

1.1

Perché la successione $\{a^n\}$, $a \in \mathbb{R}$,
 è convergente se e soltanto se $-1 < a \leq 1$,
 il problema che è l'insieme delle soluzioni
 del sistema di disuguaglianze

$$-1 < \frac{x^3 - x^2}{x^3 - 6x + 5} \leq 1 \quad (\Leftrightarrow)$$

$x^3 - 6x + 5$ si annulla per $x = 1$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 0 & -6 & 5 \\ 1 & & 1 & 1 & -5 \\ \hline & 1 & 1 & -5 & / \end{array}$$

$$x^3 - 6x + 5 = (x-1)(x^2 + x - 5)$$

$$(\Leftrightarrow) \quad -1 < \frac{x^2(x-1)}{(x-1)(x^2+x-5)} \leq 1 \quad (\Leftrightarrow)$$

1.1 - 2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ -1 < \frac{x^2}{x^2+x-5} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x^2+x-5 > 0 \\ -(x^2+x-5) < x^2 \leq x^2+x-5 \end{cases} \cup \begin{cases} x \neq 1 \\ x^2+x-5 < 0 \\ -(x^2+x-5) > x^2 \geq x^2+x-5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x^2+x-5 > 0 & (1) \\ 2x^2+x-5 > 0 & (2) \\ x-5 \geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x \neq 1 \\ x^2+x-5 < 0 & (3) \\ 2x^2+x-5 < 0 & (4) \\ x-5 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

(osservando che $(1) \Rightarrow (2)$ e $(4) \Rightarrow (3)$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x^2+x-5 > 0 & (1) \\ x-5 \geq 0 & (5) \end{cases} \cup \begin{cases} x \neq 1 \\ 2x^2+x-5 < 0 & (4) \\ x-5 \leq 0 & (6) \end{cases} \Leftrightarrow$$

(osservando che $(5) \Rightarrow (1)$ e $(4) \Rightarrow (6)$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \geq 5 \end{cases} \cup \begin{cases} x \neq 1 \\ 2x^2 + x - 5 < 0 \end{cases}$$

$$\left[2x^2 + x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{41}}{4} \right]$$

$$\Leftrightarrow x \in [5, +\infty[\cup \begin{cases} x \neq 1 \\ -\frac{1-\sqrt{41}}{4} < x < \frac{-1+\sqrt{41}}{4} \end{cases} \quad (\Rightarrow)$$

$$\left[-1+6 < -1+\sqrt{41} < -1+7 \right]$$

$$\frac{5}{4} < \frac{-1+\sqrt{41}}{4} < \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(\left[-\frac{1-\sqrt{41}}{4}, \frac{-1+\sqrt{41}}{4} \right] \setminus \{1\} \right) \cup [5, +\infty[$$

$$= \text{dom } f$$

Il dom g è l'intersezione tra dom f
 e $\text{dom} \left(\log_{\frac{3}{2}}(3^x - 2^x) \right)$. Quest'ultimo

è l'unione delle soluzioni delle disuguaglianze

$$3^x - 2^x > 0 \quad (\Leftrightarrow)$$

$$(\Leftrightarrow) 3^x > 2^x \quad (\Leftrightarrow) \left(\frac{3}{2}\right)^x > 1 \quad (\Leftrightarrow)$$

$$(\Leftrightarrow) x > 0$$

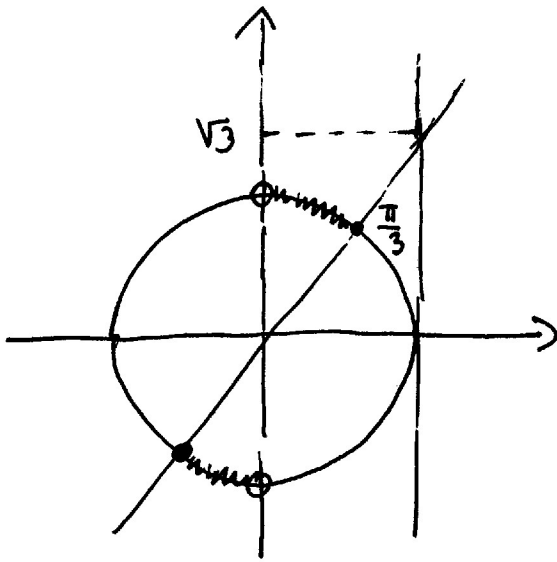
Pertanto

$$\text{obm } y = \left(] 0, \frac{-1+\sqrt{41}}{4} [\cup \{1\} \right) \cup [5, +\infty[.$$

1.2

Il dominio della funzione f è l'insieme delle soluzioni della disuguaglianza

$$\operatorname{tg}(2x-1)^2 - \sqrt{3} \geq 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg}(2x-1)^2 \geq \sqrt{3} ;$$



risolvendo $\operatorname{tg} t \geq \sqrt{3}$

osserviamo:

$$\operatorname{tg} t \geq \sqrt{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : \frac{\pi}{3} + k\pi \leq t < \frac{\pi}{2} + k\pi ,$$

perciò

$$\operatorname{tg}(2x-1)^2 \geq \sqrt{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : \frac{\pi}{3} + k\pi \leq (2x-1)^2 < \frac{\pi}{2} + k\pi (*)$$

osserviamo che:

$$1.2 - 2$$

- se $K \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}_0 \Rightarrow \frac{\pi}{2} + K\pi < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ il sistema (*) non ha soluzioni

- se $K \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow \frac{\pi}{3} + K\pi, \frac{\pi}{2} + K\pi > 0,$

quindi:

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{\frac{\pi}{3} + K\pi} \leq |2x-1| < \sqrt{\frac{\pi}{2} + K\pi} \Leftrightarrow$$

(distinguiamo i casi $2x-1 \leq 0$ e $2x-1 \geq 0$)

$$\sqrt{\frac{\pi}{3} + K\pi} \leq 2x-1 < \sqrt{\frac{\pi}{2} + K\pi} \quad \cup$$

$$\cup -\sqrt{\frac{\pi}{2} + K\pi} < 2x-1 \leq -\sqrt{\frac{\pi}{3} + K\pi}.$$

Pertanto il dominio di f è

$$\left(\bigcup_{K \in \mathbb{N}_0} \left[\frac{1 + \sqrt{\frac{\pi}{3} + K\pi}}{2}, \frac{1 + \sqrt{\frac{\pi}{2} + K\pi}}{2} \right] \right) \cup$$

$$\cup \left(\bigcup_{K \in \mathbb{N}_0} \left[\frac{1 - \sqrt{\frac{\pi}{2} + K\pi}}{2}, \frac{1 - \sqrt{\frac{\pi}{3} + K\pi}}{2} \right] \right).$$

