3.1

a) Osserviamo che la formula ricorrente

$$(1) \qquad 3^{a_{n+1}} = 5 \cdot 2^{a_n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0 ,$$

che, insieme con la "condizione iniziale" $a_0 = 1$, definisce la successione $\{a_n\}$, si può scrivere, in maniera del tutto equivalente,

$$(2) \qquad a_{n+1} = \log_3 (5 \cdot 2^{a_n}) \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0 .$$

Dalle (2) segue subito che

$$a_1 = \log_3 (5 \cdot 2^{a_0}) = \log_3 10 > 1 = a_0 ,$$

quindi l'affermazione "$a_n < a_{n+1}$" è vera per $n = 0$. Osserviamo inoltre che la funzione reale di variabile reale $\log_3 (5 \cdot 2^x)$, che figure al secondo membro delle (2), è crescente in $\mathbb{R}$ (infatti $x_1 < x_2 \Rightarrow 2^{x_1} < 2^{x_2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 5 \cdot 2^{x_1} < 5 \cdot 2^{x_2} \Rightarrow \log_3(5 \cdot 2^{x_1}) < \log_3(5 \cdot 2^{x_2})$),

quindi è vera l'implicazione

$$n \in \mathbb{N}_0, \quad a_n < a_{n+1} \Rightarrow a_{n+1} < a_{n+2} \quad .$$

Per l'assioma di induzione possiamo allora concludere che è

$$a_n < a_{n+1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0 ,$$

cosí la successione $\{a_n\}$ è crescente.

Per decidere se la successione $\{a_n\}$ è convergente o divergente cerchiamo di stabilire, come prima cosa, quali sono i numeri reali l che, stante la formula ricorrente (1), possono essere il limite della successione $\{a_n\}$. Ciò si ottiene con il seguente ragionamento: se supponiamo che $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R}$, allora si ha pure $a_{n+1} \to \ell$ (teorema sulle successioni estratte), quindi

$$3^{a_{n+1}} \to 3^{\ell} \quad , \quad 2^{a_n} \to 2^{\ell}$$

(per la continuità delle funzioni 3^x e 2^x) e dunque, passando al limite per $n\to\infty$ nella (1),

$$(3) \qquad 3^{\ell} = 5 \cdot 2^{\ell} \quad ,$$

cioè

$$\ell = \log_{\frac{3}{2}} 5 \quad .$$

Pertanto l'unico numero reale ℓ che può essere il limite della successione $\{a_n\}$ è $\ell = \log_{\frac{3}{2}} 5$.

Rimane da decidere se tale numero ~~è~~ sia effettivamente o meno

il limite della successione $\{a_n\}$. Dal teorema sul limite di una successione monotona si deduce facilmente che la risposta alla precedente domanda è affermativa se e soltanto se $\log_{\frac{3}{2}} 5$ è un maggiorante della successione $\{a_n\}$.

Osserviamo che

$$a_0 = 1 < \log_{\frac{3}{2}} 5 \quad ;$$

inoltre, posto $l = \log_{\frac{3}{2}} 5$, si ha:

$$a_n < l \implies \log_3 (5 \cdot 2^{a_n}) < \log_3 (5 \cdot 2^{l})$$

$$\iff a_{n+1} < l$$

(infatti dalla (3) si riceve che $l = \log_3 (5 \cdot 2^{l})$);

(per l'assioma di induzione)

pertanto $a_n < l \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$, e quindi

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \log_{\frac{3}{2}} 5 .$$

b) La formula ricorrente

(4) $$3^{b_n} = 5 \cdot 2^{b_{n+1}} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

si può scrivere

(5) $$b_{n+1} = \log_2 \frac{3^{b_n}}{5} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 .$$

Dalla (5) si ricava che è

$$b_1 = \log_2 \frac{3}{5} < 1 = b_0$$

e inoltre, dato che la funzione $\log_2 \frac{3^x}{5}$ è crescente in $\mathbb{R}$, che vale l'implicazione:

$$n \in \mathbb{N}_0,\ b_n > b_{n+1} \quad \Rightarrow \quad b_{n+1} > b_{n+2} .$$

Pertanto la successione $\{b_n\}$ è decrescente.

Se si suppone che $\lim_{n\to\infty} b_n = l \in \mathbb{R}$, allora, passando al limite per $n \to \infty$ nella (4), si ottiene che vale la (3), quindi, anche in questo caso, l'unico numero che può essere il limite della successione $\{b_n\}$ è $l = \log_{\frac{3}{2}} 5$.

