in \mathbb{R})\ ,\quad \text{o)}\ \left\{\frac{2^n}{(n+1)^2}\right\}\ ,$$

$$\text{p)}\ \left\{\frac{n^2 2^n}{3^n}\right\}\ ,\quad \text{q)}\ \left\{\frac{n^2 + 2^n}{3^n + n^3}\right\}\ ,\quad \text{r)}\ \left\{\frac{\sqrt[4]{n^5+2} - \sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[5]{n^4+2} - \sqrt{n^3+1}}\right\}\ .$$

261 Siano $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ due successioni e sia $\{c_n\}$ la successione definita nel modo seguente:

$$c_1 = a_1\ ,\ c_2 = b_1\ ,\ c_3 = a_2\ ,\ c_4 = b_2\ ,\ c_5 = a_3\ ,\ c_6 = b_3\ ,\ \ldots\ .$$

a) Provare che condizione sufficiente affinché la successione $\{c_n\}$ sia convergente è che le successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ siano entrambe convergenti ed abbiano lo stesso limite.

b) Stabilire se la precedente condizione è anche necessaria. Giustificare la risposta data.

c) Risolvere i precedenti quesiti a) e b) per ognuna delle due successioni $\{d_n\}$ e $\{e_n\}$ di seguito definite:

$$d_1 = a_1\,,\ d_2 = b_2\,,\ d_3 = a_3\,,\ d_4 = b_4\,,\ d_5 = a_5\,,\ d_6 = b_6\,,\ \dots\quad,$$
$$e_1 = a_1\,,\ e_2 = \tfrac{a_1+2b_1}{3}\,,\ e_3 = a_2\,,\ e_4 = \tfrac{a_2+2b_2}{3}\,,\ e_5 = a_3\,,\ e_6 = \tfrac{a_3+2b_3}{3}\,,\ \dots\quad.$$

264 Trovare, al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$, l'estremo inferiore e l'estremo superiore (finiti o no) degli insiemi numerici

$$X_\lambda = \{e^{\frac{\lambda n}{n+1}} : n \in \mathbb{N}\} \quad , \quad Y_\lambda = \{\lambda^{2n} : n \in \mathbb{N}\} \ .$$

267 Calcolare i limiti delle seguenti successioni:

$$\text{a)}\ \left\{\tfrac{1}{n+1} + \tfrac{1}{n+2} + \tfrac{1}{n+3} + \ldots + \tfrac{1}{3n}\right\} \quad ,$$
$$\text{b)}\ \left\{\tfrac{1}{pn+r} + \tfrac{1}{pn+r+1} + \tfrac{1}{pn+r+2} + \ldots + \tfrac{1}{qn+s}\right\} \quad (p, q \in \mathbb{N}, p < q; r, s \in \mathbb{N}_0) \quad ,$$
$$\text{c)}\ \left\{\tfrac{1}{n^2+1} + \tfrac{1}{n^2+2} + \tfrac{1}{n^2+3} + \ldots + \tfrac{1}{n^2+n}\right\} \quad , \quad \text{d)}\ \left\{\tfrac{1}{n+1} + \tfrac{1}{n+2} + \tfrac{1}{n+3} + \ldots + \tfrac{1}{n+n^2}\right\}$$

(suggerimento: usare le disuguaglianze $\frac{1}{k+1} < \log\frac{k+1}{k} < \frac{1}{k}\,,\ k \in \mathbb{N}$).

270 Siano: $\theta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.
Dimostrare che le n radici n-me del numero complesso $z = \cos\theta - i\,\mathrm{sen}\,\theta$ sono:

$$\cos\tfrac{\theta+2k\pi}{n} - i\,\mathrm{sen}\,\tfrac{\theta+2k\pi}{n}\,, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1\,.$$

273 a) Dimostrare la seguente versione "puntuale" del teorema di continuità della funzione inversa.

Teorema. (Continuità della funzione inversa). *Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$ e sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione fortemente monotona. Se f è continua in un punto $x_0 \in I$, allora f^{-1} è continua nel punto $y_0 = f(x_0)$.*

b) Che cosa accade se il dominio della funzione f non è un intervallo?

276 Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione reale di variabile reale e siano γ e δ, rispettivamente, l'estremo inferiore e l'estremo superiore della funzione f nell'insieme A ($\gamma, \delta \in \overline{\mathbb{R}}$).
1) Provare che, se la funzione f è monotona, la condizione

$$(*) \qquad f(A) \supseteq \,]\gamma, \delta[\, \cap \mathbb{Q}$$

è sufficiente per la continuità di f. La condizione è anche necessaria?
2) Provare che, se l'insieme A è un intervallo, la condizione (*) è necessaria per la continuità di f. La condizione è anche sufficiente?