Il dominio di g è l'intersezione del dominio di f e del dominio della funzione reale di variabile reale $\arcsin \frac{2^{2x+1}-1}{15}$, che è l'insieme delle soluzioni del sistema di disuguaglianze:

$$-1 \leq \frac{2^{2x+1}-1}{15} \leq 1 \quad (\Leftrightarrow)$$

$$(\Leftrightarrow) -15 \leq 2^{2x+1}-1 \leq 15 \quad (\Leftrightarrow)$$

$$(\Leftrightarrow) -14 \leq 2^{2x+1} \leq 16 \quad (\Leftrightarrow)$$

$$(\Leftrightarrow) 2^{2x+1} \leq 2^4 \quad (\Leftrightarrow) 2x+1 \leq 4 \quad (\Leftrightarrow)$$

$$(\Leftrightarrow) x \leq \frac{3}{2} \quad ,$$

Osserveremo che gli intervalli

$$\left] \frac{1 - \sqrt{\frac{\pi}{3} + k\pi}}{2}, \frac{1 - \sqrt{\frac{\pi}{3} + k\pi}}{2} \right], \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

sono contenute nell'intervallo $]-\infty, 0[$

(infatti $1 - \sqrt{\frac{\pi}{3} + k\pi} \leq 1 - \sqrt{\frac{\pi}{3}} < 0$) e

quindi anche in $]-\infty, \frac{3}{2}]$.

Per quanto riguarda gli altri intervalli:

$$\left[\frac{1 + \sqrt{\frac{\pi}{3} + k\pi}}{2}, \frac{1 + \sqrt{\frac{\pi}{3} + k\pi}}{2} \right], \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

notiamo che:

$$\frac{3}{2} < \frac{1 + \sqrt{\frac{\pi}{3} + k\pi}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3 < 1 + \sqrt{\frac{\pi}{3} + k\pi} \Leftrightarrow 2 < \sqrt{\frac{\pi}{3} + k\pi} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 < \left(\frac{\pi}{3} + k\right)\pi$$

e l'ultima disuguaglianza è vera per $k \geq 1$

$$(\text{infetto } K \geq 1 \Rightarrow (\frac{1}{3} + K)\pi \geq \frac{4}{3}\pi > 4)$$

e false per $K=0$, dunque l'unico intervallo che ha intersezione non vuota con

$$]-\infty, \frac{3}{2}] \text{ e' } \left[\frac{1 + \sqrt{\frac{\pi}{3}}}{2}, \frac{1 + \sqrt{\frac{\pi}{2}}}{2} \right]$$

Per trovare qual e' l'intersezione occorre

$$\text{confrontare } \frac{1 + \sqrt{\frac{\pi}{2}}}{2} \text{ con } \frac{3}{2}; \text{ e}$$

che:

$$\left[\begin{array}{cc} \frac{1 + \sqrt{\frac{\pi}{2}}}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 + \sqrt{\frac{\pi}{2}} & 3 \\ \sqrt{\frac{\pi}{2}} & 2 \\ \frac{\pi}{2} & 4 \end{array} \right] \quad \left(\begin{array}{l} \text{in ogni passaggio} \\ \text{si genera la} \\ \text{disuguaglianza} \end{array} \right)$$

e quindi, essendo $\frac{\pi}{2} < 4$, si ha pure

1.2 - 6

$$\frac{1 + \sqrt{\frac{\pi}{2}}}{2} < \frac{3}{2},$$

per tanto $\left[\frac{1 + \sqrt{\frac{\pi}{3}}}{2}, \frac{1 + \sqrt{\frac{\pi}{2}}}{2} \right] \subset \left[\frac{3}{2}, +\infty \right).$

In conclusione

$$\text{obm } g = \left[\frac{1 + \sqrt{\frac{\pi}{3}}}{2}, \frac{1 + \sqrt{\frac{\pi}{2}}}{2} \right] \cup$$

$$\cup \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} \left[\frac{1 - \sqrt{\frac{\pi}{2} + k\pi}}{2}, \frac{1 + \sqrt{\frac{\pi}{3} + k\pi}}{2} \right] \right)$$

1.3

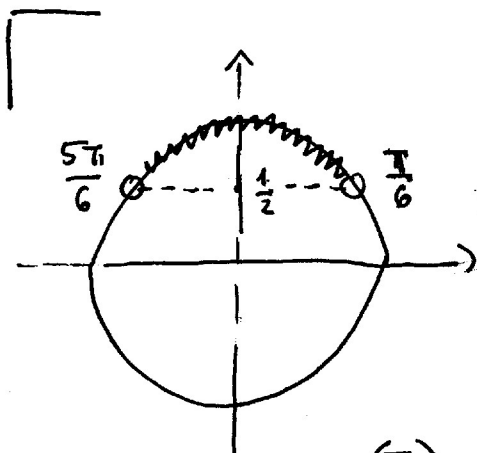
Il dominio della funzione f è l'insieme delle soluzioni della disuguaglianza

$$\sqrt{2 \sin\left(\frac{\pi}{3\sqrt{2}} \sin x\right)} - 1 > 0 \quad (\Rightarrow)$$

$$(\Rightarrow) \sqrt{2 \sin\left(\frac{\pi}{3\sqrt{2}} \sin x\right)} > 1 \quad (\Leftrightarrow)$$

$$(\Rightarrow) 2 \sin\left(\frac{\pi}{3\sqrt{2}} \sin x\right) > 1 \quad (\Leftrightarrow)$$

$$(\Rightarrow) \sin\left(\frac{\pi}{3\sqrt{2}} \sin x\right) > \frac{1}{2} \quad (\Leftrightarrow)$$



dato che

$$\sin t > \frac{1}{2} \quad (\Leftrightarrow)$$

$$(\Leftrightarrow) \exists k \in \mathbb{Z} : \frac{\pi}{6} + 2k\pi < t < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

