Corso di Analisi matematica 1 per Fisici (a.a. 2005-06)
(prof. Alfonso Villani)

Una raccolta di testi di esercizi

1 a) Siano $A = [-1, 5[\cup [7, 12]$ e $B =]-\infty, \frac{1}{2}[\cup]6, 14[$. Determinare gli insiemi:

$$A \cup B\ ,\quad A \cap B\ ,\quad A \setminus B\ ,\quad B \setminus A\ \ .$$

b) Siano A, B gli insiemi considerati in a) e sia $C = [3, +\infty[$. Determinare gli insiemi:

$$(A \cap B) \setminus C\ ,\quad (A \cup B) \setminus C\ ,\quad (A \setminus B) \cap C\ ,\quad (A \setminus B) \cup C\ ,\quad (A \setminus B) \cup (C \setminus A)\ ,\quad (A \setminus B) \cap (C \setminus A)\ .$$

2 Siano A e B due insiemi. Provare che valgono le seguenti uguaglianze:
a) $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$; b) $A \cup (B \setminus A) = B \cup (A \setminus B)$;
c) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$; d) $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$.

3 Siano A, B e C tre insiemi. Esprimere (mediante le operazioni insiemistiche) ognuno dei seguenti insiemi in almeno un modo diverso da quello dato:

$$(A \cup B) \setminus C \quad , \qquad (A \cap B) \setminus C \quad , \qquad (A \setminus B) \setminus C\ .$$

Giustificare le risposte fornite.

4 Siano A, B e C tre insiemi. Esprimere mediante le operazioni insiemistiche di unione, intersezione e differenza i seguenti insiemi:
a) l'insieme degli elementi che appartengono ad uno solo dei tre insiemi A, B e C;
b) l'insieme degli elementi che appartengono esattamente a due dei tre insiemi.

5 a) Siano A, B e C tre insiemi. Provare che

$$A \cup B \cup C \ = \ A \cup (B \setminus A) \cup [C \setminus (A \cup B)]$$

(la precedente uguaglianza esprime l'unione $A \cup B \cup C$ dei tre insiemi A, B e C come unione di tre insiemi a due a due disgiunti).
b) Enunciare e dimostrare un risultato analogo relativamente all'unione di n insiemi.

6 Risolvere le seguenti equazioni nell'incognita x:
a) $x^2(x + 1) = x(x - 2)$; b) $(3x^2 - 8x)^2 = 9$;
c) $\sqrt{x^2 - 22x - 4} \ = \ 9$; d) $(2x - 1)(2x^2 + 5x - 3)(2x^2 - 3x + 5) = 0$;
e) $4x^4 + 11x^2 - 3 \ = \ 0$.

7 Risolvere le seguenti disequazioni nell'incognita x:
a) $x + 1 \leq x(x - 2)$; b) $\dfrac{5x - 3}{4} > \dfrac{2x + 5}{3}$;
c) $4x^2 - 28x + 49 \leq 0$; d) $(2x + 15)(2x^2 + 13x - 7) < 0$;
e) $(x^2 + x - 12)(x^2 + x + 12) > 0$; f) $\dfrac{3 - 4x}{5x^2 - 9x + 4} \geq 0$;
g) $\dfrac{(3 - 4x)(x^2 - 4)}{x^2 - 2x - 15} < 0$.

8 Risolvere i seguenti sistemi di disequazioni nell'incognita x:

$$\text{(a)} \begin{cases} x^2 - \sqrt{2}x - 4 \leq 0 \\ 2x^2 - 5x - 3 > 0 \end{cases} , \quad \text{(b)} \begin{cases} \dfrac{2x+1}{x^2 + 3\sqrt{2}x + 4} \geq 0 \\ \sqrt{3}x + 1 > 0 \end{cases} , \quad \text{(c)} \begin{cases} x^2(2x+3) \leq 0 \\ x^2 + 11x + 10 > 0 \\ \dfrac{2x+11}{3x+31} \geq 0 \end{cases} .$$

9 Risolvere, al variare del parametro reale a, le seguenti equazioni nell'incognita x:
a) $a^2(x+1) = a(1-x)$; b) $x^2 + ax + 4 = 0$;
c) $(a^2 - 4)x^2 + (a+1)x - 1 = 0$; d) $\dfrac{(x-5)(x^2 - 3ax + 2a^2)}{x - a^2} = 0$.

10 Risolvere, al variare del parametro reale a, le seguenti disequazioni nell'incognita x:
a) $x^2 + a(x+1) < 0$; b) $ax(x+1) + 1 > 0$;
c) $ax^2 + (2a-1)x + a \leq 0$; d) $(a-1)x^2 - ax + 2 \geq 0$.

11 Per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ si ha che
a) almeno uno dei due numeri -3 e 1 è soluzione della disequazione nell'incognita x:
(*) $kx^3 - 3k^2x + k + 1 \leq 0$?
b) entrambi i numeri -3 e 1 sono soluzioni della (*)?
c) uno solo dei due numeri -3 e 1 è soluzione della (*)?
d) nessuno dei numeri -3 e 1 è soluzione della (*)?

12 Per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ si ha che:
a) almeno uno dei due numeri -2 e 3 è soluzione del sistema di disequazioni nell'incognita x:

$$\text{(s)} \begin{cases} |k-1|x^4 + x^3 + 3 > 0 \\ 2k|x^2 - 2| + x \leq 0 \end{cases} ?$$

b) entrambi i numeri -1 e 2 sono soluzioni del sistema (s)?
c) uno solo dei due numeri -1 e 2 è soluzione di (s)?
d) nessuno dei numeri -1 e 2 è soluzione di (s)?

13 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita nel modo seguente:

$$f(x) = |x-1|x + 4x - 3 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Rappresentare su una retta cartesiana il segno di $f(x)$ al variare di x.

14 Dimostrare che i seguenti numeri reali sono irrazionali:

$$\text{a) } \sqrt{6} , \qquad \text{b) } \frac{4 - 3\sqrt{6}}{5} , \qquad \text{c) } \sqrt{2} + \sqrt{3} .$$

15 Per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ la disequazione nell'incognita x

$$x^2 - 4(k-1)x + k(3k-4) < 0$$

a) ammette soluzioni?
b) ammette soluzioni positive?
c) ammette soluzioni, ed esse sono tutte positive?
d) ammette sia soluzioni positive che soluzioni negative?