279 Calcolare la derivata delle seguenti funzioni:

$$\text{a)}\ x^3 2^{4x-x^2} \quad , \quad \text{b)}\ \frac{x^3+e^x}{x^2+e^{-x}} \quad , \quad \text{c)}\ \left(\frac{x}{\log x}\right)^{\sqrt{2}} \quad , \quad \text{d)}\ \frac{x^2 - \mathrm{sen}^2 x}{x^2+\cos^2 x} \quad ,$$

$$\text{e)}\ \arcsen\frac{1}{x^2+1} \quad , \quad \text{f)}\ x\,\mathrm{arctg}^2 x \quad , \quad \text{g)}\ \log_3(1+\mathrm{tg}^2 x) \quad , \quad \text{h)}\ x^2 e^x \mathrm{sen}\,x \quad ,$$

$$\text{i)}\ x^2 \mathrm{sen}^3 x \cos^4 2x \quad , \quad \text{l)}\ \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{x^2+1} \quad , \quad \text{m)}\ \log^3\frac{x^2\mathrm{sen}^2 x + \cos^2 x}{x^2+\mathrm{cotg}^2 x} \quad .$$

282 Siano $f, g : I \to \mathbb{R}$ due funzioni reali definite nell'intervallo I e sia x_0 un punto di I.
Provare o smentire le seguenti affermazioni:
a) se la funzione somma $f+g$ è derivabile nel punto x_0, allora almeno una delle due funzioni f e g è derivabile in x_0;
b) se la funzione somma $f+g$ è derivabile nel punto x_0 ed almeno una delle due funzioni f e g è derivabile in x_0, allora anche l'altra funzione è derivabile in x_0;
c) se la funzione prodotto fg è derivabile nel punto x_0 ed almeno una delle due funzioni f e g è derivabile in x_0, allora anche l'altra funzione è derivabile in x_0.

285 Calcolare le seguenti derivate (si tenga presente che, come è d'uso, l'espressione a^{b^c} significa $a^{(b^c)}$):

$$\text{a)}\quad \mathrm{D}x^x \quad , \qquad \text{b)}\quad \mathrm{D}\,(x^x)^x \quad , \qquad \text{c)}\quad \mathrm{D}(\log x)^{\log x} \quad , \qquad \text{d)}\quad \mathrm{D}x^{x^x} \quad ,$$

$$\text{e)}\quad \mathrm{D}\,(x^x)^{x^x} \quad , \qquad \text{f)}\quad \mathrm{D}\Big(x^{x^x}\Big)^x \quad , \qquad \text{g)}\quad \mathrm{D}x^{x^{x^x}} \quad .$$

288 Siano $f, g, h : I \to \mathbb{R}$ tre funzioni reali definite nell'intervallo I e sia x_0 un punto di I. Siano inoltre verificate le seguenti ipotesi: (i) $f(x) \le g(x) \le h(x)\ \forall x \in I$; (ii) $f(x_0) = h(x_0)$; (iii) le funzioni f e h sono derivabili nel punto x_0.
a) Dimostrare che, se il punto x_0 è interno all'intervallo I, allora anche la funzione g è derivabile nel punto x_0 e risulta: $(*)$ $f'(x_0) = g'(x_0) = h'(x_0)$.
b) Mostrare con opportuni esempi che, se x_0 è un estremo di I, le precedenti ipotesi (i) - (iii) non sono sufficienti ad assicurare né la derivabilità di g in x_0 né, ammettendo per ipotesi l'esistenza della derivata $g'(x_0)$, la validità dell'uguaglianza (*).

291 Calcolare la derivata delle seguenti funzioni, precisando l'insieme di validità del risultato ottenuto:

$$\text{a)}\quad \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x - \cos x} \quad , \qquad \text{b)}\quad \log\left|\frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x - \cos x}\right| \quad , \qquad \text{c)}\quad \frac{\operatorname{sen}\,\log x + \cos\log x}{\operatorname{sen}\,\log x - \cos\log x} \quad ,$$

$$\text{d)}\quad \frac{\operatorname{sen} x^4 + \cos x^4}{\operatorname{sen} x^4 - \cos x^4} \quad , \qquad \text{e)}\quad \left(\frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x - \cos x}\right)^4 \quad , \qquad \text{f)}\quad \sqrt[4]{\frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x - \cos x}} \quad .$$

294 Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione reale definita nell'intervallo I, continua nel punto $x_0 \in I$. Provare o smentire le seguenti affermazioni:
a) f derivabile in $x_0 \implies |f|$ derivabile in x_0;
b) $|f|$ derivabile in $x_0 \implies f$ derivabile in x_0;
c) $x_0 \in \mathring{I}$, $|f|$ derivabile in $x_0 \implies f$ derivabile in x_0.

297 Calcolare, se esiste, la somma delle seguenti serie numeriche:

$$\text{a)}\quad \sum_{n=4}^{\infty} 3(-2)^{3-n} \quad , \qquad \text{b)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \quad , \qquad \text{c)}\quad \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \quad ,$$

$$\text{d)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(4n-3)(4n+1)} - \frac{1}{3^{n+2}}\right] \quad , \qquad \text{e)}\quad \sum_{n=5}^{\infty}\left[\frac{1}{5^n}+1\right] \quad , \qquad \text{f)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} \log\frac{5^{n+1}+5}{5^{n+1}+1} \quad ,$$

$$\text{g)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left[\log\frac{5^{n+1}+5}{5^{n+1}+1} + (-5)^{n+2}\right] \quad , \qquad \text{h)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2} \quad .$$

300 Sia $\{a_n\}$ una successione non crescente di numeri non negativi. Dimostrare che le due serie

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \quad , \qquad a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n-1} + \ldots$$

hanno lo stesso carattere. Provare inoltre, con un esempio, che l'ipotesi "$\{a_n\}$ non crescente" è essenziale.

