

4.1

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \sqrt{x-2} - 5 \right| + \operatorname{tg} \frac{2x}{\sqrt{x^3-x+1}}$$

Abbiamo:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x-2} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \sqrt{y} = +\infty$$

↓
teorema sul limite delle
funzione composte

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \sqrt{x-2} - 5 \right| = +\infty$$

↓
teorema sul limite delle
funzione somma e delle
funzione $|f|$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^3-x+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x^{3/2}} \right) \frac{2}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}}} =$$

La ricerca del limite ha senso,
perché $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - x + 1) = +\infty$, quindi
il dominio della funzione contiene un intorno di $+\infty$

↓
0

$$\left(\text{dato che } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}} = \lim_{y \rightarrow 1} \sqrt{y} = 1 \right)$$

ter. nel limite
delle funz. composte

$$= 0 \quad ;$$

dall'ultimo limite segue che definitivamente, per $x \rightarrow +\infty$, si ha $\left| \frac{2x}{\sqrt{x^2 - x + 1}} \right| < \frac{\pi}{2}$

e quindi si può considerare la $\operatorname{tg} \frac{2x}{\sqrt{x^2 - x + 1}}$;

oltre

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{tg} \frac{2x}{\sqrt{x^2 - x + 1}} = \lim_{y \rightarrow 0} \operatorname{tg} y = 0$$

ter. nel limite delle
funzioni composte

quindi il limite cercato si presenta nella

forme indeterminate $(+\infty) \cdot 0$.

Osserviamo che definitivamente, per $x \rightarrow +\infty$, si ha:

$$\left| \sqrt{x-2} - 5 \right| + \frac{2x}{\sqrt{x^3-x+1}} =$$

✓ dato che l'argomento
del valore assoluto tende a $+\infty$

$$= \left(\sqrt{x-2} - 5 \right) + \frac{2x}{\sqrt{x^3-x+1}} =$$

✓ definitivamente
si ha $\frac{2x}{\sqrt{x^3-x+1}} > 0$

$$= \left(\sqrt{x-2} - 5 \right) \frac{+ \frac{2x}{\sqrt{x^3-x+1}}}{\frac{2x}{\sqrt{x^3-x+1}}} \cdot \frac{2x}{\sqrt{x^3-x+1}} ;$$

e questo fatto otteniamo:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{+ \frac{2x}{\sqrt{x^3-x+1}}}{\frac{2x}{\sqrt{x^3-x+1}}} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{+y}{y} =$$

✓

tenere nel limite della
sempre costante

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} - \frac{1}{\cos y} = 1 ;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x (\sqrt{x-2} - 5)}{\sqrt{x^3 - x + 1}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} \cdot \cancel{\sqrt{x}}}{\cancel{\sqrt{x}}} \cdot \frac{2 \left(\sqrt{1 - \frac{2}{x}} - \frac{5}{\sqrt{x}} \right)}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}}} =$$

$$= 2$$

osservando che $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \frac{2}{x}} = \lim_{y \rightarrow 1} \sqrt{y} = 1$

e $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}} = 1$ (quale visto).

Quindi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \sqrt{x-2} - 5 \right| + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^3 - x + 1}} = 2$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 - 3n + 2}{n^2 + 3n} \right)^{\sqrt{n - \sin n}}$$

Perché

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 3n + 2}{n^2 + 3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2} \cdot \frac{1 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}}{1 + \frac{3}{n}} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sin n) = +\infty$$

(dato che $n \rightarrow +\infty$ e $\{-\sin n\}$ è
una successione limitata (inferiormente))

e quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n - \sin n} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \sqrt{y} = +\infty$$

teorema sul limite delle successione
composte ($\sqrt{n - \sin n} = g(e_n)$,
con $\{e_n\} = \{n - \sin n\}$ e $g(y) = \sqrt{y}$)

il limite assegnato è presente nelle forme indeterminate 1^∞ .