16 Disegnare i grafici delle seguenti funzioni reali definite in tutto $\mathbb{R}$:

$$f_1(x) = |x-1| , \quad f_2(x) = -|x-1| , \quad f_3(x) = 3 - |x-1| , \quad f_4(x) = |3 - |x-1|| ;$$
$$g_1(x) = 2x - 1 , \quad g_2(x) = 4 - 3x , \quad g_3(x) = \max\{2x-1, 4-3x\} ,$$
$$g_4(x) = \max\{2x-1, 4-3x\} - 5 , \quad g_5(x) = |\max\{2x-1, 4-3x\} - 5| ,$$
$$h_1(x) = 2^x , \quad h_2(x) = 2^x - 4 , \quad h_3(x) = |2^x - 4| .$$

17 Per ognuna delle seguenti coppie $f(x), g(x)$ di funzioni reali della variabile reale x disegnare entrambi i grafici in uno stesso piano cartesiano:

$$\text{a) } f(x) = 2^x,\ g(x) = 5^x \ , \quad \text{b) } f(x) = \log_3 x,\ g(x) = \log_5 x \ ,$$
$$\text{c) } f(x) = |x|^3,\ g(x) = |x|^5 \ , \quad \text{d) } f(x) = \frac{1}{x^3},\ g(x) = \frac{1}{x^5} \ .$$

18 Disegnare i grafici delle seguenti funzioni reali di variabile reale:

$$\text{a) } \sqrt[5]{x^7} \ , \quad \text{b) } \sqrt[7]{x^5} \ , \quad \text{c) } \sqrt[6]{x^5} \ , \quad \text{d) } \sqrt[4]{x^5} \ , \quad \text{e) } \sqrt[5]{x^6} \ , \quad \text{f) } \sqrt[5]{x^4} \ , \quad \text{g) } \frac{1}{\sqrt[5]{x^7}} \ , \quad \text{h) } \frac{1}{\sqrt[5]{x^6}} \ , \quad \text{i) } \frac{1}{\sqrt[6]{x^5}} \ .$$

19 Risolvere, al variare del parametro reale k, le seguenti disequazioni:
a) $\dfrac{2kx}{2x-1} + 3 < \dfrac{x}{1-2x}$;
b) $\dfrac{k(x-1)-1}{x^2-3x+2} \geq 0$;
c) $\dfrac{x-k^2}{(x+k-2)(x-4)} \leq 0$.

20 Risolvere le seguenti equazioni e disequazioni:
a) $|4x+1| + 2x - 3 < 0$;
b) $5|x+1| - 3x + 2 = 0$;
c) $|x^2 + x - 2| - x^2 + 3x \geq 1$;
d) $|1-5x| + x \leq |3x+2| + 1$;
e) $||4x-1| - 3| - 2x + 1 = 0$;
f) $|5|x-2| - 3| \geq 2x - 1$.

21 Siano A, B, C e D insiemi.
a) Che cosa vuol dire che la coppia ordinata (a, b) non appartiene a $A \times B$?
b) Provare che
(*) $A \subseteq C$ e $B \subseteq D \Rightarrow A \times B \subseteq C \times D$.
c) Provare che se nessuno degli insiemi A, B, C e D è vuoto allora è vero pure il viceversa della (*).
d) Provare che valgono le uguaglianze:

$$\text{i) } (A \cup C) \times B = (A \times B) \cup (C \times B), \ \text{ii) } (A \cap C) \times B = (A \times B) \cap (C \times B),$$
$$\text{iii) } (A \setminus C) \times B = (A \times B) \setminus (C \times B).$$

e) È vero che $(A \cap C) \times (B \cap D) = (A \times B) \cap (C \times D)$?
f) È vero che $(A \setminus C) \times (B \setminus D) = (A \times B) \setminus (C \times D)$?
g) A che cosa è uguale l'insieme $(A \cup C) \times (B \cup D)$?

22 Stabilire quali delle seguenti funzioni defínte in $\mathbb{N}_0$ ed a valori in $\mathbb{N}_0$ sono iniettive:

$$f_1(n) = \begin{cases} 4-n & \text{se } n \leq 4 \\ n & \text{se } n > 4 \end{cases} \ , \quad f_2(n) = n^2 + 1 \ , \quad f_3(n) = \begin{cases} 5n & \text{se } n \in P \\ 4n & \text{se } n \in D \end{cases}$$

$$f_4(n) = \begin{cases} 5n & \text{se } n \in P \\ 3n & \text{se } n \in D \end{cases} \ , \quad f_5(n) = \begin{cases} n^2 - 1 & \text{se } n \in D \\ n^2 + 6n + 8 & \text{se } n \in P \end{cases}$$

(P e D indicano, rispettivamente, l'insieme dei numeri naturali pari e quello dei numeri naturali dispari). Giustificare le risposte date.

23 Sia $\mathbb{Q}^+$ l'insieme dei numeri razionali positivi. Decidere quali delle seguenti strutture sono gruppoidi, quali semigruppi e quali gruppi:

$$(\mathbb{Q}^+, +) \ , \quad (\mathbb{Q}^+, -) \ , \quad (\mathbb{Q}^+, \cdot) \ , \quad (\mathbb{Q}^+, :) \ .$$

24 Siano $(A,*)$ e $(B,\circ)$ due gruppi. Definire un'operazione $\diamond$ nell'insieme $A\times B$ in modo che $(A\times B,\diamond)$ risulti un gruppo.

25 a) Siano A e B due insiemi. Provare che vale l'uguaglianza:
(*) $(A\cup B)\setminus(A\cap B)=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$.
(L'insieme che figura al primo ed al secondo membro della (*) si chiama la *differenza simmetrica* dei due insiemi A e B e si indica con il simbolo $A\triangle B$).
b) Dimostrare che l'operazione $\triangle$ gode delle proprietà commutativa ed associativa:
i) $A\triangle B=B\triangle A$;
ii) $(A\triangle B)\triangle C=A\triangle(B\triangle C)$.
(Per dimostrare la ii) conviene provare dapprima l'equivalenza:

$$x\in(A\triangle B)\triangle C\Leftrightarrow \begin{array}{l}x \text{ appartiene ad uno solo dei tre insiemi } A,B \text{ e } C\\ \text{oppure}\\ x \text{ appartiene ad ognuno dei tre insiemi } A,B \text{ e } C).\end{array}$$

c) Sia E un insieme. Verificare che la struttura $(\mathcal{P}(E),\triangle)$ è un gruppo ($\mathcal{P}(E)$ è l'*insieme delle parti,* o *famiglia dei sottoinsiemi,* di E, cioè l'insieme che ha come elementi tutti i sottoinsiemi di E).

26 Provare per induzione che:
1) $\sum_{i=1}^n i^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\quad\forall n\in\mathbb{N}$;
2) $\sum_{i=1}^n i^3=\left(\sum_{i=1}^n i\right)^2\quad\forall n\in\mathbb{N}$;
3) $3^{n-1}>n^2+5n\quad\forall n\in\mathbb{N}\ ,\ n\geq 5$.