303 Studiare il carattere delle seguenti serie, al variare di x in $\mathbb{R}$:

$$\text{a)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} n^x x^n \quad , \qquad \text{b)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} n^x x^{n!} \quad , \qquad \text{c)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} (n!)^x x^n \quad , \qquad \text{d)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} (n!)^x x^{n!} \quad .$$

306 Sia $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie a termini positivi.
Dimostrare che la condizione:

$$(*) \qquad \exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+2}}{a_n} \;=\; \ell \in [0,1[$$

è sufficiente per la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, ma non è necessaria.
Confrontare poi la condizione (*) con l'altra condizione sufficiente:

$$(\text{o}) \qquad \exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \;=\; \lambda \in [0,1[\quad ,$$

che si deduce dal criterio del rapporto.

309 Siano $\{A_n\}$, $\{B_n\}$ e $\{C_n\}$, nell'ordine, le successioni delle somme parziali delle seguenti tre serie numeriche:

$$\text{a)}\quad 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots \quad , \qquad \text{b)}\quad 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots \quad ,$$

$$\text{c)}\quad 1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\ldots \quad .$$

Studiare, al variare di x in $\mathbb{R}$, il carattere delle tre serie:

$$\alpha)\quad \sum_{n=1}^{\infty} A_n x^n \quad , \qquad \beta)\quad \sum_{n=1}^{\infty} B_n x^n \quad , \qquad \gamma)\quad \sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n \quad .$$

312 Studiare la continuità e la derivabilità delle seguenti funzioni reali definite in tutto $\mathbb{R}$:

$$f(x)=\begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{se } x\in\mathbb{Q}\,, \\ \cos x & \text{se } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\,, \end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases} x^3 & \text{se } x\in\mathbb{Q}\,, \\ x^5 & \text{se } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\,, \end{cases} \qquad h(x)=\begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{se } x\in\mathbb{Q}\,, \\ \operatorname{sen}^2 x & \text{se } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\,, \end{cases}$$

$$l(x)=\begin{cases} x^3(x^2-1)^3 & \text{se } x\in\mathbb{Q}\,, \\ 2x(x^2-1)^5 & \text{se } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\,. \end{cases}$$

315 Siano: I un intervallo di $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ un estremo dell'intervallo I e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione reale definita in I.
a) Provare che, se f è continua in I, l'esistenza del limite

$$\lim_{x\to x_0} \left| \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \right|$$

implica quella di

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \quad .$$

b) Che cosa succede se si sostituisce all'ipotesi di continuità nell'intervallo I quella di continuità nel punto x_0?

318 (*Derivata di una funzione dispari* [risp. *pari*].) Sia $f : A \to \mathbb{R}$ ($A \subseteq \mathbb{R}$) una funzione dispari [risp. pari] e sia x_0 un punto di A per il quale abbia senso il problema della derivabilità di f in x_0 (cioè x_0 abbia la proprietà che vi sia un intervallo I tale che $x_0 \in I \subseteq A$).
Provare che, se f è derivabile nel punto $x_0 \in A$, allora f è derivabile anche nel punto $-x_0$ e risulta $f'(-x_0) = f'(x_0)$ [risp. $f'(-x_0) = -f'(x_0)$].

321 Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione convessa, ma non strettamente convessa, nell'intervallo I. Provare che il grafico di f contiene un segmento.

324 Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$, dotato di minimo: $a = \min I$, e sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione reale definita in I, convessa nell'intervallo $J = I \setminus \{a\}$.

a) Provare che, se f è continua in a, allora f è convessa in tutto l'intervallo I.

b) Provare che, se f è continua in a e strettamente convessa in J, allora f è strettamente convessa in I.

327 a) Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile nell'intervallo I. Provare che, se f' è crescente in un punto $x_0 \in I$, allora f è strettamente convessa in x_0.
b) Verificare che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \left(1 + \operatorname{sen} \frac{1}{x}\right) & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,, \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

è derivabile in $\mathbb{R}$, strettamente convessa in $x_0 = 0$, ma f' non è monotona in x_0.

330 (*Convessità e asintoti.*) Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$, non limitato superiormente, e sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione convessa in I. Si supponga, inoltre, che la retta r di equazione $y = mx + p$ sia un asintoto per il grafico di f per $x \to +\infty$.
Dimosrare che:

1) la funzione $g(x) = f(x) - (mx + p)$ è non crescente in I ed assume solo valori non negativi; inoltre, per ogni $x_1, x \in I$ tali che $x_1 < x$ e $g(x_1) > 0$, si ha $g(x_1) > g(x)$ (suggerimento: conviene provare, come prima cosa, che anche la funzione g è convessa in I);

2) se f è strettamente convessa in I, allora g è decrescente in I ed assume solo valori positivi.