Ma tale numero non è un minorante della successione $\{b_n\}$ (infatti $\log_{\frac{3}{2}} 5 > 1 = b_0$), quindi $\{b_n\}$ non converge, dunque si ha

$$\lim_{n \to \infty} b_n = -\infty .$$

3.2

a) Dalla definizione della successione $\{b_n\}$ si ha:

$$b_{2n} = a_{2n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0 ,$$

$$b_{2n+1} = \frac{4a_{2n+1} + a_{(2n+1)^2-1}}{5} =$$

$$= \frac{4a_{2n+1} + a_{4n^2+4n}}{5} \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0 .$$

1) Se $\{a_n\}$ è convergente, $\lim_{n\to\infty} a_n = l$, allora, per il teorema sul limite di una successione estratta, si ha pure:

$$a_{2n} \to l , \quad a_{2n+1} \to l , \quad a_{4n^2+4n} \to l ,$$

quindi

$$\lim_{n\to\infty} b_{2n} = \lim_{n\to\infty} a_{2n} = l ,$$

$$\lim_{n\to\infty} b_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{4\,a_{2n+1} + a_{4n^2+4n}}{5} =$$

$$= \frac{4\ell + \ell}{5} = \ell \,.$$

Essendo $\lim_{n\to\infty} b_{2n} = \lim_{n\to\infty} b_{2n+1} = \ell$, si ha pure $\lim_{n\to\infty} b_n = \ell$ (per questa ~~…~~ dimostrazione vedi a pag. 3.6 - 7), abbiamo così provato che $\boxed{\{a_n\} \text{ convergente} \Rightarrow \{b_n\} \text{ convergente.}}$

2) Supponiamo che $\{b_n\}$ sia convergente, $\lim_{n\to\infty} b_n = \ell$. Allora, tenendo presente la definizione di $\{b_n\}$ e il teorema sulle successioni estratte, si ha

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} b_{2n} = \ell \,;$$

inoltre, essendo, per ogni $n \in \mathbb{N}_0$,

$$b_{2n+1} = \frac{4a_{2n+1} + a_{4n^2+4n}}{5} =$$

$$= \frac{4a_{2n+1} + b_{4n^2+4n}}{5},$$

si ha (ricavando a_{2n+1} dalla precedente uguaglianza)

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{5b_{2n+1} - b_{4n^2+4n}}{4} =$$

$$= \frac{5l - l}{4} = l.$$

Abbiamo così provato che è

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = l,$$

pertanto è pure $\lim_{n\to\infty} a_n = l$, dunque

$$\boxed{\{b_n\} \text{ convergente} \Rightarrow \{a_n\} \text{ convergente.}}$$

3) Se $\{\overset{a_n}{\cancel{b_n}}\}$ è divergente a $+\infty$, allora

$$\lim_{n\to\infty} b_{2n} = \lim_{n\to\infty} a_{2n} = +\infty ,$$

$$\lim_{n\to\infty} b_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{4a_{2n+1} + a_{4n^2+4n}}{5} = +\infty$$

e quindi $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$ (il ragionamento è del tutto analogo a quello svolto per la convergente a pag. 3.6 - 7).

Analogamente si ha

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = -\infty .$$

In conclusione, ricordando quello che si è già provato in 1), si ha:

$$\boxed{\{a_n\} \text{ regolare} \Rightarrow \{b_n\} \text{ regolare}.}$$

4) Rivedendo le considerazioni svolte in 3) si capisce che, al fine di garantire che risulti $b_{2n} \to +\infty$, $b_{2n+1} \to +\infty$, e quindi $b_n \to +\infty$, è sufficiente che $a_{2n} \to +\infty$ e $\{a_{2n+1}\}$ sia limitata inferiormente. Pertanto $b_n \to +\infty$ può verificarsi anche se $\{a_n\}$ non è regolare; ciò accade, ad esempio, nel caso della seguente successione:

$$a_n = \begin{cases} n & \text{se } n \in \{2k : k \in \mathbb{N}_0\} \\ 0 & \text{se } n \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N}_0\} \end{cases}.$$

In conclusione:

$$\boxed{\{b_n\} \text{ regolare } \not\Rightarrow \{a_n\} \text{ regolare.}}$$

b) La definizione di $\{c_n\}$ è :

$$c_{2n} = a_{2n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0 ,$$

$$c_{2n+1} = \frac{(2n+1)\, a_{2n+1} + \operatorname{sen} a_{4n^2+4n}}{2n+2} =$$

$$= \frac{2n+1}{2n+2}\, a_{2n+1} + \frac{1}{2n+2} \operatorname{sen} a_{4n^2+4n}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 .$$

Notiamo che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2n+2} = 1 ,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+2} \operatorname{sen} a_{4n^2+4n} = 0$$

(infinitesima × limitata) qualunque sia la successione $\{a_n\}$. Ne segue che, se esiste il $\lim_{n\to\infty} a_n = L \in \overline{\mathbb{R}}$, allora si ha pure:

$$\lim_{n\to\infty} c_{2n} = L \quad , \quad \lim_{n\to\infty} c_{2n+1} = L \; ,$$

quindi $\lim_{n\to\infty} c_n = L$. Pertanto <u>le implicazioni 1) e 3) sono vere</u>.