1.3 - 2

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : \frac{\pi}{6} + 2k\pi < \frac{\pi}{3\sqrt{2}} \sin x < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : (*) \left(\frac{1}{2} + 6k \right) \sqrt{2} < \sin x < \left(\frac{5}{2} + 6k \right) \sqrt{2} ;$$

poiché il codominio di $\sin x$ è $[-1, 1]$ la (*)
 ha soluzioni solo per quei valori di $k \in \mathbb{Z}$ per
 cui risulta $\left] \left(\frac{1}{2} + 6k \right) \sqrt{2}, \left(\frac{5}{2} + 6k \right) \sqrt{2} \right[\cap [-1, 1] \neq \emptyset$;
 si osserva subito che per $k \neq 0$ la precedente
 intersezione è vuota; infatti

$$k \geq 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{2} + 6k \right) \sqrt{2} \geq \frac{13}{2} \sqrt{2} > 1,$$

$$k \leq -1 \Rightarrow \left(\frac{5}{2} + 6k \right) \sqrt{2} \leq -\frac{7}{2} \sqrt{2} < -1.$$

Pertanto si ha:

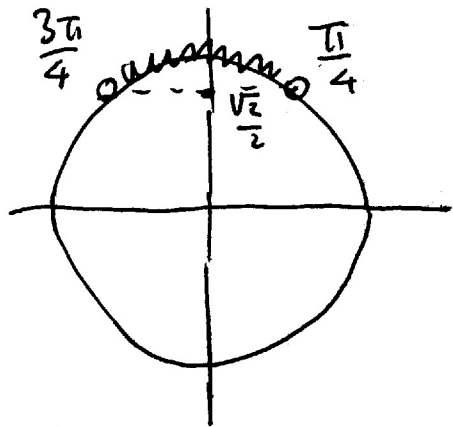
$$x \in \text{dom } f \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} < \sin x < \frac{5}{2} \sqrt{2} \Leftrightarrow$$

(dato che $\frac{5}{2} \sqrt{2} > 1$ la disuguaglianza a

1.3 - 3

destre è verificata da $\forall x \in \mathbb{R}$)

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} < \sin x \quad (\Rightarrow)$$



$$\Leftrightarrow x \in \bigcup_{h \in \mathbb{Z}} \left] \frac{\pi}{4} + 2h\pi, \frac{3\pi}{4} + 2h\pi \right[$$

dom f

Il dominio della funzione g è uguale all'intersezione del dominio di f con il dominio della funzione reale di variabile reale $\underbrace{h(x)=}_{\text{reale}} \sqrt{x} \log_{\frac{1}{5}}(9\pi - 2x)$, cioè con l'insieme delle soluzioni di

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 9\pi - 2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x < \frac{9}{2}\pi \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[0, \frac{9}{2}\pi \right[$$

1.3 - 4

A questo punto, per ottenere il dominio di g , rimane soltanto da confrontare 0 e $\frac{9}{2}\pi$ con gli estremi dell'intervallo $[\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi[$, $k \in \mathbb{Z}$. Ovviamente si ha:

$$k < 0 \Rightarrow \frac{3\pi}{4} + 2k\pi < 0,$$

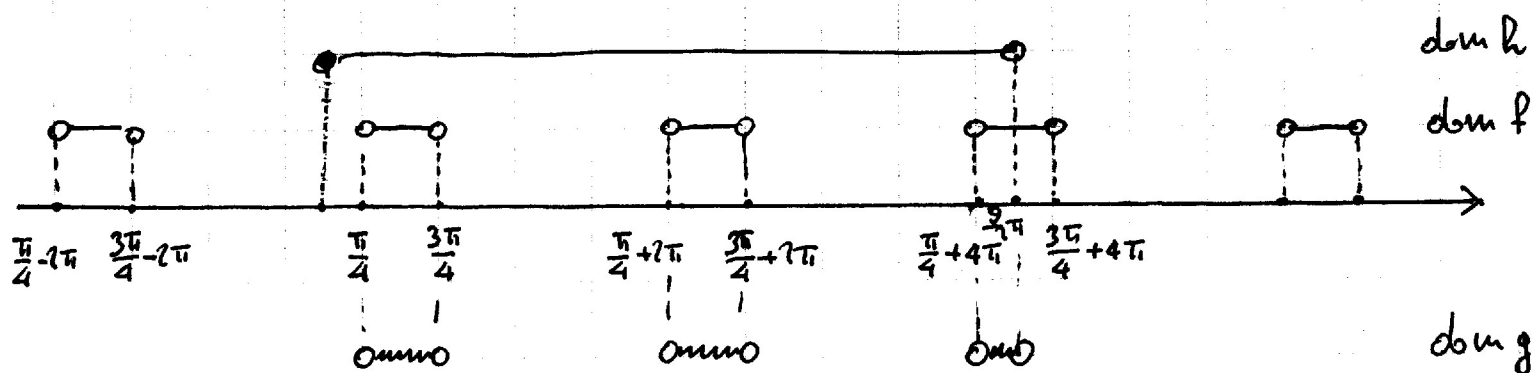
$$k \geq 0 \Rightarrow \frac{\pi}{4} + 2k\pi > 0;$$

inoltre, essendo $\frac{9}{2}\pi = \frac{\pi}{2} + 4\pi$, si ha

$$\frac{\pi}{4} + 4\pi < \frac{9}{2}\pi < \frac{3\pi}{4} + 4\pi.$$

Dunque il dominio di g è:

$$]\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}[\cup]\frac{\pi}{4} + 2\pi, \frac{3\pi}{4} + 2\pi[\cup]\frac{\pi}{4} + 4\pi, \frac{\pi}{2} + 4\pi[$$



1.4

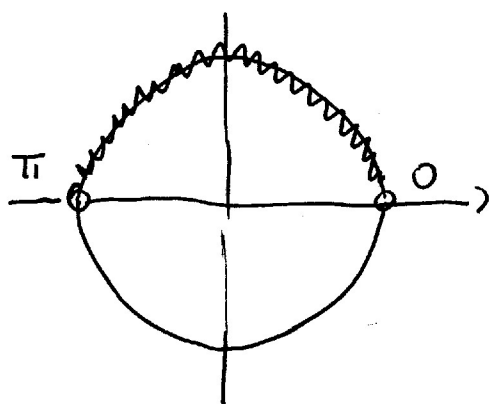
Il dominio di f è l'unione delle soluzioni
del sistema di disuguaglianze

$$\begin{cases} \sin x > 0 \\ \sin x \neq 1 \\ 1 - 3^{2\cos x + \sqrt{3}} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < \sin x < 1 \\ 3^{2\cos x + \sqrt{3}} < 3^0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < \sin x < 1 \\ 2\cos x + \sqrt{3} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < \sin x < 1 & (1) \\ \cos x < -\frac{\sqrt{3}}{2} & (2) \end{cases}$$

