

2

La serie (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{n}(2n-1)} - \frac{\log n}{5^{2n+3}} \right]$

è la serie differenza delle due serie

$$(1_A) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(2n-1)}, \quad (1_B) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{5^{2n+3}}$$

Le (1_A) è a termini positivi. Confrontandola con la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} \cdot n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$$

(che converge), otteniamo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}(2n-1)}}{\frac{1}{\sqrt{n} \cdot n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2},$$

quindi anche la (1_A) converge. La (1_B) è definitivamente ($n \geq 2$) a termini positivi. Cerchiamo di applicare il criterio del rapporto:

$$\frac{\log(n+1)}{5^{2n+5}} \cdot \frac{5^{2n+3}}{\log n} =$$

$$= \frac{1}{25} \frac{\log(n+1)}{\log n} \rightarrow \frac{1}{25} < 1$$

dato che $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\log(t+1)}{\log t} =$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{t+1}}{\frac{1}{t}} = 1.$$

Per tanto la (1_B) è pure convergente e quindi la (1) è convergente.

La serie (2) è una serie

$$(2) \quad \frac{\log 3}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\log 4}{2} - \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{\log 5}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{7}} + \dots$$

è una serie del tipo

$$a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + a_3 + b_3 + \dots,$$

ottenute "per incastro" dalle due serie

$$(2_A) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n+2)}{(\sqrt{2})^n},$$

$$(2_B) \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{\sqrt{2n+1}} \right).$$

La serie (z_A) è a termini positivi. Si ha:

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\log(n+3)}{(\sqrt{2})^{n+1}} \cdot \frac{(\sqrt{2})^n}{\log(n+2)} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\log(n+3)}{\log(n+2)} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} < 1, \end{aligned}$$

quindi la (z_A) converge. La (z_B) è la serie opposta delle

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}},$$

che quella diverge a $+\infty$, avendo lo stesso carattere di $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$ (infetto

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{2n+1}}}{\frac{1}{n^{1/2}}} = \sqrt{\frac{n}{2n+1}} \rightarrow \sqrt{\frac{1}{2}} > 1,$$

per tanto la (z_B) diverge a $-\infty$.

Ritornando alle (2), osserviamo che la successione delle somme parziali è:

$$A_1, A_1+B_1, A_2+B_1, A_2+B_2, A_3+B_2, A_3+B_3, \dots,$$

ovvero $\{A_n\}$ e $\{B_n\}$ sono le successioni delle

somme parziali delle (z_A) e delle (z_B) . In altre parole, la successione $\{S_n\}$ delle somme parziali delle (z) è data da

$$S_{2n} = A_n + B_n \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

$$S_{2n+1} = A_{n+1} + B_n \quad \forall n \in \mathbb{N};$$

ne segue che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n+1} = -\infty$$

e quindi anche

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = -\infty,$$

dunque la serie (z) diverge a $-\infty$.