Notiamo che la ricerca del limite ha senso; infatti l'esponente $\sqrt{n - \sin n}$ ha significato $\forall n \in \mathbb{N}_0$, mentre la base $\frac{n^2 - 3n + 2}{n^2 + 3n}$, dato

che converge a 1, è definitivamente positiva, quindi le potenze hanno significato definitivamente per $n \rightarrow \infty$ (risolvendo la disuguaglianza $\frac{n^2 - 3n + 2}{n^2 + 3n} > 0$ in effetti

nell'intervallo $n \in \mathbb{N}_0$ a partire da $n \geq 3$)

Possiamo scrivere la successione assegnata nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \left(\frac{n^2 - 3n + 2}{n^2 + 3n} \right)^{\sqrt{n - \sin n}} &= \left(\frac{n^2 + 3n - 6n + 2}{n^2 + 3n} \right)^{\sqrt{n - \sin n}} = \\ &= \left(1 + \frac{1}{\frac{n^2 + 3n}{-6n + 2}} \right)^{\sqrt{n - \sin n}} = \end{aligned}$$

(osserviamo che $\frac{n^2+3n}{-6n+2} = \frac{n^2}{n} \cdot \frac{1+\frac{3}{n}}{-6+\frac{2}{n}} \rightarrow -\infty$,

quindi possiamo utilizzare il limite notevole

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$= \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{n^2+3n}{-6n+2}}\right)^{\frac{n^2+3n}{-6n+2}} \right]^{\frac{-6n+2}{n^2+3n} \sqrt{n - \sin n}};$$

e questo punto otteniamo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n^2+3n}{-6n+2}}\right)^{\frac{n^2+3n}{-6n+2}} =$$

= m.c.c. composte
per mezzo delle m.c.c. di
 $\left\{\frac{n^2+3n}{-6n+2}\right\}$ e delle
funzione $\left(1 + \frac{1}{y}\right)^y$

$$= \lim_{y \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = e,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-6n+2}{n^2+3n} \cdot \sqrt{n - \sin n} =$$

4.1-8

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n \sqrt{n}}{n^2} \cdot \frac{-6 + \frac{2}{n}}{1 + \frac{3}{n}} \cdot \sqrt{1 - \frac{\sin n}{n}} \right) = 0$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 0 -6 1

$= n^{-\frac{1}{2}} \rightarrow 0$

quindi il limite cercato è uguale a
 $e^0 = 1$.

4.2

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{4^{x(x-\pi)} - 1}$$

Il dominio della funzione reale di variabile reale $\frac{\sin x}{4^{x(x-\pi)} - 1}$ è l'insieme

$$A = \{x \in \mathbb{R} : 4^{x(x-\pi)} - 1 \neq 0\} = \\ = \mathbb{R} \setminus \{0, \pi\},$$

quindi $\pi \in DA$ e la ricerca del limite ha senso.

Le funzioni $\sin x$ e $4^{x(x-\pi)} - 1$ sono continue in $\mathbb{R}$ (per quanto riguarda la $4^{x(x-\pi)} - 1$ osserviamo che essa è la funzione composta $(g \circ f)(x)$ per mezzo di

4.2 - 2

due funzioni : $f(x) = x(x-\pi)$ e $g(y) = 4^y - 1$,

le quali sono entrambe continue in tutto $\mathbb{R}$)

e pertanto, in particolare, si ha :

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \sin x = \sin \pi = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \pi} \left(4^{x(x-\pi)} - 1 \right) = 4^{\pi \cdot 0} - 1 = 0,$$

quindi il limite assegnato si presenta nella
forma indeterminata $\frac{0}{0}$.

Osserviamo che, per ogni $x \in A$, risulta :

$$\frac{\sin x}{4^{x(x-\pi)} - 1} =$$

(con il perseggi che seguono cerchiamo di

metterci in condizione di utilizzare dei

limiti noti)

4.2 - 3

$$= \frac{\sin(\pi - x)}{4^{x(x-\pi)} - 1} = \frac{\sin(\pi - x)}{\pi - x} \cdot \frac{\pi - x}{4^{x(x-\pi)} - 1} =$$

$$= -\frac{1}{x} \cdot \frac{\sin(\pi - x)}{\pi - x} \cdot \frac{x(x-\pi)}{4^{x(x-\pi)} - 1}.$$

Esendo :

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1}{x} = \frac{1}{\pi}$$

$$\text{e quindi} \quad \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1}{x} \Big|_A = \frac{1}{\pi}$$