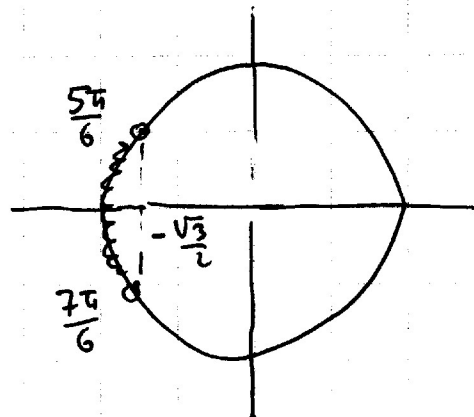
Gli estremi degli archi le cui ^(in termini) misure x ver-

ificano le (1) sono :



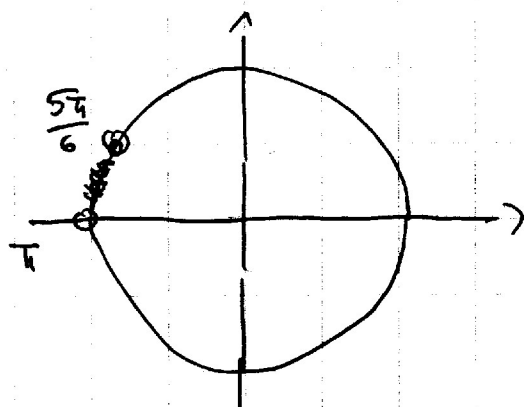
quelle per cui è verificata la (2) sono :

1.4 - 2



i

peranto gli estremi degli archi le cui misure $\times$
verifcano il sistema (1), (2) zero :



i

dunque :

$$\text{dom } f = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} \left] \frac{5\pi}{6} + m\pi, \pi + 2m\pi \right[.$$

Il dominio di g e' l'intersezione del dominio
di f con il dominio delle ^{reale} funzione $\checkmark$ di variabile

1.4 - 3

reale $\times \sqrt{5 + 4x(x+1) - x^3}$, che è l'insieme
delle soluzioni delle disuguaglianze

$$5 + 4x(x+1) - x^3 \geq 0 \quad (\Leftrightarrow)$$

$$(\Leftrightarrow) \quad x^3 - 4x^2 - 4x - 5 \leq 0 \quad (\Leftrightarrow)$$

$$\boxed{x^3 - 4x^2 - 4x - 5 = 0 \text{ ha la radice}}$$

$$\begin{aligned} x=5; \text{ infatti } 5^3 - 4 \cdot 5^2 - 4 \cdot 5 - 5 &= \\ &= 5^3 - \underbrace{4 \cdot 5^2 - 5^2} = \\ &= 5^3 - 5^3 = 0; \end{aligned}$$

5	1	-4	-4	-5
		5	5	5
	1	1	1	//

$$(\Leftrightarrow) \quad (x-5)(x^2+x+1) \leq 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad x \leq 5$$

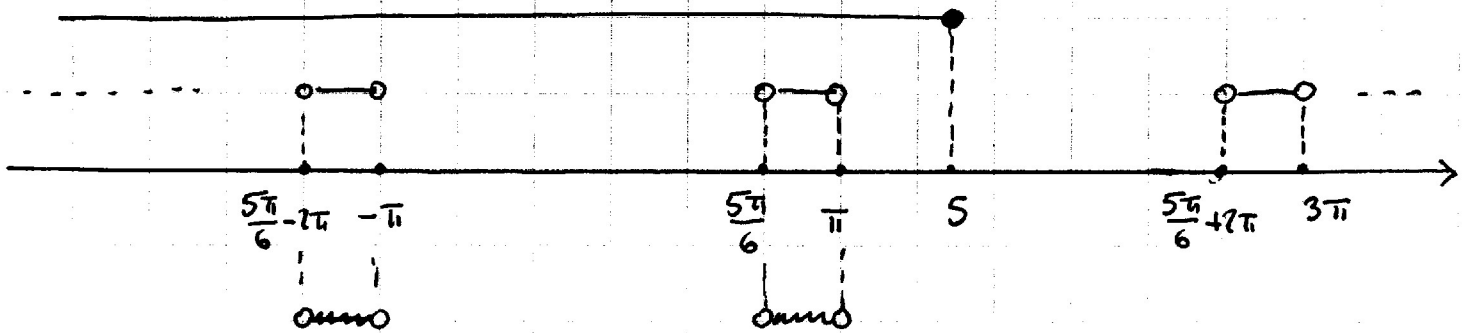
dato che $x^2+x+1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Confrontiamo 5 con gli estremi dell'intervallo

$$\left] \frac{5\pi}{6} + 2m\pi, \pi + 2m\pi \right[, m \in \mathbb{Z}.$$

Si ha

$$\begin{array}{ccc} \pi < 5 < \frac{5\pi}{6} + 2\pi \\ \downarrow & & \downarrow \\ m=0 & & m=1 \end{array}$$



Pertanto :

$$\text{obm } y = \bigcup_{\substack{m \in \mathbb{Z} \\ m < 0}} \left] \frac{5\pi}{6} + 2m\pi, \pi + 2m\pi \right[$$

1.5

Il dominio di f è l'insieme delle soluzioni della disuguaglianza

$$\frac{\pi}{6} + \arctg \frac{x}{x+1} > 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \arctg \frac{x}{x+1} > -\frac{\pi}{6} \quad \Leftrightarrow$$