D'altra parte possiamo riscrivere la definizione di $\{c_{n+1}\}$ risolvendola rispetto a a_{2n+1}

$$a_{2n+1} = \underbrace{\frac{2n+2}{2n+1}}_{\to\, 1} \left[c_{2n+1} - \underbrace{\frac{1}{2n+2}\, \text{sen}\, a_{4n^2+4n}}_{\to\, 0} \right]$$

VNGINO.

Pertanto, se $\lim_{n\to\infty} c_n = L \in \overline{\mathbb{R}}$, allora si ha pure:

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = L \quad , \quad \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = L$$

e quindi $\lim_{n\to\infty} a_n = L$. Dunque anche <u>le implicazioni 2) e 4) sono vere</u>.

3.3

Osserviamo, come prima cosa, che il dominio della successione $\{a_n\}$ è tutto $\mathbb{N}_0$; infatti si ha

$$\sqrt{n^2+n+1}-(n-1) > \sqrt{n^2}-(n-1) = 1 > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 .$$

Poiché la funzione reale di variabile reale $\log_{\frac{1}{3}} x$ è decrescente nel suo dominio, le proprietà di monotonia della successione $\{a_n\}$ si deducono da quelle della successione $\{b_n\} =$
$= \{\sqrt{n^2+n+1}-(n-1)\}$.

Per ogni $n \in \mathbb{N}_0$ si ha

$$b_n \leq b_{n+1} \iff \sqrt{n^2+n+1}-(n-1) \leq$$
$$\leq \sqrt{n^2+3n+2}-n \iff \sqrt{n^2+n+1}+1 \leq \sqrt{n^2+3n+2} \iff$$
$$\iff \cancel{n^2}+n+\underset{\sim}{1}+2\sqrt{n^2+n+1}+\underset{\sim}{1} \leq \cancel{n^2}+3n+\underset{\sim}{2} \iff$$

$$\iff 2\sqrt{n^2+n+1} \leq 2n \iff$$

$$\iff \sqrt{n^2+n+1} \leq n \iff n^2+n+1 \leq n^2 \iff n+1 \leq 0$$

e quindi, dato che l'ultima disuguaglianza della precedente catena non è mai verificata, possiamo concludere che è

$$b_n > b_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0,$$

così $\{b_n\}$ è decrescente, pertanto $\{a_n\}$ è crescente.

Per trovare il limite di $\{a_n\}$ calcoliamo dapprima il

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n+1} - (n-1)\right).$$

Questo si presenta nella forma indeterminata $(+\infty) - (+\infty)$. Per eliminare la forma indeterminate procediamo come segue:

$$\sqrt{n^2+n+1} - (n-1) \underset{\text{se } n \geq 1}{=} \frac{\left[\sqrt{n^2+n+1}-(n-1)\right]\left[\sqrt{n^2+n+1}+(n-1)\right]}{\sqrt{n^2+n+1}+n-1} =$$

$$= \frac{n^2+n+1-(n^2-2n+1)}{\sqrt{n^2+n+1}+n-1} = \frac{3n}{\sqrt{n^2+n+1}+n-1} =$$

$$= \frac{3}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1-\frac{1}{n}} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

e quindi, essendo $\frac{1}{n} \to 0$, $\frac{1}{n^2} \to 0$, per la continuità della funzione $\sqrt{x}$ ed i teoremi sulle operazioni aritmetiche ~~sui~~ e limite, si ha

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{3}{\sqrt{1}+1} = \frac{3}{2},$$

da cui si deduce, per la continuità della funzione $\log_{\frac{1}{3}} x$,

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \log_{\frac{1}{3}} b_n = \log_{\frac{1}{3}} \frac{3}{2} .$$

Infine, ricordando il teorema sul limite delle successioni monotone, si ha:

$$\inf_{n\in\mathbb{N}_0} a_n = a_0 = \log_{\frac{1}{3}} 2 = \min_{n\in\mathbb{N}_0} a_n ,$$

$$\sup_{n\in\mathbb{N}_0} a_n = \lim_{n\to+\infty} a_n = \log_{\frac{1}{3}} \frac{3}{2}$$

e, dato che la successione è $\underbrace{\text{crescente}}_{}$ (in senso stretto), l'estremo superiore non è massimo.