(notiamo che il dominio di $\frac{1}{x}$ è $\mathbb{R} \setminus \{0\} \supsetneq A$) ;

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(\pi - x)}{\pi - x} \stackrel{(*)}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1$$

Γ (*) applichiamo il teorema sul limite delle funzione composte e $\frac{\sin(\pi - x)}{\pi - x} = (\sin) \circ (\pi - x)$,

dove $l(x) = \pi - x \quad \forall x \in \mathbb{R}$,

$$m(y) = \frac{\sin y}{y} \quad \forall y \in \mathbb{R} \setminus \{0\} ;$$

le ipotesi sono verificate, infatti:

$$\lim_{x \rightarrow \pi} l(x) = 0 ,$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi\} \Rightarrow \pi - x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \rfloor$$

$$\text{e quindi } \lim_{x \rightarrow \pi} \left. \frac{\sin(\pi - x)}{\pi - x} \right|_A = 1$$

(anche in questo caso il dominio di $\frac{\sin(\pi - x)}{\pi - x}$

è $\mathbb{R} \setminus \{\pi\}$, che è un insieme che contiene

propriamente A) ;

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{4^{x(x-\pi)} - 1}{x(x-\pi)} \stackrel{(*)}{=} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{4^z - 1}{z} = \log 4$$

$\overline{(*)}$ applichiamo il teorema sul limite

della funzione composta e $\frac{4^{x(x-\pi)} - 1}{x(x-\pi)} = (k \circ h)(x)$,

con $h(x) = x(x-\pi)|_A$ e $k(z) = \frac{4^z - 1}{z}$

$\forall z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; le ipotesi sono verificate in

quanto

$$\lim_{x \rightarrow \pi} x(x-\pi) = 0 \quad \left(\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pi} x(x-\pi)|_A = 0 \right),$$

$$\forall x \in A \setminus \{\pi\} (= A) \Rightarrow x(x-\pi) \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \underline{\quad};$$

per i termini nel limite del problema e

del rapporto possiamo concludere che :

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{4^{x(x-\pi)} - 1} = -\frac{1}{\pi} \cdot 1 \cdot \frac{1}{\log 4} =$$

$$= -\frac{1}{\pi \log 4}.$$

4.2 - 6

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + (-1)^n n^2 + \sqrt{n}}$$

Osserviamo che, essendo

$$2^n + (-1)^n n^2 + \sqrt{n} \geq 2^n - n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2^n - n^2) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \underbrace{\left(1 - \frac{n^2}{2^n}\right)}_{\substack{+ \infty \\ \text{(tenendo presente} \\ \text{1 il limite notevole}}}} = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n^p} = +\infty$$

$a > 1, p > 0$

per il teorema del confronto 2. che pure

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2^n + (-1)^n n^2 + \sqrt{n}) = +\infty,$$

quindi, *inoltre* definitivamente,

$$2^n + (-1)^n n^2 + \sqrt{n} \geq 0$$

ed è senz'altro calcolare la $\sqrt[n]{2^n + (-1)^n n^2 + \sqrt{n}}$.

Scrivendo il radicale sotto forma di potenza:

$$\sqrt[n]{2^n + (-1)^n n^2 + \sqrt{n}} = (2^n + (-1)^n n^2 + \sqrt{n})^{\frac{1}{n}},$$

vedremo che il limite è presente nelle forme indeterminate $(+\infty)^0$.

L'indeterminazione è dunque facilmente osservabile che è

$$2^n - n^2 + \sqrt{n} \leq 2^n + (-1)^n n^2 + \sqrt{n} \leq 2^n + n^2 + \sqrt{n}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}_0$$

e quindi, ovviamente (più precisamente:

per tutti i valori di $n \in \mathbb{N}_0$ per cui è $2^n - n^2 + \sqrt{n} \geq 0$),

$$\sqrt[n]{2^n - n^2 + n^{1/2}} \leq \sqrt[n]{2^n + (-1)^n n^2 + \sqrt{n}} \leq \sqrt[n]{2^n + n^2 + n^{1/2}}$$

