

(10)

$$(1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} [\arctg \log(n^2+1)] x^{n^3}$$

$$\{\alpha_n\} = \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Osserviamo che la successione  $\{\arctg \log(n^2+1)\}$  è una successione crescente di numeri positivi con

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \arctg \log(n^2+1) = \frac{\pi}{2}$$

Per  $x=0$  la (1) converge ed ha somma uguale a zero.

Per  $x > 0$  la (1) è a termini positivi. Cercando di applicare il criterio del rapporto, troviamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_{n+1} x^{(n+1)^3}}{\alpha_n x^{n^3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \right) x^{3n^2+3n+1} =$$

$$= \begin{cases} +\infty & \text{se } x > 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \\ 0 & \text{se } 0 < x < 1 \end{cases} ;$$

pertanto la (1) converge per  $0 < x < 1$  e diverge a

$+\infty$  per  $x > 1$ . Per  $x = 1$  la (1) diventa la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ , la quale diverge a  $+\infty$  dato che il termine generale non è infinitesimo.

Per  $x < 0$  la serie (1) è una serie a termini di segno alternato (dato che  $n^3$  è pari o dispari e secondo che  $n$  sia pari o dispari), la cui serie dei valori assoluti è

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n |x|^{n^3},$$

cioè la stessa serie (1) considerata però per il valore  $|x|$  del parametro. Ne segue che per  $-1 < x < 0$  la serie (1) è assolutamente convergente e quindi convergente. Invece se  $x \leq -1$ , dato che la successione

$$\{|\alpha_n x^{n^3}|\} = \{\alpha_n |x|^{n^3}\}$$

è crescente (poiché  $|x| \geq 1$ ), per il teorema sulle serie a termini di segno alternato la (1) è oscillante. In conclusione la serie (1)

- diverge a  $+\infty$  per  $x \geq 1$
- converge per  $|x| < 1$
- è oscillante per  $x \leq -1$ .