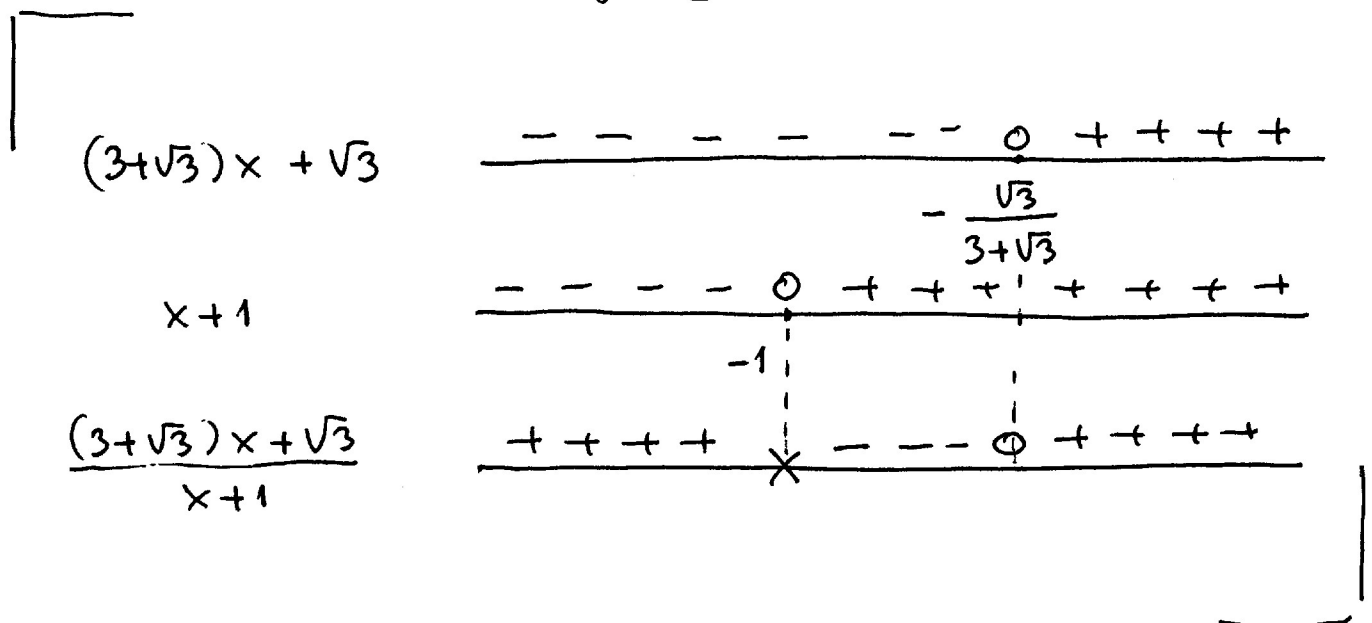
$$\Leftrightarrow \arctg \frac{x}{x+1} > \arctg \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \quad \Leftrightarrow$$

(dato che la funzione $\arctg t$ è definita in $\mathbb{R}$ ed è crescente in $\mathbb{R}$)

$$\Leftrightarrow \frac{x}{x+1} > -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \Leftrightarrow \frac{3x + \sqrt{3}(x+1)}{3(x+1)} > 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(3+\sqrt{3})x + \sqrt{3}}{x+1} > 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$1.5 - 2$$



$$\Leftrightarrow x \in]-\infty, -1[\cup]-\frac{\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}, +\infty[$$

dom f

Il dominio di g è l'intersezione del dominio di f e del dominio della funzione reale di variabile reale

$$h(x) = \frac{\sqrt[8]{8\sqrt{2}-2} \sqrt{4x^2+x+1}}{1 + \operatorname{arctg}^2 x}$$

Si ha :

$$1.5 - 3$$

$$x \in \text{dom } h \Leftrightarrow 8\sqrt{2} - 2^{|4x^2+x|} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^{3+\frac{1}{2}} \geq 2^{|4x^2+x|} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{7}{2} \geq |4x^2+x| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2+x \leq \frac{7}{2} \\ 4x^2+x \geq -\frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8x^2+2x-7 \leq 0 \\ 8x^2+2x+7 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$8x^2+2x+7 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$8x^2+2x-7 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{57}}{8}$$

$$\Leftrightarrow x \in \left] \frac{-1-\sqrt{57}}{8}, \frac{-1+\sqrt{57}}{8} \right[.$$

Albre

$$\text{dom } g = \left(]-\infty, -1[\cup \left] -\frac{\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}, +\infty[\right) \cap \right. \\ \left. \cap \left] \frac{-1-\sqrt{57}}{8}, \frac{-1+\sqrt{57}}{8} [\right. =$$

$$\left[\frac{-1-\sqrt{57}}{8} < \frac{-1-7}{8} = -1 \right]$$

$$= \left] \frac{-1-\sqrt{57}}{8}, -1[\cup \left] -\frac{\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}, \frac{-1+\sqrt{57}}{8} [\right. .$$

1.6

Troviamo deppume i domini delle tre funzioni

Il dominio F di $f(x) = \log_{x-1}(x + \sqrt{x} - \sqrt{x^2-1})$

è l'unione delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x-1 > 0 \\ x-1 \neq 1 \\ x + \sqrt{x} - \sqrt{x^2-1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x \neq 2 \\ x + \sqrt{x} > \sqrt{x^2-1} \end{cases} \Leftrightarrow$$

(osserviamo che per i valori di x per cui è soddisfatta la prima disuguaglianza è vero anche che entrambi i membri della terza disuguaglianza hanno significato e sono entrambi quantità positive; pertanto è lecito sostituire, nel precedente sistema, alla terza disuguaglianza quella disuguaglianza che si ottiene da esse innalzando al quadrato entrambi i membri)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x \neq 2 \\ x^2 + 2x\sqrt{x} + x > x^2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x \neq 2 \\ 2x\sqrt{x} + x > -1 \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ \Leftrightarrow \\ (2) \end{matrix}$$

(ovviamente $(1) \Rightarrow (2)$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x \neq 2 \end{cases} ,$$

per tanto $F =]1, +\infty[\setminus \{2\}$.

Il dominio G di $g(x) = \sqrt{2^x - 3} + \log(\sin \frac{\pi}{x})$ è l'insieme delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 2^x - 3 \geq 0 \\ \sin \frac{\pi}{x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x \geq 2^{\log_2 3} \\ \sin \frac{\pi}{x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \log_2 3 \\ \sin \frac{\pi}{x} > 0 \end{cases} ;$$

osserviamo adesso che, essendo $\log_2 3 > 1$, si ha:

$$\begin{aligned} x \geq \log_2 3 &\Rightarrow 0 < \frac{1}{x} < 1 \Rightarrow 0 < \frac{\pi}{x} < \pi \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sin \frac{\pi}{x} > 0 , \end{aligned}$$

quindi $G = [\log_2 3, +\infty[$.