27 Calcolare i seguenti logaritmi:

$$\log_{12}2\sqrt{3}\ ,\quad \log_{90}3\sqrt{10}\ ,\quad \log_{18}\frac{1}{3\sqrt{2}}\ ,\quad \log_{625}0,04\ ,$$

$$\log_{\frac{49}{9}}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3-\sqrt{2}}+\frac{1}{3+\sqrt{2}}\right)\right)\ ,\quad \log_{3\sqrt{3}}\log_{27}\log_{121}11^{\sqrt[3]{24}}\ ,\quad \log_{\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}}\frac{\log_7\frac{1}{16}}{\log_7\frac{\sqrt{2}}{8}}\ .$$

28 Usando solo carta e penna, disporre in ordine crescente i seguenti dieci numeri reali:

$$x_1=\log_{\frac{1}{8}}\sqrt[3]{(-2)^4}\ ,\quad x_2=21^{-0,1}\ ,\quad x_3=\log_3\frac{4}{21}+\log_3\frac{7}{36}\ ,$$

$$x_4=\log_{\sqrt{2}}\left(\log_{\sqrt{5}}\left(1-\frac{24}{25}\right)^3+28\right)\ ,\quad x_5=\log_{5\sqrt{5}}\sqrt{5}^{2\sqrt{29}}\ ,$$

$$x_6=(\log_5 2)^{-1}\log_5 4\sqrt{2}\ ,\quad x_7=22^{-0,1}\ ,\quad x_8=-\left(\frac{2}{3}\right)^{2,3}\ ,$$

$$x_9=\log_7\frac{1}{8}+\log_{49}64\ ,\quad x_{10}=\log_2\log_3 3^{512}\ .$$

29 Trovare il dominio di ognuna delle seguenti funzioni reali di variabile reale:

$$f(x)=\sqrt{\frac{2x^2-7x+2}{3x-5}}\ ,\qquad g(x)=\frac{\sqrt{2x^2-7x+2}}{\sqrt{3x-5}}\ ,$$

$$h(x)=\sqrt{|x-5|-x^2}-\frac{x}{x-2}\ ,\quad k(x)=\frac{\left(|x-4|-\sqrt{7}\right)^{\sqrt{7}}}{\sqrt{\sqrt{11}-|x-5|}}\ .$$

30 Sia A il sottoinsieme di $\mathbb{R}$ costituito da tutti i numeri reali del tipo $p+q\sqrt{2}$ con $p,q\in\mathbb{Q}$. Provare che A è un sottocampo di $\mathbb{R}$.

31 Rappresentare su una retta cartesiana il segno delle seguenti funzioni reali di variabile reale:

$$f(x)=|5x-3|+3x+7 \quad , \quad g(x)=|x^2-4|-|x^2-7x+12|+x \quad ,$$
$$h(x)=||x^2-1|-x|-3x-2 \quad , \quad m(x)=\frac{|3x+1|-x}{|3x-1|+|x|+2} \quad ,$$
$$l(x)=\frac{|4x-1|-x}{9-x^2} \quad .$$

32 Delle seguenti relazioni nell'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali stabilire quali sono riflessive, quali simmetriche, quali transitive, quali antisimmetriche e quali totali:

$$R_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}: x-y\in\mathbb{Q}\},\ R_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}: xy\in\mathbb{Q}\},$$
$$R_3=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}: x-y\in\mathbb{N}\},\ R_4=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}: |x|=|y|\},$$
$$R_5=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}: |x|\le|y|\},\ R_6=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}: x\ge y\}.$$

33 Sia α un piano e siano r e O, rispettivamente, una retta ed un punto di α. Verificare che ognuna delle relazioni $R_1,\ldots,R_5$, di seguito specificate, è una relazione di equivalenza in α:

PR_1Q $\Leftrightarrow$ P=Q=O oppure P$\neq$O, Q$\neq$O ed i segmenti OP e OQ sono congruenti;
PR_2Q $\Leftrightarrow$ P=Q oppure P$\neq$Q ed il segmento PQ è parallelo alla retta r;
PR_3Q $\Leftrightarrow$ P=Q oppure P$\neq$Q ed il segmento PQ è perpendicolare alla retta r;
PR_4Q $\Leftrightarrow$ P=Q=O oppure P$\neq$O, Q$\neq$O ed uno dei due segmenti OP e OQ è contenuto nell'altro;
PR_5Q $\Leftrightarrow$ P=Q=O oppure P$\neq$O, Q$\neq$O ed i segmenti OP e OQ sono paralleli.

Dire inoltre, per ognuna delle relazioni R_i, $i=1,\ldots,5$, quali sono gli elementi dell'insieme quoziente $\alpha/_{R_i}$. Giustificare le risposte date.

34 Nell'insieme $\mathbb{R}^2$ si consideri la relazione $\preceq$ definita nel modo seguente:

$$(x,y)\preceq(u,v) \;\Leftrightarrow\; x\le u \text{ e } y\le v \ ,$$

dove $\le$ è l'ordinamento aritmetico in $\mathbb{R}$.
a) Dimostrare che $\preceq$ è una relazione d'ordinamento parziale.
b) Dire se $\preceq$ è totale. Giustificare la risposta.
c) Determinare, se esistono, l'estremo inferiore e l'estremo superiore dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$, precisando se si tratta di minimo e di massimo:

$$A=\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}\ ,$$
$$B=\{(0,0),(0,1),(1,0)\}\ ,\quad C=\{(0,1),(1,0)\}\ .$$

35 Si consideri l'insieme parzialmente ordinato $(A,\preceq)$, dove $A=\{3,5,10,15,60,90\}$ e $\preceq$ è la seguente relazione d'ordinamento parziale in A:

$$x\preceq y \;\Leftrightarrow\; x \text{ è un divisore di } y.$$

Trovare un sottoinsieme B di A in modo che:
a) B non sia limitato superiormente;
b) B sia limitato superiormente ma non abbia l'estremo superiore;
c) B abbia l'estremo superiore ma non il massimo;
d) B abbia il massimo.

36 Risolvere le seguenti equazioni nell'incognita x:

a) $\log_3(3x-7)=2$; b) $5^{x^2}+25^{x^2-1}=\frac{11}{4}$;
c) $\log_3(x(x-3))=\log_3(2x-5)$; d) $\frac{1}{2}\log_3 x=\log_3 30+2\log_9\frac{3}{5}$;
e) $\log_{\frac{1}{2}}|x^2-|x|-4|=0$; f) $4^{x+5}-\dfrac{3}{4^x}=16$.

37 Risolvere le seguenti disequazioni nell'incognita x:

a) $\sqrt{3}^{|3-|x||}>3\sqrt[3]{3}$; b) $\log_2(x^2+x)>1$;
c) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2^{x^2-4|x|}}\le\dfrac{1}{9}$; d) $\log_2\log_{\frac{1}{2}}\log_2 x>0$;
e) $\left(3^{\sqrt{x+1}}\right)^{\sqrt{x+1}}\cdot 3^{x^2}\cdot 3^{2x}>3^{-1}$; f) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-2x-2)<0$;
g) $\log_x 2+1\le 0$; h) $\log_{-x}(|x|-x)>\dfrac{|x+1|}{x+1}$;
i) $x^{x\log_2 x}>1$; l) $x^{x^4-1}>1$.

