

(5)

Per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(x + \frac{1}{n} \sin \frac{1}{n} \right)^2 = x^2,$$

quindi la successione di funzioni $\{f_n(x)\} = \{(x + \frac{1}{n} \sin \frac{1}{n})^2\}$ converge puntualmente su $\mathbb{R}$ alla funzione limite $f(x) = x^2$.

Per decidere sulle convergenze uniformi, consideriamo le differenze

$$f_n(x) - f(x) = 2x \sin \frac{1}{n} + \sin^2 \frac{1}{n}$$

e ci osserviamo che, qualunque sia $n \in \mathbb{N}$, risulta

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} [f_n(x) - f(x)] = \pm \infty;$$

pertanto, se $X \subseteq \mathbb{R}$ è un insieme non limitato, risulta

$$\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| = +\infty$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$, dunque non c'è convergenza uniforme nell'insieme X .

Invece, se $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, e' un insieme limitato, e quindi esiste $h > 0$ tale che

$$|x| \leq h \quad \forall x \in X,$$

e he

$$|2x \sin \frac{1}{n} + \sin^2 \frac{1}{n}| \leq 2h \sin \frac{1}{n} + \sin^2 \frac{1}{n}$$

$$\forall x \in X, \forall n \in \mathbb{N},$$

quindi

$$\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \leq 2h \sin \frac{1}{n} + \sin^2 \frac{1}{n}$$

$$\forall n \in \mathbb{N},$$

da cui

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| = 0,$$

per tanto $\{f_n\}$ converge uniformemente in X .

In conclusione, gli insiemi $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, nei quali la successione di funzioni $\{(x + \sin \frac{1}{n})^2\}$ converge uniformemente sono tutti e soli gli insiemi limitati.