3.4

Entrambe le successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono definite in tutto $\mathbb{N}_0$.

Per studiare la monotonia di $\{a_n\}$ risolveremo la disequazione nell'incognita $n \in \mathbb{N}_0$:

$$a_n \leq a_{n+1} .$$

Si ha:

$$a_n \leq a_{n+1} \iff \frac{3n\pi}{n^2+1} \leq \frac{3(n+1)\pi}{(n+1)^2+1} \iff$$

$$\iff \frac{n}{n^2+1} \leq \frac{n+1}{n^2+2n+2} \iff$$

(osserviamo che moltiplicando entrambi i membri della precedente disequazione per $(n^2+1)(n^2+2n+2)$ si ottiene una disequazione equivalente, dato che $(n^2+1)(n^2+2n+2)>0 \ \forall n \in \mathbb{N}_0$)

$$\iff n^3+2n^2+2n \leq n^3+n^2+n+1 \iff n^2+n \leq 1$$

e, dato che l'ultima disequazione della catena è verificata (con il segno <) solo per $n=0$, concludiamo che è:

$$a_0 < a_1 \quad ; \quad a_n > a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

dunque <u>$\{a_n\}$ è definitivamente decrescente</u> $(n \geq 1)$.

Il limite di $\{a_n\}$ si calcola facilmente, dato che $\{a_n\}$ è del tipo $\left\{\frac{P(n)}{Q(n)}\right\}$, ($P$, Q polinomi nella variabile n):

$$a_n = \frac{3n\pi}{n^2+1} \underset{\text{se } n \geq 1}{=} \underbrace{\left(\frac{n}{n^2}\right)}_{\to 0} \underbrace{\left(\frac{3\pi}{1+\frac{1}{n^2}}\right)}_{\to 3\pi} \to 0,$$

quindi $\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = 0}$.

Grazie alla continuità della funzione sen x si ha pure

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \operatorname{sen} a_n = \operatorname{sen} 0 = 0} .$$

Per studiare la monotonia della successione $\{b_n\} = \{\operatorname{sen} a_n\}$ osserviamo che, essendo $a_n > a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_1 = \frac{3\pi}{2}$, e $\inf_{n\in\mathbb{N}} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n = 0$, si ha

$$0 < a_n \leq \frac{3\pi}{2} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

ed esiste inoltre un unico indice $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$a_n \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right] \quad \forall n \geq \bar{n} \quad ,$$

$$a_n \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \quad \forall n = 1, \dots, \bar{n}-1$$

($\bar{n}$ è il minimo dell'insieme

$$\left\{n \in \mathbb{N} : a_n \leq \frac{\pi}{2}\right\} \quad) \quad ;$$

di conseguenza, dato che la funzione sen x è crescente nell'intervallo $[0, \frac{\pi}{2}]$ e decrescente in $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, si ha

$$b_n > b_{n+1} > 0 \qquad \forall n \geq \bar{n} \qquad ,$$

$$b_1 < b_2 < \dots < b_{\bar{n}-1} \qquad .$$

Si ha inoltre, ovviamente,

$$b_0 = 0 > -1 = b_1$$

e, con ciò, lo studio della monotonia di $\{b_n\}$ è completo. Da tale studio segue che la successione $\{b_n\}$ è dotata di minimo:

$$\boxed{\min_{n \in \mathbb{N}_0} b_n = b_1 = -1}$$

e di massimo:

$$\max_{n\in\mathbb{N}_0} b_n = \max\{b_{\bar{n}-1}, b_{\bar{n}}\}.$$

Per completare l'esercizio occorre quindi trovare l'indice $\bar{n}$ e confrontare $b_{\bar{n}-1}$ e $b_{\bar{n}}$.

Per trovare $\bar{n}$ risolviamo la disequazione nell'incognita $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n \leq \frac{\pi}{2}.$$

Si ha

$$a_n \leq \frac{\pi}{2} \iff \frac{3n\pi}{n^2+1} \leq \frac{\pi}{2} \iff$$

$$\iff 6n \leq n^2+1 \iff n^2-6n+1 \geq 0$$

e quindi, dato che il segno del trinomio t^2-6t+1 è

$$\begin{array}{ccccc} +++ & 0 & ------- & 0 & +++ \\ \hline & t_1 & & t_2 & \end{array} \quad ,$$

essendo $t_1 = 3 - \sqrt{8}$, $t_2 = 3 + \sqrt{8}$,

e che $0 < t_1 < 1$, $5 < t_2 < 6$,

concluderemo che, per $n \in \mathbb{N}$, si ha

$$a_n \leq \frac{\pi}{2} \iff n \geq 6 \, ,$$

dunque $\bar{n} = 6$.