$$2 \sqrt[n]{1 - \frac{n^2}{2^n} + \frac{n^{1/2}}{2^n}}$$

$$2 \sqrt[n]{1 + \frac{n^2}{2^n} + \frac{n^{1/2}}{2^n}}$$

Grezie al limite notevole per me ricordo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n^p} = +\infty \quad \forall a > 1, \forall p > 0,$$

abbiamo $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2^n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{1}{2}}}{2^n} = 0,$

quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 - \frac{n^2}{2^n} + \frac{n^{\frac{1}{2}}}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{n^2}{2^n} + \frac{n^{\frac{1}{2}}}{2^n}\right)^{\frac{1}{n}} = 1^0 = 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + \frac{n^2}{2^n} + \frac{n^{\frac{1}{2}}}{2^n}} = 1^0 = 1,$$

allora, per il teorema dei carabinieri,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + (-1)^n n^2 + \sqrt{n}} = 2.$$

4.3

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_2(1+x)}{\log_4(1+5x)}$$

L'insieme di definizione della funzione reale di variabile reale $\frac{\log_2(1+x)}{\log_4(1+5x)}$ è l'insieme delle soluzioni del sistema di disequazioni

$$\begin{cases} 1+x > 0 \\ 1+5x > 0 \\ 1+5x \neq 1 \end{cases}, \text{ cioè l'insieme}$$

$$A =]-\frac{1}{5}, +\infty[\setminus \{0\},$$

quindi (essendo $0 \in DA$) la ricerca del limite assegnato ha senso. Inoltre, dato che ognuna delle due funzioni $\log_2(1+x)$ e $\log_4(1+5x)$ è continua nel suo dominio (rispettivamente l'intervallo $] -1, +\infty[$ e l'intervallo $] -\frac{1}{5}, +\infty[$)

in quanto composizione di funzioni continue
(ed esempio $\log_2(1+x)$ è uguale alla composizione $(g \circ f)(x)$ delle due funzioni continue

$$f(x) = (1+x) \big|_{[-1, +\infty[} \quad \text{e} \quad g(y) = \log_2 y \quad ,$$

si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \log_2(1+x) = \log_2 1 = 0 \quad ,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \log_4(1+5x) = \log_4 1 = 0$$

e quindi il limite proposto è presente nelle
forme indeterminate $\frac{0}{0}$.

Per eliminare l'indeterminazione possiamo
utilizzare il limite notevole

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+t)}{t} = \log_a e$$

$$(a > 0, a \neq 1) \quad .$$

Potremo infatti scrivere, per ogni $x \in A$,

$$\begin{aligned} & \frac{\log_2(1+x)}{\log_4(1+5x)} = \\ &= \frac{\log_2(1+x)}{x} \cdot \frac{x}{5x} \cdot \frac{5x}{\log_4(1+5x)} = \\ &= \frac{1}{5} \frac{\frac{\log_2(1+x)}{x}}{\frac{\log_4(1+5x)}{5x}} \end{aligned}$$

e quindi, essendo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_2(1+x)}{x} = \log_2 e,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_4(1+5x)}{5x} \stackrel{(*)}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\log_4(1+y)}{y} = \log_4 e$$

(l'uguaglianza $(*)$ è giustificata mediante il
teorema sul limite delle funzioni composte ;

un'fctn $\frac{\log_4(1+5x)}{5x}$ e' la funzione composta

$(mol)(x)$, dove $l(x) = 5x|_A$, $m(y) = \frac{\log_4(1+y)}{y}$

(m e' definita in $C =]-1, +\infty[\setminus \{0\}$) e
 risulta $\lim_{x \rightarrow 0} l(x) = 0$, come facilmente si verifica nonch' ✓ ,

$$l(A \setminus \{0\}) = l(A) \subseteq C = C \setminus \{0\}$$

per i termini nel limite della funzione rapporto
 e della funzione prodotto, si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_2(1+x)}{\log_4(1+5x)} = \frac{1}{5} \frac{\log_2 e}{\log_4 e} =$$

$$= \frac{1}{5} \log_2 e \cdot \log_e 4 = \frac{1}{5} \log_2 4 = \frac{2}{5}$$

4.3-5

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{\left(1 + \frac{1}{2^n + 3^{-n}}\right)^4} - 1}{\sin \frac{3}{2^n}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\left(1 + \underbrace{\frac{1}{2^n + 3^{-n}}}_{\rightarrow +\infty}\right)^4} = \lim_{y \rightarrow 1} \sqrt[3]{y} = 1$$