Il dominio H di $h(x) = \arcsin\left(\frac{4}{11} \arcsin \frac{x}{5}\right)$
 è l'insieme delle soluzioni del sistema di
 disuguaglianze

$$-1 \leq \frac{4}{11} \arcsin \frac{x}{5} \leq 1 \quad (\Leftrightarrow)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} \leq \arcsin \frac{x}{5} \leq \frac{\pi}{4} \quad (\Leftrightarrow)$$

$$\Leftrightarrow \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \leq \arcsin \frac{x}{5} \leq \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (\Leftrightarrow)$$

(dato che la funzione $\arcsin$ è crescente)

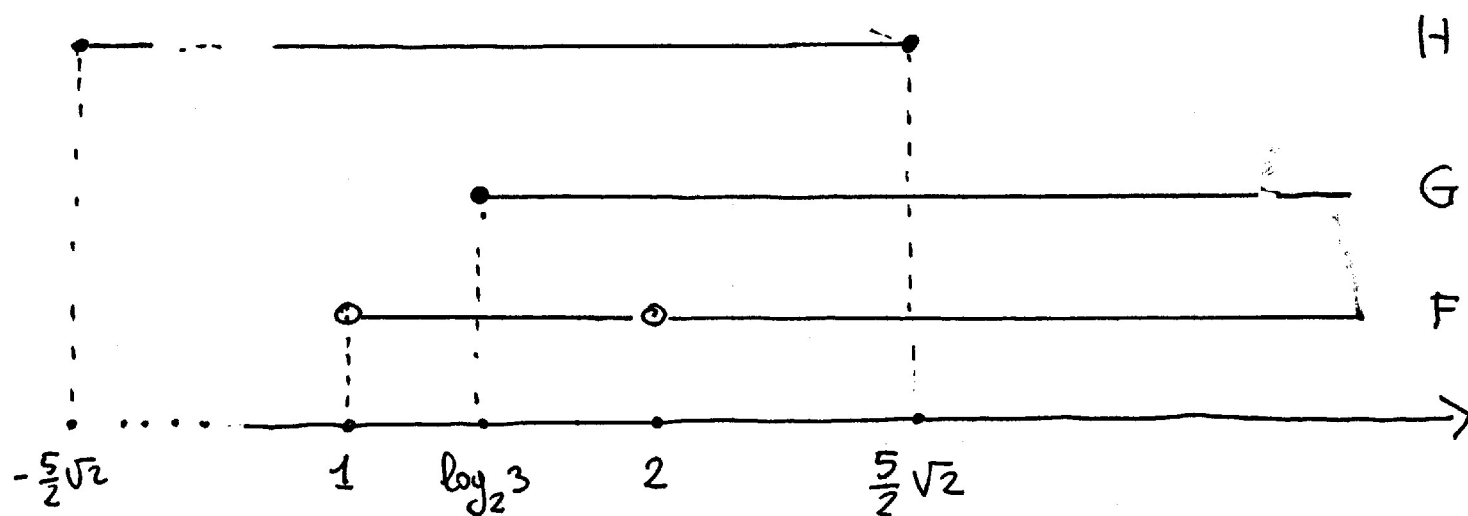
$$\Leftrightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \frac{x}{5} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (\Leftrightarrow) \quad -\frac{5\sqrt{2}}{2} \leq x \leq \frac{5\sqrt{2}}{2},$$

quindi

$$H = \left[-\frac{5\sqrt{2}}{2}, \frac{5\sqrt{2}}{2} \right]$$

Disegniamo le curve F , G e H

$$\left(1 < \log_2 3 < \log_2 4 = 2 < \frac{5}{2}\sqrt{2} \right)$$



Possiamo adesso rispondere ai quesiti a) e b).

a) L'insieme richiesto è

$$F \cap G \cap H = \left[\log_2 3, \frac{5\sqrt{2}}{2} \right] \setminus \{2\}$$

b) L'insieme richiesto è

$$\begin{aligned} & [F \setminus (G \cup H)] \cup [G \setminus (F \cup H)] \cup [H \setminus (F \cup G)] = \\ & = \emptyset \cup \emptyset \cup \left[-\frac{5\sqrt{2}}{2}, 1 \right] = \left[-\frac{5\sqrt{2}}{2}, 1 \right] \end{aligned}$$

1.7

Il dominio di f è l'unione delle soluzioni delle disuguaglianze

$$(*) \max \{ \sin 2x, \cos 2x \} - \max \{ \sin x, \cos x \} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \max \{ \sin 2x, \cos 2x \} \geq \max \{ \sin x, \cos x \} .$$

⌈ OSSERVAZIONE . Se α, β e γ sono tre funzioni reali di variabile reale, allora, come è facile verificare, si ha :

$$\max \{ \alpha(x), \beta(x) \} \leq \gamma(x) \quad \begin{matrix} (1) \\ \Leftrightarrow \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha(x) \leq \gamma(x) \\ \beta(x) \leq \gamma(x) \end{cases} ,$$

$$\max \{ \alpha(x), \beta(x) \} \geq \gamma(x) \quad \begin{matrix} (2) \\ \Leftrightarrow \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha(x) \geq \gamma(x) \\ x \in \text{dom } \beta \end{cases} \cup \begin{cases} \beta(x) \geq \gamma(x) \\ x \in \text{dom } \alpha \end{cases}$$

⌋

Nel nostro caso le funzioni $\sin x$, $\cos x$, $\sin 2x$ e $\cos 2x$ sono tutte definite su tutto $\mathbb{R}$, pertanto

$$\max \{ \sin 2x, \cos 2x \} \geq \max \{ \sin x, \cos x \} \quad (\Leftrightarrow)$$

(per le (2))

$$\Leftrightarrow \sin 2x \geq \max \{ \sin x, \cos x \} \quad \cup$$

$$\cup \quad \cos 2x \geq \max \{ \sin x, \cos x \} \quad (\Leftrightarrow)$$

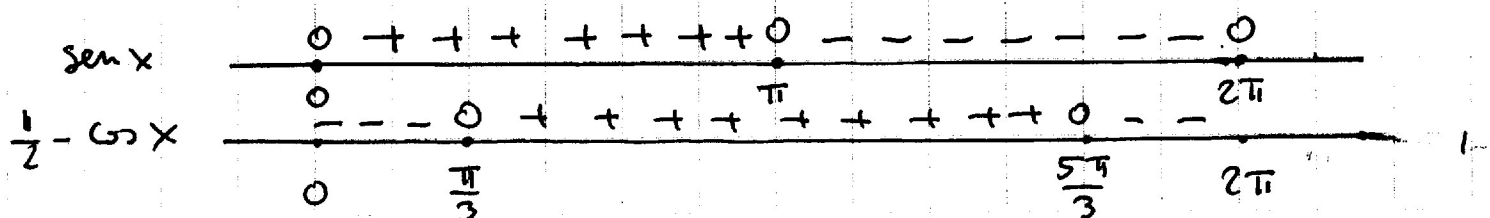
(per le (1))

$$\Leftrightarrow (A) \begin{cases} \sin x \leq \sin 2x \quad (*) \\ \cos x \leq \sin 2x \quad (**) \end{cases} \cup (B) \begin{cases} \sin x \leq \cos 2x \quad (0) \\ \cos x \leq \cos 2x \quad (00) \end{cases}$$