Confronteremo infine b_5 e b_6. Osserviamo che

$$a_5 = \frac{15}{26}\pi \qquad e \qquad a_6 = \frac{18}{37}\pi$$

sono le misure in radianti di due archi (delle circonferenze trigonometrica) aventi il secondo estremo, rispettivamente, nel secondo e nel primo quadrante. Possiamo però ricondurre anche il calcolo di $\operatorname{sen} a_5$ al primo quadrante; infatti:

$$\operatorname{sen} a_5 = \operatorname{sen}(\pi - a_5) = \operatorname{sen}\left(\pi - \frac{15}{26}\pi\right) =$$

$$= \operatorname{sen} \frac{11}{26}\pi \quad .$$

A questo punto, dato che $\operatorname{sen} x$ è crescente in $[0, \frac{\pi}{2}]$, basta confrontare $\frac{11}{26}\pi$ con $\frac{18}{37}\pi$.

Si ha

$$11 \cdot 37 = 370 + 37 = 407$$

$$18 \cdot 26 = (20-2)26 = 520 - 52 = 468 \, ,$$

quindi $\frac{11}{26} < \frac{18}{37}$ e $b_5 < b_6$.

Pertanto

$$\boxed{\max_{n \in \mathbb{N}_0} b_n = \operatorname{sen} \frac{18}{37}\pi = b_6 \, .}$$

3.5

Poiché la funzione $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ è decrescente in $\mathbb{R}$, per studiare la monotonia della successione $\{a_n\}$ è sufficiente studiare la monotonia di

$$\{b_n\} = \left\{ \frac{(n+1)!}{5^{n+2}\,(n+5)} \right\}.$$

La $\{b_n\}$ è a termini positivi.

Per la presenza del fattoriale e dell'esponenziale conviene studiare la monotonia di $\{b_n\}$ confrontando il rapporto $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ con 1.

Si ha, per ogni $n \in \mathbb{N}_0$,

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(n+2)!}{5^{n+3}(n+6)} \cdot \frac{5^{n+2}(n+5)}{(n+1)!} =$$

$$= \frac{(n+2)(n+5)}{5(n+6)} ,$$

pertanto

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} \leq 1 \iff \frac{(n+2)(n+5)}{5(n+6)} \leq 1 \iff$$

$$\iff (n+2)(n+5) \leq 5(n+6) \iff$$

$$\iff n^2+7n+10 \leq 5n+30 \iff$$

$$\iff n^2+2n-20 \leq 0 \iff$$

$$t^2+2t-20=0 \qquad t=-1\pm\sqrt{21}$$

$$-1-\sqrt{21}<0 \quad , \quad 3=-1+4<-1+\sqrt{21}<-1+5=4$$

$$\iff 0 \leq n \leq 3 \quad ;$$

inoltre, per tali valori di n, le disuguaglianze

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} \leq 1$$

è verificata con il segno <.

Pertanto

$$b_0 > b_1 > b_2 > b_3 > b_4 \quad ; \quad b_n < b_{n+1} \quad \forall n \geq 4$$

e quindi

$$a_0 < a_1 < a_2 < a_3 < a_4 \quad ; \quad a_n > a_{n+1} \quad \forall n \geq 4 .$$

Osserviamo adesso che è

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)(n+5)}{5(n+6)} = +\infty$$

e quindi, per il criterio del rapporto, si ha

$$\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty .$$

Di conseguente, essendo $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$, si ha

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{b_n} = 0 .$$

In conclusione abbiamo:

$$\max_{n\in\mathbb{N}_0} a_n = a_4 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5!}{5^6\cdot 5}},$$

$$\inf_{n\in\mathbb{N}_0} a_n = 0 \quad (\text{non è minimo}).$$

3.6

a) Osserviamo che per i primi termini della successione si ha:

$$a_1 = \frac{1}{3+a_0}, \quad a_2 = \frac{1}{3+a_1}, \quad a_3 = \frac{1}{3+a_2}, \quad a_4 = \frac{1}{3+a_3},$$

pertanto la legge della successione $\{a_n\}$ si può scrivere, usando il principio della definizione per induzione, come segue:

(1) $$a_0 = \frac{1}{3},$$

(2) $$a_{n+1} = \frac{1}{3+a_n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0 .$$

Osserviamo ancora che, essendo $a_0 \in]0,+\infty[$ ed avendosi, per la funzione $\varphi(x) = \frac{1}{3+x}$,

$$\varphi(]0,+\infty[) \subseteq]0,+\infty[$$

(sicché la restrizione di φ a $]0,+\infty[$ può considerarsi come una funzione da $]0,+\infty[$ in

$]0,+\infty[$), la successione $\{a_n\}$ definita per induzione dalle (1) e (2) è a valori in $]0,+\infty[$.

b) Osserviamo che la funzione $\varphi|_{]0,+\infty[}$ è decrescente (infatti: $0 < x_1 < x_2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 0 < 3+x_1 < 3+x_2 \Rightarrow \dfrac{1}{3+x_1} > \dfrac{1}{3+x_2}$).