333 Sia $p \in]0, 1[$. Dimostrare che risulta

$$a^p + b^p \leq \left(\tfrac{1}{2}\right)^{p-1} (a + b)^p \qquad \forall a, b \in]0, +\infty[\;\;,$$

specificando i casi in cui si ha l'uguaglianza.

336 Studiare la funzione reale di variabile reale $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ e disegnarne il grafico.

339 Studiare la funzione reale di variabile reale $(1 + x)^{\frac{1}{x}}$ e disegnarne il grafico.

342 Calcolare i seguenti integrali indefiniti, precisando, di volta in volta, gli intervalli di validità del risultato ottenuto:

$$\text{a)} \int x^2 \operatorname{tg}(x^3 + 1)\, \mathrm{d}x \quad ; \quad \text{b)} \int \frac{3^{(1,6)x}}{\sqrt{1 - 3^{(3,2)x}}}\, \mathrm{d}x \quad ; \quad \text{c)} \int \frac{x^{0,7}}{1 + x^{3,4}}\, \mathrm{d}x \quad ;$$

$$\text{d)} \int \frac{\mathrm{d}x}{x - \sqrt{x}} \quad ; \quad \text{e)} \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x - x^2}} \quad ;$$

$$\text{f)} \int \frac{\log \cos(7x + 1)}{\operatorname{cotg}(7x + 1)}\, \mathrm{d}x \quad ; \quad \text{g)} \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2 + 2x - x^2}} \quad ; \quad \text{h)} \int \left(x + \sqrt{x^2}\right) \mathrm{e}^{-x^2}\, \mathrm{d}x \quad .$$

Soluzioni di alcuni esercizi

3 a) 0; b) $-\frac{1}{3},\ 3,\ \frac{4\pm\sqrt{7}}{3}$; c) $-5,\ -17$; d) $\frac{1}{2},\ -3$; e) $\pm\frac{1}{2}$.

6 Gli insiemi delle soluzioni delle disequazioni assegnate sono:

a) $]-\infty,\frac{3-\sqrt{13}}{2}]\cup[\frac{3+\sqrt{13}}{2},+\infty[$; b) $]\frac{29}{7},+\infty[$; c) $\{\frac{7}{2}\}$;

d) $]-\infty,-\frac{15}{2}[\cup]-7,\frac{1}{2}[$; e) $]-\infty,-4[\cup]3,+\infty[$;

f) $]-\infty,\frac{3}{4}]\cup]\frac{4}{5},1[$; g) $]-3,-2[\cup]\frac{3}{4},2[\cup]5,+\infty[$.

15 Gli insiemi delle soluzioni delle disequazioni assegnate sono:

a) $\left]\frac{-a-\sqrt{a^2-4a}}{2},\frac{-a+\sqrt{a^2-4a}}{2}\right[$ se $a\in]-\infty,0[\cup]4,+\infty[$, $\emptyset$ se $a\in[0,4]$;

b) $\left]\frac{-1-\sqrt{1-\frac{4}{a}}}{2},\frac{-1+\sqrt{1-\frac{4}{a}}}{2}\right[$ se $a\in]-\infty,0[$, $\mathbb{R}$ se $a\in[0,4[$, $\mathbb{R}\setminus\{-\frac{1}{2}\}$ se $a=4$,

$\left]-\infty,\frac{-1-\sqrt{1-\frac{4}{a}}}{2}\right[\cup\left]\frac{-1+\sqrt{1-\frac{4}{a}}}{2},+\infty\right[$ se $a\in]4,+\infty[$;

c) $\left]-\infty,-1+\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2a}\right]\cup\left[-1+\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2a},+\infty\right[$ se $a\in]-\infty,0[$, $[0,+\infty[$ se $a=0$,

$\left[-1+\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2a},-1+\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2a}\right]$ se $a\in]0,\frac{1}{4}[$, $\{1\}$ se $a=\frac{1}{4}$, $\emptyset$ se $a\in]\frac{1}{4},+\infty[$;

d) $\left[\frac{a+\sqrt{a^2-8a+8}}{2(a-1)},\frac{a-\sqrt{a^2-8a+8}}{2(a-1)}\right]$ se $a\in]-\infty,1[$, $]-\infty,2]$ se $a=1$,

$\left]-\infty,\frac{a-\sqrt{a^2-8a+8}}{2(a-1)}\right]\cup\left[\frac{a+\sqrt{a^2-8a+8}}{2(a-1)},+\infty\right[$ se $a\in]1,4-2\sqrt{2}[\cup]4+2\sqrt{2},+\infty[$,

$\mathbb{R}$ se $a\in[4-2\sqrt{2},4+2\sqrt{2}]$.