Risolviemo le (*) :

$$\sin x \leq \sin 2x \quad \Leftrightarrow \quad \sin x \leq 2 \sin x \cos x \quad (\Leftrightarrow)$$

$$\Leftrightarrow \sin x (1 - 2 \cos x) \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x \left(\frac{1}{2} - \cos x \right) \leq 0 \quad ;$$



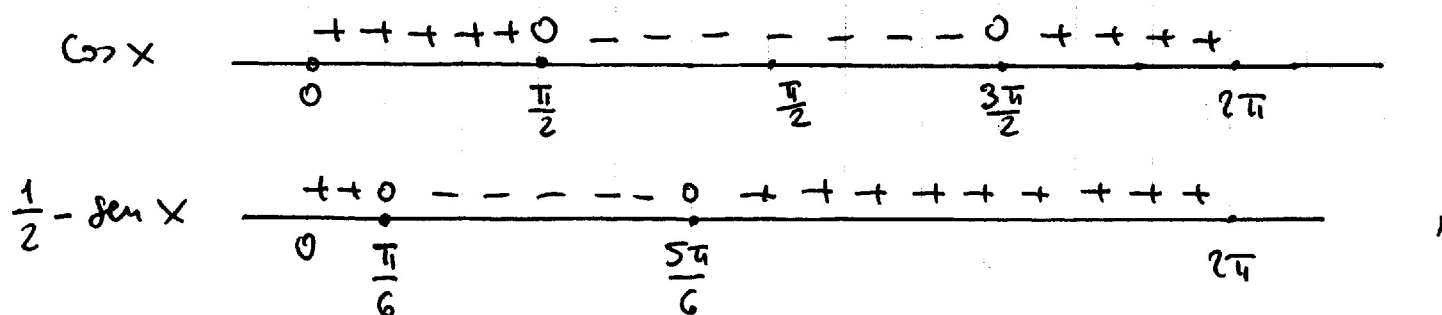
pertanto le soluzioni di (*) in $[0, 2\pi[$ sono:

$$x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\pi, \frac{5\pi}{3}\right]$$

Risoliamo la (:):

$$\cos x \leq \sin^2 x \Leftrightarrow \cos x (1 - 2 \sin x) \leq 0 \Leftrightarrow$$

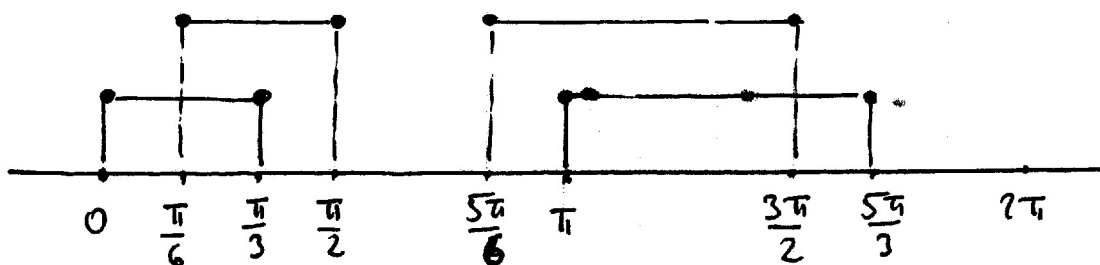
$$\Leftrightarrow \cos x \left(\frac{1}{2} - \sin x\right) \leq 0 ;$$



pertanto le soluzioni di (:) in $[0, 2\pi[$ sono:

$$x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right]$$

Risoliamo il sistema (A) in $[0, 2\pi[$:



le soluzioni di (A) in $[0, 2\pi]$ sono:

$$x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$$

Risolviamo la (o) :

$$\sin x \leq \cos 2x \Leftrightarrow \sin x \leq 1 - 2\sin^2 x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 \leq 0 \quad (\Leftrightarrow)$$

$$\left[2t^2 + t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-1 \pm 3}{4} = \begin{cases} -1 \\ \frac{1}{2} \end{cases} \right]$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq \sin x \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x \leq \frac{1}{2} \quad ;$$

le soluzioni di (o) in $[0, 2\pi[$ sono :

$$x \in [0, \frac{\pi}{6}] \cup [\frac{5\pi}{6}, 2\pi[.$$

Risolviamo la (o) :

$$\cos x \leq \cos 2x \Leftrightarrow \cos x \leq 2\cos^2 x - 1 \quad (\Leftrightarrow)$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x - \cos x - 1 \geq 0 \quad (\Leftrightarrow)$$

$$\left[2t^2 - t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{cases} \right]$$

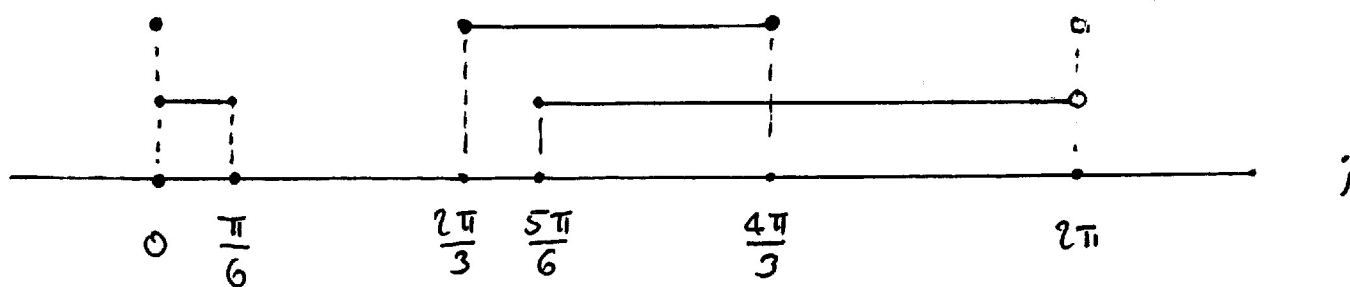
$$\cancel{\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq \cos x \leq 1} \quad \cancel{\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq \cos x} \quad \checkmark$$

$$\Leftrightarrow \cos x \leq -\frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \cos x \geq 1 ;$$

le soluzioni di (*) in $[0, 2\pi[$ sono:

$$x \in \{0\} \cup \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \right].$$