Si ha inoltre $a_0 > a_2$ (facile verifica).

A questo punto è facile dimostrare per induzione che la successione $\{a_{2n}\}$ è decrescente, cioè si ha

$$(3) \qquad a_{2n} > a_{2n+2} \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0 .$$

Infatti la $\underbrace{\cdot}_{\text{disuguaglianza } a_{2n} > a_{2n+2}}$ è vera per $n = 0$;

inoltre, per ogni $n \in \mathbb{N}_0$, valgono le implicazione:

$$a_{2n} > a_{2n+2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi(a_{2n}) < \varphi(a_{2n+2}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_{2n+1} < a_{2n+3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi(a_{2n+1}) > \varphi(a_{2n+3}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_{2n+2} > a_{2n+4} ,$$

quindi la proposizione " $a_{2n} > a_{2n+2}$ " e' induttiva. Pertanto vale la (3).

Osserviamo adesso che da $a_0 > a_2$ segue $\varphi(a_0) < \varphi(a_2)$ cioe' $a_1 < a_3$. Da cio' si ricava, ~~che~~ ragionando così come si e' fatto per la $\{a_{2n}\}$, che la successione $\{a_{2n+1}\}$ e' crescente.

c) La successione $\{a_{2n}\}$ è decrescente ed i suoi termini sono tutti positivi. Per il teorema sul limite delle successioni monotone la $\{a_{2n}\}$ è convergente ed il suo limite l è un numero non negativo (per il teorema del passaggio al limite delle disuguaglianze). Inoltre anche $a_{2n+2} \to l$ (per il teorema sulle successioni estratte; infatti $\{a_{2n+2}\} = \{a_{2(n+1)}\}$ è un'estratta di $\{a_{2n}\}$). Si ha inoltre:

$$a_{2n+2} = \varphi(\varphi(a_{2n})) \quad \forall n \in \mathbb{N}_0,$$

Così

$$a_{2n+2} = \frac{1}{3+\frac{1}{3+a_{2n}}} \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0,$$

da cui, passando al limite per $n \to \infty$, si ottiene:

$$\ell = \frac{1}{3+\frac{1}{3+\ell}},$$

$$\ell\left(3+\frac{1}{3+\ell}\right) = 1,$$

$$\ell\,(10+3\ell) = 3+\ell,$$

$$3\ell^2+9\ell-3 = 0,$$

$$\ell^2+3\ell-1 = 0.$$

Risolvendo l'equazione $t^2+3t-1 = 0$

si trova $t = \frac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$, pertanto (scartando la radice negativa $\frac{-3-\sqrt{13}}{2}$) si ha

$$\ell = \frac{\sqrt{13}-3}{2}.$$

Consideriamo adesso la successione $\{a_{2n+1}\}$.

Poiché

$$a_{2n+1} = \frac{1}{3+a_{2n}} \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0,$$

per i teoremi sui limiti ed operazioni aritmetiche si ha

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = \frac{1}{3+\ell} =$$

$$= \frac{1}{3+\frac{\sqrt{13}-3}{2}} = \frac{1}{\frac{3+\sqrt{13}}{2}} =$$

$$= \frac{2(\sqrt{13}-3)}{(\sqrt{13}+3)(\sqrt{13}-3)} = \frac{\sqrt{13}-3}{2} = \ell .$$

Dal fatto che entrambe le successioni $\{a_{2n}\}$ e $\{a_{2n+1}\}$ convergono allo stesso numero l si ricava facilmente che anche l'intera successione $\{a_n\}$ converge a l. Infatti le due relazioni di limite

$$\lim_{n \to \infty} a_{2n} = l \qquad e \qquad \lim_{n \to \infty} a_{2n+1} = l$$

si possono scrivere, rispettivamente:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n}_1 \in \mathbb{N}_0 \; : \; \forall n \in \mathbb{N}_0, \; n \geq \bar{n}_1, \; n \text{ pari} \implies |a_n - l| < \varepsilon ,$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n}_2 \in \mathbb{N}_0 \; : \; \forall n \in \mathbb{N}_0, \; n \geq \bar{n}_2, \; n \text{ dispari} \implies |a_n - l| < \varepsilon ,$$

da cui, prendendo $\bar{n} = \max\{\bar{n}_1, \bar{n}_2\}$, si ottiene

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \bar{n} \in \mathbb{N}_0 \; : \; \forall n \in \mathbb{N}_0, \; n \geq \bar{n} \implies |a_n - l| < \varepsilon .$$