18 a)
$$A\cup B=]-\infty,5[\cup]6,14[,\quad A\cap B=[-1,\tfrac{1}{2}[\cup[7,12]\ ,\quad A\setminus B=[\tfrac{1}{2},5[\ ,$$
$$B\setminus A=]-\infty,-1[\cup]6,7[\cup]12,14[\ .$$

b)
$$(A\cap B)\setminus C=[-1,\tfrac{1}{2}[\ ,\quad (A\cup B)\setminus C=]-\infty,3[\ ,\quad (A\setminus B)\cap C=[3,5[\ ,$$
$$(A\setminus B)\cup C=[\tfrac{1}{2},+\infty[\ ,\quad (A\setminus B)\cup(C\setminus A)=[\tfrac{1}{2},7[\cup]12,+\infty[\ ,\quad (A\setminus B)\cap(C\setminus A)=\emptyset\ .$$

27 a) $x_1,x_2,x_5\in A$; b) $y_2,y_5\in B$; c) $z_1,z_3\in C$; d) $t_1,t_2,t_4\in D$; e) $w_1,w_4\in E$

(per y_5 conviene adoperare l'identità $1+q+\ldots+q^n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\quad\forall q\in\mathbb{R}\setminus\{1\}\ \forall n\in\mathbb{N}$).

36 1) $(\mathrm{P}_1)\iff$ “ $\forall a\in A\ \forall b\in B\ \ \exists c\in C\ :\ a+b\le c$ ”;

$(\mathrm{P}_2)\iff$ “ $a+b\le c\quad\forall a\in A\ \forall b\in B\ \forall c\in C$ ” $\iff$ “ $a\in A,\ b\in B,\ c\in C\implies a+b$ ”;

$(\mathrm{P}_3)\iff$ “ $\exists a\in A\ \exists b\in B\ :\ a+b>c\ \forall c\in C$ ”;

$(\mathrm{P}_4)\iff$ “ $\forall a\in A\ \ \exists b\in B\ :\ a+b>c\ \forall c\in C$ ”;

$(\mathrm{P}_5)\iff$ “ $\forall a\in A\ \ \exists b\in B\ \exists c\in C\ :\ a+b>c$ ”.

42 Si ha:

$$-3 \text{ è soluzione di (*)} \iff k(-3)^3 - 3k^2(-3) + k + 1 \leq 0 \iff 9k^2 - 26k + 1 \leq 0 \iff$$
$$\iff k \in \left[\tfrac{13-4\sqrt{10}}{9}, \tfrac{13+4\sqrt{10}}{9}\right] = A \ ,$$

$$1 \text{ è soluzione di (*)} \iff k - 3k^2 + k + 1 \leq 0 \iff 3k^2 - 2k - 1 \geq 0 \iff$$
$$\iff k \in \left]-\infty, -\tfrac{1}{3}\right] \cup [1, +\infty[\ = B \ ,$$

pertanto le risposte alle domande poste sono:

a) $k \in A \cup B = \left]-\infty, -\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{13-4\sqrt{10}}{9}, +\infty\right[$; b) $k \in A \cap B = \left[1, \frac{13+4\sqrt{10}}{9}\right]$;

c) $k \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \left[\frac{13-4\sqrt{10}}{9}, 1\right[\cup \left]-\infty, -\frac{1}{3}\right] \cup \left]\frac{13+4\sqrt{10}}{9}, +\infty\right[$;

d) $k \in \mathbb{R} \setminus (A \cup B) = \left]-\frac{1}{3}, \frac{13-4\sqrt{10}}{9}\right[$.

54 a) $k \neq 2$; b) $k \in]0, +\infty[\setminus \{2\}$; c) $k \in \ [\frac{4}{3}, +\infty[\setminus \{2\}$; d) $k \in]0, \frac{4}{3}[$.

90 a) $]-\infty, -\frac{\sqrt{13}+3}{2}] \cup [-1, \frac{\sqrt{13}-3}{2}]$; b) $\{1\}$; c) $]\frac{1}{2}, +\infty[$; d) $[-1, 1]$.

93 a) $]-\infty, -\frac{5+\sqrt{5}}{2}] \cup [\frac{-5+\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{4}]$; b) $]-\infty, \frac{2}{3}[$; c) $[-\frac{\sqrt{34}+5}{2}, -1[\cup [\frac{\sqrt{34}-5}{2}, 2[$; d) $]-\infty, -3[\cup [2, +\infty[$.

138 a) $\frac{16}{3}$; b) $\pm\sqrt{\log_5 \frac{5}{2}}$; c) $\frac{5+\sqrt{5}}{2}$; d) 18^2; e) $\pm\frac{1+\sqrt{13}}{2}$, $\pm\frac{1+\sqrt{21}}{2}$; f) -2.

141 a) $]-\infty, -\frac{17}{3}[\cup]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}[\cup]\frac{17}{3}, +\infty[$; b) $]-\infty, -2[\cup]1, +\infty[$; c) $]-\infty, -(2+\sqrt{5})] \cup [2+\sqrt{5}, +\infty[$;
d) $]1, \sqrt{2}[$; e) $]-1, +\infty[$; f) $]-\infty, -1[\cup]3, +\infty[$; g) $[\frac{1}{2}, 1[$; h) $]-\infty, -1[$; i) $]0, +\infty[\setminus \{1\}$;
l) $(]0, +\infty[\setminus \{1\}) \cup \{-\sqrt[4]{2k} \ : \ k \in \mathbb{N}\}$.

150 f) $\{2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}\}$; g) $\{2, \frac{1}{2}, -2, -\frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}\}$.