↓
ter. nel limite delle funz. composte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\underbrace{\frac{3}{2^n}}_{\rightarrow 0}\right) = \lim_{y \rightarrow 0} \sin y = 0$$

↓
ter. nel limite delle funz. composte

per tanto il limite assegnato $\approx$ presente nelle

forme indeterminate $\frac{0}{0}$.

Scriviamo diversamente la successione data :

4.3 - 6

$$\frac{\sqrt[3]{\left(1 + \frac{1}{2^n + 3^{-n}}\right)^4} - 1}{\sin \frac{3}{2^n}}$$

notevoli

=
 ricordando i limiti
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^p - 1}{x} = p$,
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$$= \frac{\left(1 + \frac{1}{2^n + 3^{-n}}\right)^{\frac{4}{3}} - 1}{\frac{1}{2^n + 3^{-n}}} \cdot \frac{\frac{1}{2^n + 3^{-n}}}{\frac{3}{2^n}} \cdot \frac{\frac{3}{2^n}}{\sin \frac{3}{2^n}} ;$$

abbiamo

$$= \frac{1}{3} \frac{2^4}{2^n + 3^{-n}} = \frac{1}{3} \frac{2^n}{2^n} \frac{1}{1 + 6^{-n}} \rightarrow \frac{1}{3}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{2^n + 3^{-n}}\right)^{\frac{4}{3}} - 1}{\frac{1}{2^n + 3^{-n}}} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(1+y)^{\frac{4}{3}} - 1}{y} = \frac{4}{3}$$

ten. nel limite delle
funz. composte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{2^n}}{\sin \frac{3}{2^n}} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\sin y} = 1$$

ten. nel limite delle funz. composte

Pertanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{\left(1 + \frac{1}{2^n + 3^{-n}}\right)^4} - 1}{\sin \frac{3}{2^n}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{4}{9}$$

4.4

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin(2^x + 3^x)}{\sin(3^x + 4^x)}$$

Poiché

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2^x + 3^x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (3^x + 4^x) = 0$$

per il teorema sul limite delle funzioni composte si ha

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin(2^x + 3^x) = \lim_{y \rightarrow 0} \sin y = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin(3^x + 4^x) = \lim_{y \rightarrow 0} \sin y = 0$$

quindi il limite anzidetto si presenta nella
forma indeterminata $\frac{0}{0}$.

Possiamo però osservare, per ogni x

4.4 - 2

appertamente al dominio di $\frac{\sin(2^x+3^x)}{\sin(3^x+4^x)}$,

cioè all'insieme $A = \{x \in \mathbb{R} : \sin(3^x+4^x) \neq 0\}$,

$$\frac{\sin(2^x+3^x)}{\sin(3^x+4^x)} =$$

(avendo in mente il limite notevole $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1$)

$$= \frac{\sin(2^x+3^x)}{2^x+3^x} \cdot \frac{2^x+3^x}{3^x+4^x} \cdot \frac{3^x+4^x}{\sin(3^x+4^x)} ;$$

per il teorema sul limite della funzione

composta otteniamo

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin(2^x+3^x)}{2^x+3^x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1 ,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^x+4^x}{\sin(3^x+4^x)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\sin y} = 1 ;$$

4.4 - 3

Walter

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^x + 3^x}{3^x + 4^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2^x}{3^x} \right) \frac{1 + \left(\frac{3}{2}\right)^x}{1 + \left(\frac{4}{3}\right)^x} = +\infty ;$$

$\swarrow$
 $= \left(\frac{2}{3}\right)^x \rightarrow +\infty$

per cento

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin(2^x + 3^x)}{\sin(3^x + 4^x)} = +\infty$$

4.4 - 4

$$\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x}{3} \right)^{\frac{1}{3-x}}$$

Il dominio della funzione reale di variabile
 reale $\left(\frac{x}{3} \right)^{\frac{1}{3-x}}$ e' l'unione delle soluzioni
 del sistema di disequazioni $\begin{cases} \frac{x}{3} > 0 \\ 3-x \neq 0 \end{cases}$,
 cosi' l'unione $A =]0, +\infty[\setminus \{3\}$, quindi la
 ricerca del limite assegnato ha senso ($3 \in DA$).