3.7

a) Dato che $\{(1+\frac{1}{n})^{n+1}\}$ è decrescente, la stessa cosa può dirsi di ogni sua successione estratta; in particolare abbiamo che $\{(1+\frac{1}{2n})^{2n+1}\}$ è decrescente.

Scriviamo diversamente il termine generale della successione $\{(1+\frac{1}{2n})^{n+1}\}$:

$$\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n+1} = \sqrt{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2(n+1)}} =$$

$$= \sqrt{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n+1}\left(1+\frac{1}{2n}\right)} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Il radicando è il prodotto dei termini generali due successioni:

(1) $\{(1+\frac{1}{2n})^{n+1}\}$ e $\{1+\frac{1}{2n}\}$,

entrambe a termini positivi e decrescenti (per la $\{(1+\frac{1}{2n})^{2n+1}\}$ lo abbiamo osservato prima, per la $\{1+\frac{1}{2n}\}$ si tratta di una facile verifica); quindi anche la successione prodotto

$$\left\{ \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n+1} \cdot \left(1+\frac{1}{2n}\right) \right\}$$

e' decrescente (basta moltiplicare membro a membro le disuguaglianze che esprimono la decrescenza delle successioni (1)).

Poiche' $\sqrt{x}$ e' una funzione crescente, anche la successione

$$\left\{ \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n+1} \right\} = \left\{ \sqrt{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n+1}\left(1+\frac{1}{2n}\right)} \right\}$$

e' decrescente.

Il limite di $\{(1+\frac{1}{2n})^{n+1}\}$ si trova facilmente nel seguente modo:

$$\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{2n}\right) =$$

$$= \sqrt{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}} \cdot \underbrace{\left(1+\frac{1}{2n}\right)}_{\to 1} \longrightarrow \sqrt{e}$$

e (successione estratta da $\{(1+\frac{1}{n})^n\}$)

b) Da quanto detto in a) si ha che la successione estratta $\{b_{2n+1}\} = \{a_{2n+1}\}$ e' decrescente e converge a $\sqrt{e}$. Pertanto:

$$\max_{n\in\mathbb{N}_0} b_{2n+1} = b_1 = a_1 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4};$$

$$\inf_{n\in\mathbb{N}_0} b_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} b_{2n+1} = \sqrt{e};$$

inoltre $\quad b_{2n+1} > \sqrt{e} \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0$.

Studiamo l'estratta $\{b_{2n}\}$. Poiché possiamo scrivere

$$b_{2n} = c_{2n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0,$$

avendo posto

$$c_n = \sqrt{\frac{3n+5}{n+1}} \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0,$$

studiamo dapprima la $\{c_n\}$.

Per quanto riguarda ~~la~~ la monotonia si ha, per ogni $n \in \mathbb{N}_0$,

$$c_n \leq c_{n+1} \iff \frac{3n+5}{n+1} \leq \frac{3n+8}{n+2} \iff$$
$$\iff (3n+5)(n+2) \leq (3n+8)(n+1) \iff$$
$$\iff 3n^2 + 11n + 10 \leq 3n^2 + 11n + 8$$
$$\iff 10 \leq 8,$$

pertanto $c_n \leq c_{n+1}$ è falsa $\forall n \in \mathbb{N}_0$,

dunque $c_n > c_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}_0$. Pertanto

$\{c_n\}$, e quindi anche $\{b_{2n}\} = \{c_{2n}\}$,

è decrescente. Inoltre essendo

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{3n+5}{n+1}} = \sqrt{3},$$

continuità di $\sqrt{x}$

3 (rapporto di polinomi di uguale grado)

si ha pure $\lim_{n\to\infty} b_{2n} = \sqrt{3}$. Allora per

l'estratta $\{b_{2n}\}$ abbiamo:

$$\max_{n \in \mathbb{N}_0} b_{2n} = b_0 = \sqrt{5},$$

$$\inf_{n \in \mathbb{N}_0} b_{2n} = \lim_{n\to\infty} b_{2n} = \sqrt{3}$$

e l'inf non è minimo.

