

3

Le serie (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{x^{(2n+1)^2}}{\sqrt{n+4}} - \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right]$ è

la serie differenza delle due serie

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{(2n+1)^2}}{\sqrt{n+4}} \quad \text{e} \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right].$$

Le serie (3) è una serie telescopica, cioè una serie del tipo $\sum_{n=1}^{\infty} [c_n - c_{n+1}]$; la n -ma somma parziale è uguale a $c_1 - c_{n+1} = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$,

pertanto la (3) converge ed ha somma uguale a 1. Ne segue che il carattere delle (1) è esattamente lo stesso di quello delle (2), cioè la (1) converge, diverge ($+\infty$ o $-\infty$) o oscilla a seconda che converge, diverge ($+\infty$ o $-\infty$) o oscilla la (2).

Studiamo la (2). L'esponente $(2n+1)^2$ è sempre dispari, quindi la serie corrispondente al valore $-x$ del parametro è l'opposto di quella corrispondente al valore x . Basta quindi studiare la (2) per $x \geq 0$.

Per $x=0$ la (2) diventa la serie $0+0+\dots+0+\dots$, che converge ed ha somma uguale a zero.

Per $x > 0$ la (2) è a termini positivi. Applicando il criterio di confronto per il rapporto:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{(2n+3)^2}}{\sqrt{n+5}} \cdot \frac{\sqrt{n+4}}{x^{(2n+1)^2}} &= \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n+4}{n+5}} \times \frac{4n^2 + 12n + 9 - (4n^2 + 4n + 1)}{2} &= \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n+4}{n+5}} \times 8n + 8 &= \begin{cases} +\infty & \text{se } x > 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \\ 0 & \text{se } 0 < x < 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Ne segue che la (2) converge a $+\infty$ se $x > 1$ e converge se $0 < x < 1$. Per $x = 1$ non è possibile decidere il carattere delle (2) con il criterio del rapporto; in questo caso però la (2) diventa

$$(4) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+4}}$$

ed è facile vedere che la (4) ha lo stesso carattere delle serie armoniche con esponente $\frac{1}{2}$ (o con il criterio del confronto asintotico o osservando che la (4) è una serie resto delle serie armoniche con esponente $\frac{1}{2}$); pertanto per $x = 1$ la (2) converge.

In conclusione, ritornando alla serie (1), abbiamo che:

$$\text{la serie (1)} \left\{ \begin{array}{ll} \text{Converge} & \text{se } -1 < x < 1 \\ \text{diverge a } +\infty & \text{se } x \geq 1 \\ \text{diverge a } -\infty & \text{se } x \leq -1 \end{array} \right.$$