Risolliamo il sistema (B) in $[0, 2\pi[$:



le soluzioni di (B) in $[0, 2\pi[$ sono:

$$x \in \{0\} \cup \left[\frac{5\pi}{6}, \frac{4\pi}{3} \right].$$

Ne segue che le soluzioni di (*) in $[0, 2\pi[$ sono:

$$x \in \{0\} \cup \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} \right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2} \right]$$

e pertanto il dominio di f è

$$\{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \cup \left(\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi \right] \right) \cup \\ \cup \left(\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right] \right).$$

Per il dominio di g si ha:

$$\text{dom } g = \text{dom } f \cap G,$$

essendo G l'insieme delle soluzioni della disuguaglianza

$$10 - \max \{x^2 - 3x, x + 1\} > 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x < 10 \\ x + 1 < 10 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 - 3x - 10 = 0 \\ x + 1 < 10 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{3 \pm 7}{2} = \begin{cases} 5 \\ -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in]-2, 5[\\ x < 9 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x \in]-2, 5[.$$

Per trovare l'intersezione $\text{dom } f \cap G$ occorre

~~considerare che, per non alterare~~
 confrontare i numeri -2 e 5 con gli estremi

degli intervalli che costituiscono il dominio di f .

Per $k=0$ si hanno gli intervalli:

$$\{0\}, \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right], \left[\frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right]$$

e risulta $\frac{3\pi}{2} < 5$ (infatti $\pi < \frac{10}{3}$,

dato che $\pi < 3,15 < 3,3 = \frac{10}{3}$). Inoltre

$5 < 2\pi$ (← si ottiene per $k=1$).

Per $k=-1$ si hanno gli intervalli:

$$\{-2\pi\}, \left[-\frac{11\pi}{6}, -\frac{5\pi}{3}\right], \left[-\frac{7\pi}{6}, -\frac{\pi}{2}\right]$$

e risulta $-\frac{7\pi}{6} < -2 < -\frac{\pi}{2}$.

Pertanto il dominio di g è:

$$\left[-2, -\frac{\pi}{2}\right] \cup \{0\} \cup \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right].$$

1.8

Il dominio di f è l'unione delle soluzioni delle disuguaglianze

$$\arcsen \frac{(x-1)^2}{(x+1)^2} - \arcsen \frac{x}{x+1} \geq 0 \quad (\Leftrightarrow)$$

$$(\Leftrightarrow) \quad \arcsen \frac{x}{x+1} \leq \arcsen \frac{(x-1)^2}{(x+1)^2} \quad (\Leftrightarrow)$$

(dato che la funzione $\arcsen$ è definita nell'intervallo $[-1, 1]$ ed è crescente)

$$(\Leftrightarrow) \quad -1 \leq \frac{x}{x+1} \leq \frac{(x-1)^2}{(x+1)^2} \leq 1 \quad (\Leftrightarrow)$$

$$(\Leftrightarrow) \quad \begin{cases} -1 \leq \frac{x}{x+1} \\ \frac{x}{x+1} \leq \frac{(x-1)^2}{(x+1)^2} \\ \frac{(x-1)^2}{(x+1)^2} \leq 1 \end{cases} \quad (\Leftrightarrow)$$

(osservando che, se è soddisfatta la prima dis-

questione, allora si ha $x+1 \neq 0$ e quindi

$$(x+1)^2 > 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq \frac{x}{x+1} \\ x(x+1) \leq (x-1)^2 \\ (x-1)^2 \leq (x+1)^2 \end{cases} \quad (\Leftrightarrow)$$

(esaminando separatamente i due casi $x+1 > 0$

e $x+1 < 0$)

$$(\Leftrightarrow) \begin{cases} x+1 > 0 \\ -x-1 \leq x \\ x^2+x \leq x^2-2x+1 \\ -2x \leq 2x \end{cases} \cup \begin{cases} x+1 < 0 \\ -x-1 \geq x \\ x^2+x \leq x^2-2x+1 \\ -2x \leq 2x \end{cases} \quad (\Leftrightarrow)$$

$$(\Leftrightarrow) \begin{cases} x > -1 \\ x \geq -\frac{1}{2} \\ x \leq \frac{1}{3} \\ x \geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x < -1 \\ x \leq -\frac{1}{2} \\ x \leq \frac{1}{3} \\ x \geq 0 \end{cases} ;$$

l'insieme delle soluzioni del primo sistema

è $[0, \frac{1}{3}]$, mentre il secondo sistema è impossibile, dunque $\text{dom } f = [0, \frac{1}{3}]$.

Il dominio di g è l'unione delle soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} x \in \text{dom } f \\ \arctg(5x^5 - x^4) + \arctg(5x - 1) > 0 \end{cases} \quad (\Leftrightarrow)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in [0, \frac{1}{3}] \\ \arctg(5x^5 - x^4) > -\arctg(5x - 1) \end{cases} \quad (\Leftrightarrow)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in [0, \frac{1}{3}] \\ \arctg(5x^5 - x^4) > \arctg(1 - 5x) \end{cases} \quad (\Leftrightarrow)$$

(dato che la funzione $\arctg t$ è definita in tutto $\mathbb{R}$ ed è crescente)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in [0, \frac{1}{3}] \\ 5x^5 - x^4 > 1 - 5x \end{cases} \quad (\Leftrightarrow)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in [0, \frac{1}{3}] \\ 5x^5 - x^4 + 5x - 1 > 0 \end{cases} \quad (\Leftrightarrow)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in [0, \frac{1}{3}] \\ x^4(5x-1) + 5x-1 > 0 \end{cases} \quad (\Leftrightarrow)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in [0, \frac{1}{3}] \\ (5x-1)(x^4+1) > 0 \end{cases} \quad (\Leftrightarrow)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in [0, \frac{1}{3}] \\ 5x-1 > 0 \end{cases} \quad ,$$

obtemos

$$\text{obtemos } =] - \frac{1}{5}, \frac{1}{3}] .$$