Da quanto trovato per le due successioni estratte $\{b_{2n}\}$ e $\{b_{2n+1}\}$ si ricava che

$$\max_{n \in \mathbb{N}_0} b_n = \max \left\{ \sqrt{5}, \frac{9}{4} \right\} \overset{(*)}{=} \frac{9}{4}$$

$$\inf_{n \in \mathbb{N}_0} b_n = \min \left\{ \sqrt{3}, \sqrt{e} \right\} = \sqrt{e}$$

(*)

$\sqrt{5}$ $\quad \frac{9}{4}$

$4\sqrt{5}$ $\quad 9$

$16 \cdot 5$ $\quad 81$

$80 < 81$

pertanto

$\sqrt{5} < \frac{9}{4}$

è facile verificare che il numero $\sqrt{e} = \min\{\sqrt{3}, \sqrt{e}\}$ ha le due proprietà caratteristiche dell'estremo inferiore:

1) $b_n \geq \sqrt{e} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$

2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} \in \mathbb{N}_0 : \quad b_{\bar{n}} < \sqrt{e} + \varepsilon$

Inoltre $\sqrt{e}$ non è minimo perché $b_n > \sqrt{e}$ $\forall n \in \mathbb{N}_0$.

3.8

a) Supponiamo che $\{a_n\}$ sia convergente:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = l ,$$

cioè

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} \in \mathbb{N}_0 : \ l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon \quad \forall n \geq \bar{n} ;$$

allora, per ogni $n \in \mathbb{N}_0$, $n \geq \bar{n}$, si ha:

$$l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon ,$$

$$l - \varepsilon < a_{n+1} < l + \varepsilon ,$$

$$l - \varepsilon < a_{n+2} < l + \varepsilon ,$$

- - - - - - - - - - -

$$l - \varepsilon < a_{2n} < l + \varepsilon ,$$

quindi anche i numeri

$$m_n = \min \{a_n, a_{n+1}, \dots, a_{2n}\} ,$$

$$M_n = \max \{a_n, a_{n+1}, \dots, a_{2n}\}$$

verificano le disuguaglianze

$$l-\varepsilon < m_n < l+\varepsilon \quad , \qquad l-\varepsilon < M_n < l+\varepsilon \, .$$

Abbiamo così provato che:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} \in \mathbb{N}_0 : \qquad l-\varepsilon < m_n < l+\varepsilon ,$$

$$l-\varepsilon < M_n < l+\varepsilon \qquad \forall n \geq \bar{n} ,$$

Così $\lim\limits_{n\to\infty} m_n = \lim\limits_{n\to\infty} M_n = l$.

In maniera analoga si prova che:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} m_n = \lim_{n\to\infty} M_n = +\infty \, ,$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} m_n = \lim_{n\to\infty} M_n = -\infty \, .$$

b) Osserviamo che è

$$m_n \leq a_n \leq M_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0 \, ;$$

pertanto, per il teorema di confronto, si ha:

$$\lim_{n\to\infty} m_n = \lim_{n\to\infty} M_n = \ell \in \mathbb{R} \implies \lim_{n\to\infty} a_n = \ell \,,$$

$$\lim_{n\to\infty} m_n = +\infty \implies \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \,,$$

$$\lim_{n\to\infty} M_n = -\infty \implies \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \,,$$

dunque la condizione è sufficiente.

c) Consideriamo le potenze di 2:

$$\begin{array}{cccccccccc}
\downarrow & & & & \downarrow & & & & \downarrow & \\
2 & 4 & 8 & 16 & 32 & 64 & 128 & 256 & 512 & 1024 \; \ldots
\end{array}$$

e sia $\{a_n\}$ la successione il cui termine generale è ~~sono~~ uguale a 1 se n è una delle potenze $2, 32, 512, \ldots$ e 0 in caso contrario, cioè:

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \in \{2^{4k+1} : k \in \mathbb{N}_0\} \\ 0 & \text{se } n \in \mathbb{N}_0 \setminus \{2^{4k+1} : k \in \mathbb{N}_0\} . \end{cases}$$

3.8 - 4

Si ha allora:

$$m_n = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0 .$$

Infatti $m_0 = a_0 = 0$ e, se $n \geq 1$, allora, dato che almeno uno degli indici $n, n+1, \dots, 2n$ è dispari e quindi almeno uno dei numeri $a_n, a_{n+1}, \dots, a_{2n}$ è uguale a zero, risulta $m_n = \min\{a_n, a_{n+1}, \dots, a_{2n}\} = 0$.

Invece la successione $\{M_n\}$ non ha limite dato che essa ha infiniti termini uguali a 1 ($M_2, M_{32}, M_{512}, \dots$) e infiniti termini uguali a zero ($M_8, M_{128}, M_{2048}, \dots$).