38 Risolvere le seguenti disequazioni nell'incognita x:

a) $x^3+4x^2+2x-1\le 0$; b) $2x^4-3x^3+5x^2-9x+5\le 0$;
c) $2x^3+x^2+3x-2>0$, d) $x^4+4x^2-5\le 0$.

39 Risolvere le seguenti disequazioni nell'incognita x:

a) $4x^3+19x^2+15x-5<0$;
b) $x^2(3x+1)<4(1-x)$;
c) $\dfrac{3x^3+2}{x-2}+1\le\dfrac{6(3x+1)}{x+1}-\dfrac{x(6x+1)}{2-x}-x$;
d) $\dfrac{x^3}{x+3}-\dfrac{1}{1-x}\ge 2-\dfrac{3x^2-8x+1}{x^2+2x-3}$.

40 Per ognuna delle funzioni $f_i:[-1,+\infty[\to\mathbb{R}$, $i=1,\dots,4$, di seguito specificate:

$$f_1(x)=\begin{cases} x & \text{se } x\in[-1,0]\,,\\ \left(\frac{1}{2}\right)^x & \text{se } x\in]0,+\infty[\,,\end{cases}\qquad f_2(x)=\begin{cases} 1-x & \text{se } x\in[-1,1]\,,\\ \log_{\frac{1}{2}}x & \text{se } x\in]1,+\infty[\,,\end{cases}$$

$$f_3(x)=\begin{cases} \sqrt[3]{x} & \text{se } x\in[-1,1]\,,\\ \frac{1}{\sqrt[3]{x}} & \text{se } x\in]1,+\infty[\,,\end{cases}\qquad f_4(x)=\begin{cases} 2^{x+2} & \text{se } x\in[-1,1]\,,\\ -x^2 & \text{se } x\in]1,+\infty[\,,\end{cases}$$

a) disegnare il grafico della funzione f_i;
b) stabilire se la funzione f_i è iniettiva e motivare la risposta data;
c) qualora f_i sia iniettiva, trovare il dominio, la legge ed il codominio della funzione inversa f_i^{-1} e disegnarne il grafico.

41 Per ognuna delle seguenti funzioni reali di variabile reale:

$$4x^3+5\quad,\quad 4x^2-5|x|+3\quad,\quad 4x^2-5x+3\quad,$$

$$2^{1-3x}\quad,\quad\log_2(1-5x)\quad,\quad 2^{|x+1|}\quad,$$

a) stabilire se la funzione data è iniettiva oppure no e motivare la risposta data;
b) se la funzione è iniettiva, trovare il dominio, la legge ed il codominio della funzione inversa.

42 Stabilire quali delle seguenti funzioni reali di variabile reale sono iniettive:

$$f_1(x) = \frac{x}{x+2} \quad , \quad f_2(x) = \frac{x^2}{x^2+2} \quad , \quad f_3(x) = \frac{x^3}{x^3+2} \quad ,$$

$$f_4(x) = \left(\frac{x}{x+2}\right)^2 \quad , \quad f_5(x) = \left(\frac{x}{x+2}\right)^3 \quad .$$

Motivare le risposte date e, per ognuna delle funzioni f_i che è iniettiva, trovare il dominio e la legge della funzione inversa f_i^{-1}.

43 Risolvere le seguenti disequazioni nell'incognita x:
a) $\dfrac{10x(x+1)^2 - 25x + 1}{x^2 + 4x + 11} \leq 1$;
b) $2\sqrt{5}x^4 + 21x^3 - 21x - 2\sqrt{5} > 0$;
c) $2x^4 - 11x^3 + 9x^2 - 11x + 2 \leq 0$;
d) $x^5 + \dfrac{8 - 7\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}x^4 + \dfrac{9\sqrt{3} - 28}{2\sqrt{3}}x^3 + \dfrac{28 - 9\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}x^2 + \dfrac{7\sqrt{3} - 8}{2\sqrt{3}}x - 1 \geq 0$.

44 Sia $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ così definita:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{se } x \in [-1,1] \setminus \{\frac{1}{2}\} \ , \\ 2 & \text{se } x = \frac{1}{2} \ . \end{cases}$$

a) Disegnare il grafico di f e dire se f è monotona. Giustificare la risposta.
b) Provare che f è iniettiva e trovare il dominio e la legge di f^{-1}.

45 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ così definita:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in \mathbb{Q} \ , \\ -x & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \ . \end{cases}$$

a) Provare che f è iniettiva e che risulta $f = f^{-1}$.
b) Dire se esistono intervalli I tali che $f|_I$ è monotona. Giustificare la risposta.

46 Risolvere le seguenti equazioni e disequazioni irrazionali:

$$\text{a) } x = 3 + \sqrt{x^2 - 2x} \ ; \qquad \text{b) } \sqrt{x} + \sqrt{x-1} - \sqrt{x+1} = 0 \ ; \qquad \text{c) } \sqrt[3]{x} + \sqrt{|x|} = 0 \ ;$$
$$\text{d) } \sqrt{3x^2 + x - 2} < 4x + 1 \ ; \qquad \text{e) } \sqrt{x-2} - x + 4 \geq 0 \ ; \qquad \text{f) } 3 - \sqrt{x+2} > \sqrt{x+1} \ .$$

47 Risolvere le seguenti disequazioni:

$$\text{a) } \sqrt[4]{x^4 + x^2 - 2} < x \ ; \qquad \text{b) } \sqrt{x^2 + 8x} \geq 2x + 1 \ ;$$
$$\text{c) } \sqrt[3]{6x^2 + 8x + 3} \leq x + 2 \ ; \qquad \text{d) } \sqrt{5x^2 + 4x - 1} \leq 3x - 1 \ .$$

48 Risolvere le seguenti disequazioni:

$$\text{a) } \frac{\sqrt{8x^3 - 1}}{2x + 1} \geq \sqrt{2x - 3} \ ; \qquad \text{b) } \frac{\sqrt{8x^3 + 1}}{2x - 3} \leq \sqrt{2x + 3} \ ;$$
$$\text{c) } \sqrt{x - 1} > \sqrt[3]{x^2 - 3x + 2} \ ; \qquad \text{d) } \sqrt{\frac{10 + 3x - x^2}{x - 1}} \geq 2\frac{x}{\sqrt{|x|}} \ .$$

49 Razionalizzare le disequazioni

$$\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} \le h(x) \quad , \quad \sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} \ge h(x) \ .$$