162 a) $]-\infty, -\frac{5}{2}] \cup [-\frac{2}{5}, 1]$; b) $]-\infty, -2\sqrt{5}[\cup]-1, -\frac{1}{2\sqrt{5}}[\cup]1, +\infty[$; c) $[\frac{5-\sqrt{21}}{2}, \frac{5+\sqrt{21}}{2}]$;
d) $[-\sqrt{3}, -\frac{1}{\sqrt{3}}] \cup [\frac{1}{2}, 1] \cup [2, +\infty[$.

198 $\min A = \frac{1}{2}$, $\sup A = 1$ (non è massimo); $\inf B = 0$ (non è minimo), $\max B = 4$; $\inf C = 0$ (non è minimo), $\sup C = 2\sqrt{3}$ (non è massimo); $\min D = -\frac{1}{2}$, $\max D = \frac{1}{2}$; $\inf E = 1$ (non è minimo), $\max E = 1,9999$.

204 a) $\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\}$; b) $\{\pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\}$; c) $\{-\frac{\pi}{3} + k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\}$;
d) $\{\pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pm\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\}$; e) $\{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \ : \ k \in \mathbb{Z}\}$;
f) $\{\pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\}$; g) $\{\pm\frac{\pi}{3} + k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\frac{\pi}{4} + h\frac{\pi}{2} \ : \ h \in \mathbb{Z}\}$;
h) $\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\}$;
i) $\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\}$;
l) $\{\frac{\pi}{4} + k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\frac{\pi}{12} + k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\}$.

207 a) $\{\frac{\pi}{4} + k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\}$; b) $\{2k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\}$;
c) $\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\}$; d) $\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{(2k-1)\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\}$;

$$e)\ \{\pm\tfrac{\pi}{6}+k\pi\,:\,k\in\mathbb{Z}\}\,;\ \ f)\ \{\tfrac{\pi}{2}+2k\pi\,:\,k\in\mathbb{Z}\}\cup\{(2k-1)\pi\,:\,k\in\mathbb{Z}\}\,;$$
$$g)\ \{k\pi\,:\,k\in\mathbb{Z}\}\cup\{\tfrac{\pi}{4}+k\pi\,:\,k\in\mathbb{Z}\}\,.$$

210
$$a)\ \{-\tfrac{\pi}{24}+k\pi\,:\,k\in\mathbb{Z}\}\,;\quad b)\ \{k\pi\,:\,k\in\mathbb{Z}\}\cup\{\tfrac{2k\pi}{5}\,:\,k\in\mathbb{Z}\}\,;$$
$$c)\ \{k\pi\,:\,k\in\mathbb{Z}\}\cup\{\tfrac{\pi}{6}+2k\pi\,:\,k\in\mathbb{Z}\}\,;\quad d)\ \{\tfrac{\pi}{12}+\tfrac{1}{6}+h\tfrac{\pi}{3}\,:\,h\in\mathbb{Z}\}\cup\{\tfrac{\pi}{8}+\tfrac{1}{4}+h\tfrac{\pi}{2}\,:\,h\in\mathbb{Z}\}\,;$$
$$e)\ \{(2k-1)\pi\,:\,k\in\mathbb{Z}\}\cup\{\pm\tfrac{2\pi}{3}+4k\pi\,:\,k\in\mathbb{Z}\}\,;\quad f)\ \{\pm\tfrac{\pi}{3}+k\pi\,:\,k\in\mathbb{Z}\}\,;\quad g)\ \emptyset\,.$$

222 Gli insiemi delle soluzioni sono:

$$a)\ \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\,]\tfrac{\pi}{6}+2k\pi,\tfrac{5\pi}{6}+2k\pi[\ ;\quad b)\ \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\,[\tfrac{\pi}{15}+2k\pi,\tfrac{26\pi}{15}+2k\pi]\ ;\quad c)\ \mathbb{R}\setminus\{2k\pi\,:\,k\in\mathbb{Z}\}\ ;\quad d)\ \emptyset\ ;$$
$$e)\ \bigcup_{h\in\mathbb{Z}}\,[\tfrac{\pi}{3}+h\pi,\tfrac{\pi}{2}+h\pi[\ ;\quad f)\ \bigcup_{h\in\mathbb{Z}}\,[-\tfrac{\pi}{4}+h\pi,h\pi[\ ;\quad g)\ \bigcup_{h\in\mathbb{Z}}\,]-\tfrac{\pi}{4}+h\pi,\tfrac{\pi}{4}+h\pi[\ ;$$
$$h)\ \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\Big(]\tfrac{2\pi}{3}+2k\pi,\tfrac{4\pi}{3}+2k\pi[\setminus\{(2k+1)\pi\}\Big)\ ;\quad i)\ \bigcup_{h\in\mathbb{Z}}\,[\tfrac{11\pi}{45}+h\tfrac{\pi}{3},\tfrac{3\pi}{10}+h\tfrac{\pi}{3}[\ .$$

