

(8)

Si tratta di trovare una serie di potenze di centro zero che ha per somma la funzione

$$f(x) = \frac{x^3}{4 + x^{100}}.$$

Si perviene facilmente allo scopo utilizzando la serie geometrica:

$$1 + t + t^2 + \dots + t^{n-1} + \dots = \frac{1}{1-t} \quad \forall t \in]-1, 1[.$$

Infatti possiamo esprimere la legge di f nel seguente modo:

$$f(x) = x^3 \frac{1}{4 + x^{100}} = \frac{1}{4} x^3 \frac{1}{1 + \frac{x^{100}}{4}} =$$

$$= \frac{1}{4} x^3 \frac{1}{1 - \left(-\frac{x^{100}}{4}\right)} \quad \forall x \in \mathbb{R};$$

per tanto si ha, se $\left|\frac{x^{100}}{4}\right| < 1$, cioè se

$$|x| < \sqrt[100]{4},$$

$$f(x) = \frac{1}{4} x^3 \left[1 - \frac{x^{100}}{4} + \left(-\frac{x^{100}}{4}\right)^2 + \dots + \left(-\frac{x^{100}}{4}\right)^{n-1} + \dots \right] =$$

$$= \frac{1}{4} x^3 - \frac{1}{4^2} x^{103} + \frac{1}{4^3} x^{203} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{4^n} x^{100(n-1)+3} + \dots =$$

(tenendo presente che il carattere di una serie e, in caso di convergenza, la sua somma rimangono inalterati se si aggiungono altri termini (in numero finito o infinito) tutti uguali a zero)

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n,$$

dove α_n è posto

$$\alpha_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \in \mathbb{N}_0 \setminus \{3, 103, 203, \dots\} \\ \frac{(-1)^{k-1}}{4^k} & \text{se } n = 100(k-1) + 3, \quad k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

ovvero, esprimendo α_n in funzione di n (dato che $n = 100(k-1) + 3 \Rightarrow k = \frac{n-3}{100} + 1$),

$$(*) \quad \alpha_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \in \mathbb{N}_0 \setminus \{3, 103, 203, \dots\} \\ \frac{(-1)^{\frac{n-3}{100}}}{4^{\frac{n+97}{100}}} & \text{se } n \in \{3, 103, 203, \dots\} \end{cases}.$$

In conclusione, dato che l'eventuale sviluppo in serie di potenze di una funzione è unico, possiamo affermare che lo sviluppo in serie di McLaurin della funzione

$$\frac{x^3}{4+x^{100}}$$

è

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n,$$

dove i coefficienti sono dati dalle (*), e che tale sviluppo è valido nell'intervallo

$$\left] -\sqrt[100]{4}, \sqrt[100]{4} \right[.$$