50 Risolvere le seguenti disequazioni nell'incognita x :

$$\text{a) } \log_{\frac{1}{3}}(x^6 + x^3 - 2) + \log_3 4 > 0 \ ; \quad \text{b) } \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{x+2}} \ge 5^{\frac{x}{x+3}} \ ;$$

$$\text{c) } \log_2(1-3x) - 2\log_2 \frac{x+2}{\sqrt{2}} > 1 \ ; \quad \text{d) } \log_x^2 2 > \log_x \frac{1}{2} + 2\log_2 x \ ;$$

$$\text{e) } \log_{\frac{3}{4}}\left(x^2(4x^2 - 17x + 8)\right) < \log_{\frac{3}{4}}(17x - 4) \ ;$$

$$\text{f) } 4x + 1 - \log_2 \sqrt{x+2} < 5x^3 - \log_4(x+2) \ ;$$

$$\text{g) } x^{\sqrt{2}} \le x^{\sqrt{x} + \sqrt{2-x}} \ ; \quad \text{h) } \log_3 \log_{\frac{1}{3}} |2x - 1| < 2 \ ;$$

$$\text{i) } \frac{|2^x - 1| - 3}{\log_2(x+1) + 3} \ge 0 \ ; \quad \text{l) } \frac{2^{\sqrt{4x-1}} - 3 \cdot 3^{|x|}}{9 - 3^{|x|+1}} < 1 \ ;$$

$$\text{m) } \sqrt{2^x + 1} - \sqrt[3]{4^x - 1} \ge 0 \ ; \quad \text{n) } \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{|x+1|}}\right)^{\sqrt{x+2}} \le \frac{1}{4} \ ;$$

$$\text{o) } \log_2(x+3) + \log_{\frac{1}{2}}(1 - 5x) \le 1 \ ; \quad \text{p) } \log_{4x-1} x^{x^2 + \frac{1}{4}} > \log_{4x-1} x^{x + \frac{1}{16}} \ .$$

51 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita nel modo seguente:

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{se } x \in \,]-\infty, -1[\\ -(x+1) & \text{se } x \in \, [-1, 0[\\ \left(\frac{1}{2}\right)^x & \text{se } x \in [0, +\infty[\end{cases} \ .$$

a) Disegnare il grafico di f e dire se f è monotona in $\mathbb{R}$, giustificando la risposta.
b) Provare che f è iniettiva e trovare il dominio di f^{-1}.
c) Trovare la legge di f^{-1}.
d) Disegnare il grafico di f^{-1}.

52 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita nel modo seguente:

$$f(x) = \begin{cases} -4^x & \text{se } x \in \,]-\infty, 1[\\ \log_2 x & \text{se } x \in [1, +\infty[\end{cases} \ .$$

a) Disegnare il grafico di f .
b) Dire se f è monotona in $\mathbb{R}$. Giustificare la risposta.
c) Provare che f è iniettiva.
d) Trovare il dominio e la legge della funzione inversa.
e) Disegnare il grafico della funzione inversa.

(Compito Scienze biologiche 3-2-1995 B).

53 Trovare i domini delle seguenti funzioni reali della variabile reale x:

$$\text{a) } \sqrt[4]{\frac{2x-1}{3x-1}} - \log(x+5) \ , \quad \text{b) } \frac{\log(3 - \sqrt{1-2x})}{\sqrt{x+2}} \ , \quad \text{c) } \sqrt{1 - \log_3(x+5)} - (x+3)^{-5} \ ,$$

$$\text{d) } \frac{\sqrt{72 - 4^x - 2^x}}{x+4} \ , \quad \text{e) } \sqrt{\log_3^2 x - 2\log_3 x - 3} \ , \quad \text{f) } \log \frac{2x-3}{4x-5} + \sqrt{2x+1} \ .$$

54 Risolvere il sistema di disequazioni

$$\begin{cases} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-7} > 4\sqrt{2} \\ \log_3(10x-3) \geq 3 \\ \sqrt{11x-28} \leq x \end{cases} .$$

(Compito Scienze biologiche 2-2-2000).

55 Provare che i seguenti sottoinsiemi dell'insieme $\mathbb{R}$, dotato dell'ordinamento aritmetico, sono tutti limitati e trovare, per ognuno di essi, l'estremo superiore e l'estremo inferiore, precisando se si tratta, rispettivamente, di massimo e di minimo. Giustificare le risposte date.
$A = \left\{\frac{n}{n+1} \,:\, n \in \mathbb{N}\right\}$; $B =]0,1[\cup\{2,4\}$;
$C = \{r\sqrt{3} \,:\, r \in]0,2[\cap\mathbb{Q}\}$; $D = \left\{\frac{x}{x^2+1} : x \in \mathbb{R}\right\}$;
$E = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x = +1, C_1C_2C_3\ldots$ ed esattamente quattro delle cifre C_i sono diverse da zero$\}$.

56 Sia X un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$ tale che

$$\max X = 4 \quad , \quad \inf X = -\tfrac{1}{3} \quad , \quad X \text{ non ha minimo} \quad .$$

Trovare l'estremo superiore e l'estremo inferiore dell'insieme $Y = \{-3x+2 \,:\, x \in X\}$ e decidere se si tratta, rispettivamente, di massimo e di minimo.

57 Per ognuno dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ stabilire se si tratta di un insieme limitato superiormente [inferiormente] oppure no e, in caso affermativo, trovare l'estremo superiore [inferiore], precisando se si tratta di massimo [minimo]. Giustificare le risposte date.
$A = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x = -0, C_1C_2C_3\ldots$ e ognuna delle cifre C_i può assumere soltanto i valori 0 e 3$\}$.
$A_1 = \{x-y \,:\, x,y \in A\}$; $A_2 = A \cap (\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$;
$B = \left\{\frac{3n^2}{4n+1} \,:\, n \in \mathbb{N}\right\}$; $C = \left\{\frac{x}{x+1} \,:\, -2 \leq x < -1\right\}$;
$D = \left\{(-1)^n\frac{1}{n+1} \,:\, n \in \mathbb{N}\right\}$; $E = \{x^3 - x \,:\, 1 < x \leq 2\}$;
$F = \left\{\frac{1}{1+|x|} + \frac{1}{1+x^2+y^2} \,:\, x,y \in]-\infty,-1[\right\}$; $G = \left\{\log_{\frac{1}{2}}\frac{n}{n+1} \,:\, n \in \mathbb{N}\right\}$;
$H = \left\{e^{-x^2} \,:\, x \in \mathbb{R}\right\}$; $I = \left\{e^{-x^3} \,:\, x \in \mathbb{R}\right\}$;
$L = \left\{\frac{n-2}{n}r_n \,:\, n \in \mathbb{N}\right\}$, dove r_n è il resto della divisione $n:5$.

58 Sia A, B due sottoinsiemi non vuoti di $\mathbb{R}$ e sia $A+B = \{a+b \,:\, a \in A, b \in B\}$. Provare che:
1) $A+B$ è limitato superiormente se e soltanto se entrambi gli insiemi A e B sono limitati superiormente.
2) $A+B$ è dotato di massimo se e soltanto se entrambi gli insiemi A e B sono dotati di massimo.
3) se A e B sono limitati superiormente, allora $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$.