Poiche' $\frac{x}{3}$ e $3-x$ sono funzioni continue
 in $\mathbb{R}$ e, in particolare, nel punto $x_0 = 3$,
 si ha

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x}{3} = \frac{3}{3} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} (3-x) = 0,$$

quindi

4.4 - 5

$$\lim_{x \rightarrow 3} \left| \frac{1}{3-x} \right| = +\infty$$

e, tenendo conto del segno di $3-x$:

$$3-x \quad \frac{+ + + + 0 - - -}{3},$$

$$\lim_{x \rightarrow 3-} \frac{1}{3-x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 3+} \frac{1}{3-x} = -\infty,$$

per tanto il limite assegnato è presente
nelle forme indeterminate 1^∞ (sia
per $x \rightarrow 3-$ che per $x \rightarrow 3+$).

Osserviamo che, per ogni $x \in A$, possiamo

scrivere

$$\begin{aligned} \left(\frac{x}{3} \right)^{\frac{1}{3-x}} &= \left(\frac{x-3+3}{3} \right)^{\frac{1}{3-x}} = \\ &= \left(1 + \frac{x-3}{3} \right)^{\frac{1}{3-x}} = \end{aligned}$$

(dato che $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{3} = 0$, possiamo metterci

nelle condizioni di utilizzare il limite notevole

$$\lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e$$

$$= \left[\left(1 + \frac{x-3}{3} \right)^{\frac{3}{x-3}} \right]^{\frac{x-3}{3} \cdot \frac{1}{3-x}} =$$

$$= \left[\left(1 + \frac{x-3}{3} \right)^{\frac{3}{x-3}} \right]^{-\frac{1}{3}}$$

A questo punto, per completare il calcolo del limite, osserviamo quanto segue:

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow 3} \left(1 + \frac{x-3}{3} \right)^{\frac{3}{x-3}} = \lim_{y \rightarrow 0} (1+y)^{\frac{1}{y}} = e$$

(infatti $\left(1 + \frac{x-3}{3} \right)^{\frac{3}{x-3}}$ è la funzione composta

$(g \circ f)(x)$, con $f(x) = \frac{x-3}{3} \Big|_A$, $g(y) = (1+y)^{\frac{1}{y}}$,

4.4 -7

$C = \text{dom } g =]-1, +\infty[\setminus \{0\}$, e si verificano

le ipotesi

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 0 ,$$

$$\forall x \in A \setminus \{3\} \Rightarrow \frac{x-3}{3} \in]-1, +\infty[\setminus \{0\}) ;$$

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow 3} \left[\left(1 + \frac{x-3}{3} \right)^{\frac{3}{x-3}} \right]^{-\frac{1}{3}} = \lim_{z \rightarrow e} z^{-\frac{1}{3}} = e^{-\frac{1}{3}}$$

(questa volta abbiamo applicato il teorema sul

limite della funzione composta alla funzione

$$\left[\left(1 + \frac{x-3}{3} \right)^{\frac{3}{x-3}} \right]^{-\frac{1}{3}} = (m \circ f)(x) ,$$

$$\text{con } f(x) = \left(1 + \frac{x-3}{3} \right)^{\frac{3}{x-3}} , \quad m(z) = z^{-\frac{1}{3}} ,$$

$\text{dom } m =]0, +\infty[$, dopo aver osservato

che $\lim_{x \rightarrow 3} l(x) = e$ e che, essendo la funzione $m(z) = z^{-\frac{1}{3}}$ continua nel punto $z_0 = e$, per potere applicare il teorema basta che ne verifichiamo l'ipotesi

$$\forall x \in A \setminus \{3\} (=A) \Rightarrow l(x) \in]0, +\infty[$$

invece dell'ipotesi più forte

$$\forall x \in A \setminus \{3\} \Rightarrow l(x) \in]0, +\infty[\setminus \{e\}.$$

