

(15)

$$(*) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x}{(1+x)^{n-1}}$$

Per $x=0$ la (*) diventa la serie $0+0+\dots+0+\dots$,
quindi converge ed ha somma uguale a zero.

Per $x>0$ la (*) è a termini positivi
e si ha, cercando di applicare il criterio del rapporto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)x}{(1+x)^n} \cdot \frac{(1+x)^{n-1}}{nx} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+x} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{1}{1+x} < 1,$$

dunque la (*) converge. Pertanto la serie di
funzioni (*) converge puntualmente nell'inter-
vallo $[0, +\infty[$.

Per la funzione somma $S(x)$ si ha, come
abbiamo già visto, $S(0)=0$. Per calcolare
 $S(x)$, $x \in]0, +\infty[$, osserviamo che possiamo
scrivere

$$S(x) = x \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{1+x} \right)^{n-1}$$

e che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n t^{n-1}$$

è la serie delle derivate della serie geometrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n$$

che ha raggio di convergenza uguale a uno;
pertanto, per il teorema sulle serie di potenze,
si ha:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n t^{n-1} = \frac{d}{dt} \left[\sum_{n=0}^{\infty} t^n \right] =$$

$$= \frac{d}{dt} \frac{1}{1-t} = - \frac{-1}{(1-t)^2} = \frac{1}{(1-t)^2}$$

$$\forall t \in]-1, 1[;$$

di conseguenza (dato che $0 < \frac{1}{1+x} < 1 \quad \forall x \in]0, +\infty[$)
si ha

$$S(x) = x \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{1+x}\right)^2} = x \left(\frac{x+1}{x}\right)^2 =$$

$$= \frac{(x+1)^2}{x} \quad \forall x \in]0, +\infty[.$$

Per provare che la (*) non converge uniformemente in $[0, +\infty[$, osserviamo che la funzione somma

$$S(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x=0 \\ \frac{(x+1)^2}{x} & \text{se } x \in]0, +\infty[\end{cases}$$

non è continua nel punto $x_0 = 0$ ($\lim_{x \rightarrow 0^+} S(x) = +\infty$),

mentre tutti i termini della serie (cioè

$\frac{nx}{(1+x)^{n-1}}$, $n \in \mathbb{N}$) sono funzioni continue

in $[0, +\infty[$. Pertanto, per il teorema di continuità delle funzione somme, la convergenza nell'intervallo $[0, +\infty[$ non è uniforme.

Per dimostrare che la (*) converge uniformemente negli intervalli $[a, +\infty[$ ($a > 0$) potremmo pensare di provare che la (*) converge totalmente in tali intervalli. Ci accorgiamo subito però che la (*) non converge totalmente in $[a, +\infty[$ in quanto il primo termine della serie, cioè la funzione x , non è limitata in tale intervallo. Gli altri termini, invece, sono funzioni limitate in $[a, +\infty[$ poiché sono funzioni continue e convergenti per $x \rightarrow +\infty$ (infatti

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{nx}{(1+x)^{n-1}} = \begin{cases} 2 & \text{se } n=2 \\ 0 & \text{se } n \geq 3 \end{cases}.$$

Potremo però governare delle seguenti

OSSERVAZIONE. Sia (1) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ una serie

di funzioni reali definite in un insieme A e
sia (2) $\sum_{n=k+1}^{\infty} f_n(x)$ una serie resto. Allora:

la serie (1) converge uniformemente in A $(\Rightarrow)$ la serie (2) converge uniformemente in A .

Cerchiamo quindi una serie resto delle (*)
che sia totalmente (e quindi uniformemente)
convergente negli intervalli $[a, +\infty[$.

Occorre trovare il

$$\sup_{[a, +\infty[} \frac{nx}{(1+x)^{n-1}} \quad (n \geq 2).$$

Osserveremo che

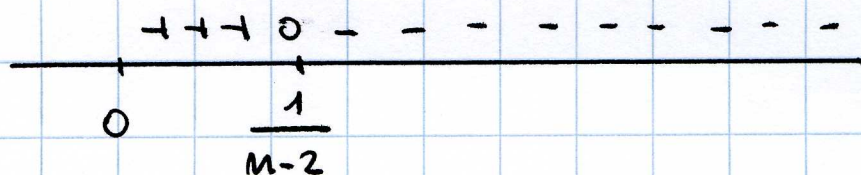
$$D \frac{nx}{(1+x)^{n-1}} = n \frac{(1+x)^{n-1} - (n-1)x(1+x)^{n-2}}{(1+x)^{2n-2}} =$$

$$= n \frac{1+x - (n-1)x}{(1+x)^n} =$$

$$= \frac{n}{(1+x)^n} [1 - (n-2)x] \quad \forall x \in [0, +\infty[, \forall n \geq 2;$$

per tanto per $n \geq 3$ il segno delle derivate

$$D \frac{nx}{(1+x)^{n-1}} \text{ e'}$$



Ne segue che, fissato un qualunque $\varepsilon > 0$, per n sufficientemente grande (precisamente:

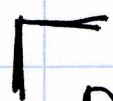
tale che $\frac{1}{n-2} \leq \varepsilon$) si ha

$$\sup_{[0, +\infty[} \frac{nx}{(1+x)^n} = \max_{[0, +\infty[} \frac{nx}{(1+x)^n} = \frac{n\varepsilon}{(1+\varepsilon)^n};$$

dato che la serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\varepsilon}{(1+\varepsilon)^n}$ e'

convergente (si tratta delle stesse (*) calcolate

nel punto a) possiamo quindi affermare che: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un'opportuna sfera r delle (*) (dipendente da ε) che è totalmente (e quindi uniformemente) convergente in $[a, +\infty[$; pertanto, grazie alla precedente OSSERVAZIONE, la serie (*) è uniformemente convergente in $[a, +\infty[$.



Dimostrazione dell'OSSERVAZIONE.

Proviamo l'implicazione $\Leftarrow$, che è quella che abbiamo utilizzato per svolgere l'esercizio. La dimostrazione della $\Rightarrow$ è del tutto analoga.

Sia $R_n(x)$ la funzione somma delle (2). Per ipotesi si ha che:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq \bar{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f_{k+1}(x) + \dots + f_{k+n}(x) - R_n(x)| < \varepsilon$$

$$\forall x \in A ;$$

allora, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq k + \bar{n}$, essendo $n = k + r$ con $r \geq \bar{n}$, si ha, denotando con $S_k(x)$ la somma parziale k -ma delle (1),

$$|f_1(x) + \dots + f_n(x) - [S_k(x) + R_k(x)]| =$$

$$= |f_{k+1}(x) + \dots + f_{k+n}(x) - R_k(x)| < \varepsilon$$

$$\forall x \in A,$$

per tanto la serie (1) è uniformemente
convergente in A , avendo come funzione
somma la $S_k(x) + R_k(x)$. —|