59 Siano A, B due sottoinsiemi non vuoti di $\mathbb{R}$, con $A, B \subseteq [0,+\infty[$, e sia $AB = \{ab \,:\, a \in A, b \in B\}$. Provare che:
1) se entrambi gli insiemi A e B sono limitati superiormente, allora anche AB è limitato superiormente, ma il viceversa non è vero.
2) se A e B sono limitati superiormente, allora $\sup(AB) = \sup A \cdot \sup B$.

60 Trovare l'interno, la frontiera ed il derivato di ognuno dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$:
$E_1 = [0,1[\cup([2,3[\cap\mathbb{Q})$; $E_2 = (]-\infty,-\sqrt{2}[\setminus\mathbb{Z}) \cup ([\sqrt{2},+\infty[\setminus\mathbb{Q})$;
$E_3 = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$; $E_4 = \{m + \frac{1}{n} :\ m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\}$.

61 Sia E un sottoinsieme di $\mathbb{R}$. Dimostrare che:
i) $\partial E \setminus E \subseteq \mathrm{D}E$;
ii) $\mathrm{D}E \setminus E \subseteq \partial E$;
iii) $E \cup (\partial E) = E \cup (\mathrm{D}E)$.

62 Sia X un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$ limitato superiormente e sia $L = \sup X$. Provare che:
a) $L \in \partial X$;
b) se l'insieme X non ha il massimo, allora $L \in \mathrm{D}X$.

63 Siano $E, F \subseteq \mathbb{R}$. Provare che $\mathring{E} \cup \mathring{F} \subseteq \overset{\circ}{\overbrace{(E \cup F)}}$, ma che, in generale, non si ha l'uguaglianza.

64 Verificare, in base alla definizione di limite di una successione, che risulta:

$$\text{a) } \lim_{n\to\infty} \frac{2^n - 1}{2^n + 1} = 1 \ ; \qquad \text{b) } \lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+7} - \sqrt{n}) = 0 \ ;$$

$$\text{c) } \lim_{n\to\infty} \log_{\frac{1}{2}}(n^2 - 2n + 3) = -\infty \ ; \qquad \text{d) } \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2-\log_5(n^2+2)} = +\infty \ .$$

65 Siano $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ due successioni e sia $\{c_n\}$ la successione definita nel modo seguente:

$$c_1 = a_1 \, , \, c_2 = b_1 \, , \, c_3 = a_2 \, , \, c_4 = b_2 \, , \, c_5 = a_3 \, , \, c_6 = b_3 \, , \, \dots \ .$$

a) Provare che condizione sufficiente affinché la successione $\{c_n\}$ sia convergente è che le successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ siano entrambe convergenti ed abbiano lo stesso limite.
b) Stabilire se la precedente condizione è anche necessaria. Giustificare la risposta data.
c) Risolvere i precedenti quesiti a) e b) per ognuna delle due successioni $\{d_n\}$ e $\{e_n\}$ di seguito definite:

$$d_1 = a_1 \, , \, d_2 = b_2 \, , \, d_3 = a_3 \, , \, d_4 = b_4 \, , \, d_5 = a_5 \, , \, d_6 = b_6 \, , \, \dots \ ,$$
$$e_1 = a_1 \, , \, e_2 = \tfrac{a_1+2b_1}{3} \, , \, e_3 = a_2 \, , \, e_4 = \tfrac{a_2+2b_2}{3} \, , \, e_5 = a_3 \, , \, e_6 = \tfrac{a_3+2b_3}{3} \, , \, \dots \ .$$

66 a) Trovare il limite della successione $\left\{\frac{[nx]}{n}\right\}$ $(x \in \mathbb{R})$.
b) Provare che una successione $\{x_n\}$ converge ad un numero x e x è un maggiorante di $\{x_n\}$, allora $x = \sup_{n\in\mathbb{N}} x_n$.
c) Trovare l'estremo superiore della successione $\left\{\frac{[nx]}{n}\right\}$.
d) Provare che $x = \min_{n\in\mathbb{N}} \frac{[nx]}{n}$.

67 Calcolare i limiti delle seguenti successioni:

$$\text{a) } \left\{\sqrt[3]{n+4} - \sqrt[3]{n}\right\} \quad , \quad \text{b) } \left\{\left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n}\right)\sqrt{n+1}\right\} \quad , \quad \text{c) } \left\{\frac{n^2 - \operatorname{sen} n}{2n^2 + n}\right\}$$

$$\text{d) } \{n^n\} \quad , \quad \text{e) } \{n!\} \quad , \quad \text{f) } \left\{\frac{(n+1)^3}{n!}\right\} \quad , \quad \text{g) } \left\{\frac{\sqrt{n+1}}{n} \operatorname{sen} n!\right\} \quad ,$$

$$\text{h) } \left\{\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2n^2 - \operatorname{sen} n}\right\} \quad , \quad \text{i) } \left\{\frac{n^3 + n^2}{2n^2 - \operatorname{sen} \frac{1}{n}}\right\} \quad , \quad \text{l) } \left\{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}\right\} \quad ,$$

$$\text{m) } \left\{\left(\sqrt[n]{a} - 1\right)^n\right\} \ (a > 0) \quad , \quad \text{n) } \left\{(\cos \pi x)^{2n}\right\} \ (x \in \mathbb{R}) \quad , \quad \text{o) } \left\{\frac{2^n}{(n+1)^2}\right\} \quad ,$$

$$\text{p) } \left\{\frac{n^2 2^n}{3^n}\right\} \quad , \quad \text{q) } \left\{\frac{n^2 + 2^n}{3^n + n^3}\right\} \quad , \quad \text{r) } \left\{\frac{\sqrt[4]{n^5+2} - \sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[5]{n^4+2} - \sqrt{n^3+1}}\right\} \quad .$$

68 Trovare, al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$, l'estremo inferiore e l'estremo superiore (finiti o no) degli insiemi numerici

$$X_\lambda = \{e^{\frac{\lambda n}{n+1}} : n \in \mathbb{N}\} \quad , \quad Y_\lambda = \{\lambda^{2n} : n \in \mathbb{N}\} \quad .$$

69 Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri reali sulla quale si hanno le seguenti informazioni:
1) la successione $\{a_n\}$ è convergente;
2) $\sup_{n\in N} a_n = 5$;
3) $a_n < 5 \;\; \forall n \in \mathbb{N}$.
Qual è il limite della successione $\{a_n\}$? Giustificare la risposta data.