In conclusione abbiamo :

$$\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x}{3} \right)^{\frac{1}{3-x}} = e^{-\frac{1}{3}}.$$

4.5 - 1

~~5.1~~

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(1 + \cos x)^7 - 1}{x - \frac{\pi}{2}}$$

4.5

Le funzioni $(1 + \cos x)^7 - 1$ e $x - \frac{\pi}{2}$ sono entrambe continue in tutto $\mathbb{R}$ e si annullano per $x = \frac{\pi}{2}$, la seconda solo per $x = \frac{\pi}{2}$, sicché la funzione rapporto è definita in $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$ (quindi la ricerca del limite ha senso) e il limite si presenta nelle forme indeterminate $\frac{0}{0}$.

Per il calcolo del limite possiamo limitarci a considerare la restrizione all'insieme

$$B = \{x \in \mathbb{R} : \cos x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$$

poché $B \ni]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\setminus \{0\}$ e quindi sono

verificare le ipotesi del teorema sui limiti delle "restinzioni lunghe". Per $x \in B$ abbiamo:

$$\frac{(1 + \cos x)^7 - 1}{x - \frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{(1 + \cos x)^7 - 1}{\cos x} \cdot \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} ;$$

Per il calcolo del $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(1 + \cos x)^7 - 1}{\cos x}$

osserviamo che $\frac{(1 + \cos x)^7 - 1}{\cos x} = g(f(x))$

con $f(x) = \cos x|_B$ e $g(y) = \frac{(1+y)^7 - 1}{y}$

e non verificare le ipotesi del teorema

sul limite delle funzione composta ;

quindi

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(1 + \cos x)^7 - 1}{\cos x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(1+y)^7 - 1}{y} = 7.$$

Calcoliamo adesso il $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} \Big|_B :$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} \Big|_B = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - x)}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[- \frac{\sin(x - \frac{\pi}{2})}{x - \frac{\pi}{2}} \right] =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \left[- \frac{\sin y}{y} \right] = -1.$$

✓ dato che $- \frac{\sin(x - \frac{\pi}{2})}{x - \frac{\pi}{2}} = g(f(x))$ con

$$f(x) = x - \frac{\pi}{2} \Big|_{\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2}\}}, \quad g(y) = - \frac{\sin y}{y} \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (x - \frac{\pi}{2}) = 0$$

Per tanto il limite cercato è uguale a -1 .

$$4.5 - 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 2^{-x}}{\sqrt{x}}$$

Le funzioni $2^x - 2^{-x}$ e $\sqrt{x}$ sono continue, in $\mathbb{R}$ e in $[0, +\infty[$, rispettivamente, e si annullano per $x=0$, anzi solo per $x=0$; pertanto la funzione $\frac{2^x - 2^{-x}}{\sqrt{x}}$ è definita in $]0, +\infty[$ (quindi la ricerca del limite ha senso) ed il limite si presenta nelle forme indeterminate $\frac{0}{0}$.

Per ogni $x \in]0, +\infty[$ si ha:

$$\frac{2^x - 2^{-x}}{\sqrt{x}} = \frac{2^x - 1 + 1 - 2^{-x}}{\sqrt{x}} =$$

(tenendo presente il limite notevole $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{2^t - 1}{t} = \log 2$)

4.5 - 6

$$= \frac{2^x - 1}{x} \cdot \frac{x}{\sqrt{x}} - \frac{2^{-x} - 1}{-x} \frac{-x}{\sqrt{x}} =$$

$$= \underbrace{\left(\frac{2^x - 1}{x} \right)}_{\downarrow \log 2} \cdot \underbrace{\frac{x}{\sqrt{x}}}_{\downarrow 0} + \underbrace{\left(\frac{2^{-x} - 1}{-x} \right)}_{\downarrow (*) \log 2} \cdot \underbrace{\frac{-x}{\sqrt{x}}}_{\downarrow 0}$$

(*) applicando il teorema sul limite delle funzione composte e

$$\frac{2^{-x} - 1}{-x} = y(f(x)), \text{ con } f(x) = -x$$

$$\text{e } y(y) = \frac{2^y - 1}{y}.$$

Pertanto $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 2^{-x}}{\sqrt{x}} = 0$