240 Gli insiemi delle soluzioni sono:

$$a)\ \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\,]2k\pi,\tfrac{\pi}{2}+2k\pi[\ ;\quad b)\ \bigcup_{h\in\mathbb{Z}}\,]\tfrac{\pi}{3}+h\pi,\tfrac{2\pi}{3}+h\pi[\ ;\quad c)\ \{\tfrac{\pi}{2}+2k\pi\,:\,k\in\mathbb{Z}\}\ ;$$
$$d)\ \big\{3^{\frac{\pi}{2}+2k\pi}\,:\,k\in\mathbb{Z}\big\}\ ;\quad e)\ \{(2k-1)\pi\,:\,k\in\mathbb{Z}\}\cup\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\Big(]-\tfrac{\pi}{6}+2k\pi,\tfrac{\pi}{6}+2k\pi[\setminus\{2k\pi\}\Big)\Big)\ ;$$
$$f)\ \Big(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\,]-\tfrac{\pi}{6}+2k\pi,\tfrac{\pi}{6}+2k\pi[\Big)\cup\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\,]\tfrac{5\pi}{6}+2k\pi,\tfrac{7\pi}{6}+2k\pi[\Big)\ ;$$
$$g)\ \mathbb{R}\setminus\{\tfrac{\pi}{2}+2k\pi\,:\,k\in\mathbb{Z}\}\ ;\quad h)\ \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\Big(]-\tfrac{\pi}{4}+2k\pi,\tfrac{\pi}{4}+2k\pi[\setminus\{2k\pi\}\Big)\ ;$$
$$i)\ \Big(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\,]\tfrac{\pi}{3}+2k\pi,\tfrac{5\pi}{3}+2k\pi[\Big)\cup\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\,]-\tfrac{\pi}{6}+2k\pi,\tfrac{\pi}{6}+2k\pi[\Big)\ .$$

249 Gli insiemi delle soluzioni sono:

$$a)\ \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\,]-\tfrac{3\pi}{4}+2k\pi,\tfrac{\pi}{4}+2k\pi[\ ;\quad b)\ \mathbb{R}\setminus\Big(\{\tfrac{\pi}{2}+2k\pi\,:\,k\in\mathbb{Z}\}\cup\{-\tfrac{5\pi}{6}+2k\pi\,:\,k\in\mathbb{Z}\}\cup\{-\tfrac{\pi}{6}+2k\pi\,:\,k\in\mathbb{Z}\}\Big)\ ;$$
$$c)\ \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\,]2k\pi,\tfrac{2\pi}{3}+2k\pi[\ ;\quad d)\ \bigcup_{h\in\mathbb{Z}}\,]\tfrac{\pi}{4}+h\pi,\tfrac{\pi}{2}+h\pi[\ ;\quad e)\ \bigcup_{h\in\mathbb{Z}}\Big(]\tfrac{\pi}{4}+h\pi,(h+1)\pi[\setminus\{\tfrac{\pi}{2}+h\pi,\tfrac{3\pi}{4}+h\pi\}\Big)\ ;$$
$$f)\ \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\,]-\tfrac{3\pi}{4}+2k\pi,\tfrac{\pi}{4}+2k\pi[\ ;\quad g)\ \mathbb{R}\setminus\{\tfrac{\pi}{2}+2k\pi\,:\,k\in\mathbb{Z}\}\ ;$$
$$h)\ \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\,[2k\pi,(2k+1)\pi]\ ;\quad i)\ \bigcup_{h\in\mathbb{Z}}\,]\tfrac{\pi}{6}+h\pi,\tfrac{\pi}{3}+h\pi[\ .$$

267 a) $\log 3$; b) $\log\frac{q}{p}$; c) 0; d) $+\infty$.

270 La forma trigonometrica del numero complesso $z=\cos\theta-i\,\mathrm{sen}\,\theta$ è $z=\cos(-\theta)+i\,\mathrm{sen}\,(-\theta)$, pertanto l'insieme delle n radici n-me di z è $\big\{\cos\frac{-\theta+2h\pi}{n}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{-\theta+2h\pi}{n}\,:\,h=0,1,\ldots,n-1\big\}$ o, ciò che è lo stesso,

$$(*)\qquad \Big\{\cos\tfrac{-\theta+2h\pi}{n}+i\,\mathrm{sen}\,\tfrac{-\theta+2h\pi}{n}\,:\,h=1,2,\ldots,n\Big\}\ .$$

Proveremo che l'insieme (*) è contenuto in

$$(**) \qquad \left\{\cos\tfrac{\theta+2k\pi}{n} - i\,\mathrm{sen}\,\tfrac{\theta+2k\pi}{n} \;:\; k=0,1,\dots,n-1\right\} \;;$$

in questo modo, dato che il precedente insieme (**) ha al più n elementi, saremo sicuri che esso è uguale all'insieme delle n radici n-me di z ed avremo quindi dimostrato l'enunciato dell'esercizio.
Proviamo l'inclusione insiemistica: per ogni $h \in \{1,2,\dots,n\}$, si ha che l'intero $n-k$ appartiene a $\{0,1,\dots,n-1\}$ e risulta

$$\cos\tfrac{-\theta+2h\pi}{n} + i\,\mathrm{sen}\,\tfrac{-\theta+2h\pi}{n} \;=\; \cos\tfrac{\theta-2h\pi}{n} - i\,\mathrm{sen}\,\tfrac{\theta-2h\pi}{n} \;=$$
$$=\; \cos\left(\tfrac{\theta-2h\pi}{n}+2\pi\right) - i\,\mathrm{sen}\,\left(\tfrac{\theta-2h\pi}{n}+2\pi\right) \;=\; \cos\tfrac{\theta+2(n-h)\pi}{n} - i\,\mathrm{sen}\,\tfrac{\theta+2(n-h)\pi}{n} \quad .$$