70 Siano: $\theta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.
Dimostrare che le n radici n-me del numero complesso $z = \cos\theta - i \operatorname{sen}\theta$ sono:
$$\cos\tfrac{\theta+2k\pi}{n} - i \operatorname{sen}\tfrac{\theta+2k\pi}{n}\,, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1\,.$$

71 Calcolare la derivata delle seguenti funzioni:

$$\text{a)}\;\; x^3 2^{4x-x^2} \quad , \quad \text{b)}\;\; \frac{x^3+e^x}{x^2+e^{-x}} \quad , \quad \text{c)}\;\; \left(\frac{x}{\log x}\right)^{\sqrt{2}} \quad , \quad \text{d)}\;\; \frac{x^2-\operatorname{sen}^2 x}{x^2+\cos^2 x} \quad ,$$

$$\text{e)}\;\; \operatorname{arcsen}\frac{1}{x^2+1} \quad , \quad \text{f)}\;\; x \operatorname{arctg}^2 x \quad , \quad \text{g)}\;\; \log_3(1+\operatorname{tg}^2 x) \quad , \quad \text{h)}\;\; x^2 e^x \operatorname{sen} x \quad ,$$

$$\text{i)}\;\; x^2 \operatorname{sen}^3 x \cos^4 2x \quad , \quad \text{l)}\;\; \frac{x}{x^2+1} \operatorname{arctg} \frac{x}{x^2+1} \quad , \quad \text{m)}\;\; \log^3 \frac{x^2 \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{x^2+\operatorname{cotg}^2 x} \quad .$$

72 Siano $f, g : I \to \mathbb{R}$ due funzioni reali definite nell'intervallo I e sia x_0 un punto di I.
Provare o smentire le seguenti affermazioni:
a) se la funzione somma $f+g$ è derivabile nel punto x_0, allora almeno una delle due funzioni f e g è derivabile in x_0;
b) se la funzione somma $f+g$ è derivabile nel punto x_0 ed almeno una delle due funzioni f e g è derivabile in x_0, allora anche l'altra funzione è derivabile in x_0;
c) se la funzione prodotto fg è derivabile nel punto x_0 ed almeno una delle due funzioni f e g è derivabile in x_0, allora anche l'altra funzione è derivabile in x_0.

73 Calcolare le seguenti derivate (si tenga presente che, come è d'uso, l'espressione a^{b^c} significa $a^{(b^c)}$):

$$\text{a)}\;\; \mathrm{D}x^x \quad , \quad \text{b)}\;\; \mathrm{D}\,(x^x)^x \quad , \quad \text{c)}\;\; \mathrm{D}(\log x)^{\log x} \quad , \quad \text{d)}\;\; \mathrm{D}x^{x^x} \quad ,$$

$$\text{e)}\;\; \mathrm{D}\,(x^x)^{x^x} \quad , \quad \text{f)}\;\; \mathrm{D}\Big(x^{x^x}\Big)^x \quad , \quad \text{g)}\;\; \mathrm{D}x^{x^{x^x}} \quad .$$

74 Siano $f, g, h : I \to \mathbb{R}$ tre funzioni reali definite nell'intervallo I e sia x_0 un punto di I. Siano inoltre verificate le seguenti ipotesi: (i) $f(x) \leq g(x) \leq h(x)\; \forall x \in I$; (ii) $f(x_0) = h(x_0)$; (iii) le funzioni f e h sono derivabili nel punto x_0.
a) Dimostrare che, se il punto x_0 è interno all'intervallo I, allora anche la funzione g è derivabile nel punto x_0 e risulta: $(*)\;\; f'(x_0) = g'(x_0) = h'(x_0)$.
b) Mostrare con opportuni esempi che, se x_0 è un estremo di I, le precedenti ipotesi (i) - (iii) non sono sufficienti ad assicurare né la derivabilità di g in x_0 né, ammettendo per ipotesi l'esistenza della derivata $g'(x_0)$, la validità dell'uguaglianza (*).

75 Calcolare la derivata delle seguenti funzioni, precisando l'insieme di validità del risultato ottenuto:

$$\text{a)}\;\; \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x - \cos x} \quad , \quad \text{b)}\;\; \log\left|\frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x - \cos x}\right| \quad , \quad \text{c)}\;\; \frac{\operatorname{sen}\,\log x + \cos\log x}{\operatorname{sen}\,\log x - \cos\log x} \quad ,$$

$$\text{d)}\;\; \frac{\operatorname{sen} x^4 + \cos x^4}{\operatorname{sen} x^4 - \cos x^4} \quad , \quad \text{e)}\;\; \left(\frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x - \cos x}\right)^4 \quad , \quad \text{f)}\;\; \sqrt[4]{\frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x - \cos x}} \quad .$$

76 Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione reale definita nell'intervallo I, continua nel punto $x_0 \in I$. Provare o smentire le seguenti affermazioni:
a) f derivabile in $x_0 \implies |f|$ derivabile in x_0;
b) $|f|$ derivabile in $x_0 \implies f$ derivabile in x_0;
c) $x_0 \in \overset{\circ}{I}$, $|f|$ derivabile in $x_0 \implies f$ derivabile in x_0.

77 Calcolare, se esiste, la somma delle seguenti serie numeriche:

$$\text{a)} \sum_{n=4}^{\infty} 3(-2)^{3-n} \quad , \quad \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \quad , \quad \text{c)} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \quad ,$$

$$\text{d)} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(4n-3)(4n+1)} - \frac{1}{3^{n+2}} \right] \quad , \quad \text{e)} \sum_{n=5}^{\infty} \left[\frac{1}{5^n} + 1 \right] \quad , \quad \text{f)} \sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{5^{n+1}+5}{5^{n+1}+1} \quad ,$$

$$\text{g)} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\log \frac{5^{n+1}+5}{5^{n+1}+1} + (-5)^{n+2} \right] \quad , \quad \text{h)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2} \quad .$$

78 Sia $\{a_n\}$ una successione non crescente di numeri non negativi. Dimostrare che le due serie

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \quad , \quad a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n-1} + \ldots$$

hanno lo stesso carattere. Provare inoltre, con un esempio, che l'ipotesi "$\{a_n\}$ non crescente" è essenziale.

79 Studiare il carattere delle seguenti serie, al variare di x in $\mathbb{R}$:

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} n^x x^n \quad , \quad \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} n^x x^{n!} \quad , \quad \text{c)} \sum_{n=1}^{\infty} (n!)^x x^n \quad , \quad \text{d)} \sum_{n=1}^{\infty} (n!)^x x^{n!} \quad .$$

80 Sia $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie a termini positivi.
Dimostrare che la condizione:

$$(*) \qquad \exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+2}}{a_n} = \ell \in [0, 1[$$

è sufficiente per la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, ma non è necessaria.
Confrontare poi la condizione (*) con l'altra condizione sufficiente:

$$(\text{o}) \qquad \exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda \in [0, 1[\quad ,$$

che si deduce dal criterio del rapporto.