(4.6)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_5 (1 - 2^{-x^2})}{\log_3 (1 + 5^{-x})}$$

Il dominio della funzione $\log_5 (1 - 2^{-x^2})$ è l'insieme $\{x \in \mathbb{R} : 1 - 2^{-x^2} > 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
 il dominio di $\log_3 (1 + 5^{-x})$ è tutto $\mathbb{R}$;
 inoltre $\log_3 (1 + 5^{-x}) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$; pertanto
 il dominio di $\frac{\log_5 (1 - 2^{-x^2})}{\log_3 (1 + 5^{-x})}$ è $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e

le uerce del limite ha senso. Su che

inoltre :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - 2^{-x^2}) = \lim_{y \rightarrow -\infty} (1 - 2^y) = 1$$



per il teorema sul limite
 delle funzione composte,
 dato che $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^2) = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + 5^{-x}) = \lim_{y \rightarrow -\infty} (1 + 5^y) = 1$$

e quindi, per il teorema sul limite delle
funzione composte, tenendo presente che
la funzione $\log_a y$ ($a > 0, a \neq 1$) è
continua,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_5 (1 - 2^{-x^2}) = \lim_{y \rightarrow 1} \log_5 y = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_3 (1 + 5^{-x}) = \lim_{y \rightarrow 1} \log_3 y = 0,$$

per tanto il limite assegnato è presente nelle
forma indeterminata $\frac{0}{0}$.

Per risolvere l'indeterminazione cerchiamo
di utilizzare il limite notevole $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log_e(1+t)}{t} = \log_e e$.

Per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ si ha :

$$\frac{\log_5 (1 - 2^{-x^2})}{\log_3 (1 + 5^{-x})} =$$

$$= \frac{\log_5 (1 - 2^{-x^2})}{-2^{-x^2}} \cdot \frac{-2^{-x^2}}{5^{-x}} \cdot \frac{5^{-x}}{\log_3 (1 + 5^{-x})} ;$$

applicando il teorema sul limite delle
funzione composte otteniamo :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\log_5 (1 - 2^{-x^2})}{-2^{-x^2}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log_5 (1 + t)}{t} = \log_5 e ,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5^{-x}}{\log_3 (1 + 5^{-x})} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\log_3 (1 + t)} = \frac{1}{\log_3 e} ;$$

inoltre

4.6 - 4

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^{-x^2}}{5^{-x}} = \left[\frac{0}{0} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2^x)^{-x}}{5^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2^x}{5} \right)^{-x} =$$

┌ dato che $\frac{2^x}{5} \rightarrow 0$ e $-x \rightarrow +\infty$ ┘

~~$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{[\log(-x)] \cdot \frac{2^x}{5}}{1}}$$~~

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{(-x) \log \frac{2^x}{5}} = 0 ;$$

per tanto

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\log_5 (1 - 2^{-x^2})}{\log_3 (1 + 5^{-x})} = 0$$

4.6 - 5

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n}{(n+2)(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n})}$$

Il limite è presente nelle forme indeterminate $\frac{+\infty}{+\infty}$ (ricordiamo che la successione $\{H_n\} = \{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\}$ diverge a $+\infty$).

Le presento, contemporaneamente, dell'esponentiale 4^n e delle potenze $n+2$ suggerisce di tentare il criterio del rapporto (la successione data $\{a_n\} = \left\{ \frac{4^n}{(n+2)(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n})} \right\}$ è a termini positivi). E che:

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{4^{n+1}}{(n+3)(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1})} \cdot \frac{(n+2)(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n})}{4^n} = \\ &= 4 \cdot \frac{n+2}{n+3} \cdot \frac{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}}; \end{aligned}$$

4.6 - 5

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n+3} = 1 \quad (\text{polinomio dello stesso grado})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H_n}{H_n + \frac{1}{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H_n}{H_n} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{(n+1)H_n}} =$$

$$= 1 ;$$

per tanto $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q_{n+1}}{Q_n} = 4 > 1$,

quindi $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n = +\infty$.