279 Le derivate richieste sono:

$$\text{a)}\quad x^2 2^{4x-x^2}\left[3+2x(2-x)\log 2\right] \quad , \qquad \text{b)}\quad \frac{x^4+x(x-2)e^x+x^2(x+3)e^{-x}+2}{(x^2+e^{-x})^2} \quad ,$$

$$\text{c)}\quad \sqrt{2}\left(\frac{x}{\log x}\right)^{\sqrt{2}-1}\frac{\log x-1}{\log^2 x} \quad , \qquad \text{d)}\quad \frac{2x-\mathrm{sen}\,2x}{(x^2+\cos^2 x)^2} \quad , \qquad \text{e)}\quad \frac{-2x}{|x|\sqrt{x^2+2}(x^2+1)} \quad ,$$

$$\text{f)}\quad \mathrm{arctg}\,x\left(\mathrm{arctg}\,x+\frac{2x}{1+x^2}\right) \quad , \qquad \text{g)}\quad (2\log_3 e)\mathrm{tg}\,x \quad , \qquad \text{h)}\quad xe^x\left[(2+x)\mathrm{sen}\,x+x\cos x\right] \quad ,$$

$$\text{i)}\quad x\,\mathrm{sen}^2 x\cos^3 2x\left[2x\,\mathrm{sen}\,x\cos 2x + x\cos x(3-22\,\mathrm{sen}^2 x)\right] \quad ,$$

$$\text{l)}\quad \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}\left[\mathrm{arctg}\,\frac{x}{x^2+1}+\frac{x(x^2+1)}{x^4+3x^2+1}\right] \quad , \qquad \text{m)}\quad 6\left(\log^2\,\mathrm{sen}^2 x\right)\mathrm{cotg}\,x \quad .$$

Fatta eccezione per e), tutti i risultati sopra riportati valgono in tutto l'insieme di definizione della funzione assegnata (che è $]1,+\infty[$ per la funzione c), $\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi \,:\, k\in\mathbb{Z}\}$ per la g), $\mathbb{R}\setminus\{\{k\pi \,:\, k\in\mathbb{Z}\}$ per la m) e $\mathbb{R}$ per tutte le altre). Nel caso della e) (che è definita in tutto $\mathbb{R}$) il risultato vale in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ (nel punto $x_0=0$ la funzione non è derivabile; cfr. il successivo Esercizio 324).
Per calcolare la derivata della funzione m) conviene esprimerne diversamente la legge.

294 a) Falso. Controesempio: $I=\mathbb{R}$, $f(x)=x\ \forall x\in\mathbb{R}$, $x_0=0$.
b) Falso. Controesempio: $I=[0,+\infty[\,,\ f(x)=\begin{cases} x & \text{se } x\in[0,+\infty[\,\cap\mathbb{Q}, \\ -x & \text{se } x\in[0,+\infty[\,\setminus\mathbb{Q}, \end{cases}\ x_0=0.$
c) Vero. Indichiamo con λ la derivata $\mathrm{D}\left[|f(x)|\right]_{x=x_0}$, che esiste per ipotesi. Se $f(x_0)>0$ [risp. $f(x_0)<0$], per il teorema della permanenza del segno esiste $U\in\mathcal{U}(x_0)$ tale che $f(x)=|f(x)|$ [risp. $f(x)=-|f(x)|$] per ogni $x\in U\cap I$; pertanto, per il teorema sui limiti delle restrizioni larghe, la derivata $f'(x_0)$ esiste ed è uguale a λ [risp. $-\lambda$]. Se $f(x_0)=0$, allora x_0 è un punto di minimo assoluto per la funzione $|f(x)|$, pertanto, per il teorema di Férmat, si ha $\lambda=0$, cioè $\lim_{x\to x_0}\frac{|f(x)|}{x-x_0}=0$ e quindi, per il teorema sul limite del prodotto di una funzione limitata per una infinitesima, si ha pure

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \;=\; \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{x-x_0} \;=\; \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{|f(x)|}\cdot\frac{|f(x)|}{x-x_0} \;=\; 0 \quad .$$

297 a) 8; b) $\frac{1}{2}$; c) $\frac{1}{10}$; d) $\frac{7}{36}$; e) $+\infty$; f) $\log\frac{6}{5}$; g) non esiste; h) $\frac{1}{8}$.

303 a) converge assolutamente per $|x|<1$; converge, non assolutamente, per $x=-1$; diverge a $+\infty$ per $x>1$; è oscillante per $x<-1$;
b) converge assolutamente per $|x|<1$; diverge a $+\infty$ per $|x|\geq 1$;
c) converge assolutamente per $x\leq 0$; diverge a $+\infty$ per $x>0$;
d) converge assolutamente per $x\in[-1,1[$; diverge a $+\infty$ per $x\in\mathbb{R}\setminus[-1,1[$.