81 Siano $\{A_n\}$, $\{B_n\}$ e $\{C_n\}$, nell'ordine, le successioni delle somme parziali delle seguenti tre serie numeriche:

$$\text{a)} \; 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots \quad , \quad \text{b)} \; 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots \quad ,$$

$$\text{c)} \; 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \ldots \quad .$$

Studiare, al variare di x in $\mathbb{R}$, il carattere delle tre serie:

$$\alpha) \sum_{n=1}^{\infty} A_n x^n \quad , \quad \beta) \sum_{n=1}^{\infty} B_n x^n \quad , \quad \gamma) \sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n \quad .$$

Soluzioni di alcuni esercizi

36

a) $\frac{16}{3}$; b) $\pm\sqrt{\log_5 \frac{5}{2}}$; c) $\frac{5+\sqrt{5}}{2}$

d) 18^2, e) $\pm\frac{1+\sqrt{13}}{2}$, $\pm\frac{1+\sqrt{21}}{2}$; f) -2.

37

a) $]-\infty,-\frac{17}{3}[\cup]-\frac{1}{3},\frac{1}{3}[\cup]\frac{17}{3},+\infty[$; b) $]-\infty,-2[\cup]1,+\infty[$;

c) $]-\infty,-(2+\sqrt{5})]\cup[2+\sqrt{5},+\infty[$;

d) $]1,\sqrt{2}[$; e) $]-1,+\infty[$; f) $]-\infty,-1[\cup]3,+\infty[$;

g) $[\frac{1}{2},1[$; h) $]-\infty,-1[$; i) $]0,+\infty[\setminus\{1\}$;

l) $(]0,+\infty[\setminus\{1\})\cup\{-\sqrt[4]{2k}\ :\ k\in\mathbb{N}\}$.

38

a) $]-\infty,-\frac{\sqrt{13}+3}{2}]\cup[-1,\frac{\sqrt{13}-3}{2}]$; b) $\{1\}$; c) $]\frac{1}{2},+\infty[$;

d) $[-1,1]$.

39

a) $]-\infty,-\frac{5+\sqrt{5}}{2}]\cup[\frac{-5+\sqrt{5}}{2},\frac{1}{4}]$; b) $]-\infty,\frac{2}{3}[$; c) $[-\frac{\sqrt{34}+5}{2},-1[\cup[\frac{\sqrt{34}-5}{2},2[$;

d) $]-\infty,-3[\cup[2,+\infty[$.

43

a) $]-\infty,-\frac{5}{2}]\cup[-\frac{2}{5},1]$; b) $]-\infty,-2\sqrt{5}[\cup]-1,-\frac{1}{2\sqrt{5}}[\cup]1,+\infty[$; c) $[\frac{5-\sqrt{21}}{2},\frac{5+\sqrt{21}}{2}]$;

d) $[\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{3}}]\cup[1,\sqrt{3}]\cup[2,+\infty[$.

70 La forma trigonometrica del numero complesso $z=\cos\theta-i\,\mathrm{sen}\,\theta$ è $z=\cos(-\theta)+i\,\mathrm{sen}\,(-\theta)$, pertanto l'insieme delle n radici n-me di z è $\left\{\cos\frac{-\theta+2h\pi}{n}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{-\theta+2h\pi}{n}\ :\ h=0,1,\dots,n-1\right\}$ o, ciò che è lo stesso,

$$(*)\qquad \left\{\cos\frac{-\theta+2h\pi}{n}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{-\theta+2h\pi}{n}\ :\ h=1,2,\dots,n\right\}\ .$$

Proveremo che l'insieme (*) è contenuto in

$$(**)\qquad \left\{\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}-i\,\mathrm{sen}\,\frac{\theta+2k\pi}{n}\ :\ k=0,1,\dots,n-1\right\}\ ;$$

in questo modo, dato che il precedente insieme (**) ha al più n elementi, saremo sicuri che esso è uguale all'insieme delle n radici n-me di z ed avremo quindi dimostrato l'enunciato dell'esercizio.
Proviamo l'inclusione insiemistica: per ogni $h\in\{1,2,\dots,n\}$, si ha che l'intero $n-k$ appartiene a $\{0,1,\dots,n-1\}$ e risulta

$$\begin{aligned}\cos\frac{-\theta+2h\pi}{n}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{-\theta+2h\pi}{n}\ &=\ \cos\frac{\theta-2h\pi}{n}-i\,\mathrm{sen}\,\frac{\theta-2h\pi}{n}\ =\\ =\ \cos\left(\frac{\theta-2h\pi}{n}+2\pi\right)-i\,\mathrm{sen}\,\left(\frac{\theta-2h\pi}{n}+2\pi\right)\ &=\ \cos\frac{\theta+2(n-h)\pi}{n}-i\,\mathrm{sen}\,\frac{\theta+2(n-h)\pi}{n}\quad .\end{aligned}$$

76) a) Falso. Controesempio: $I=\mathbb{R}$, $f(x)=x\ \forall x\in\mathbb{R}$, $x_0=0$.

b) Falso. Controesempio: $I = [0, +\infty[\,$, $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0, +\infty[\,\cap \mathbb{Q}, \\ -x & \text{se } x \in [0, +\infty[\,\setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$ $x_0 = 0$.

c) Vero. Indichiamo con λ la derivata $\mathrm{D}\,[|f(x)|]_{x=x_0}$, che esiste per ipotesi. Se $f(x_0) > 0$ [risp. $f(x_0) < 0$], per il teorema della permanenza del segno esiste $U \in \mathcal{U}(x_0)$ tale che $f(x) = |f(x)|$ [risp. $f(x) = -|f(x)|$] per ogni $x \in U \cap I$; pertanto, per il teorema sui limiti delle restrizioni larghe, la derivata $f'(x_0)$ esiste ed è uguale a λ [risp. $-\lambda$]. Se $f(x_0) = 0$, allora x_0 è un punto di minimo assoluto per la funzione $|f(x)|$, pertanto, per il teorema di Férmat, si ha $\lambda = 0$, cioè $\lim_{x\to x_0} \frac{|f(x)|}{x - x_0} = 0$ e quindi, per il teorema sul limite del prodotto di una funzione limitata per una infinitesima, si ha pure

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{|f(x)|} \cdot \frac{|f(x)|}{x - x_0} = 0 \ .$$

77

a) -1; b) $\frac{1}{2}$; c) $\frac{1}{10}$;

d) $\frac{7}{36}$; e) $+\infty$; f) $\log \frac{6}{5}$;

g) non esiste; h) $\frac{1}{8}$.

79) a) converge assolutamente per $|x| < 1$; converge, non assolutamente, per $x = -1$; diverge a $+\infty$ per $x > 1$; è oscillante per $x < -1$;
b) converge assolutamente per $|x| < 1$; diverge a $+\infty$ per $|x| \geq 1$;
c) converge assolutamente per $x \leq 0$; diverge a $+\infty$ per $x > 0$;
d) converge assolutamente per $x \in [-1, 1[$; diverge a $+\infty$ per $x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1[$.