

(13)

Su ha: $f_n(0) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ e quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0) = 0 \quad ;$$

inoltre, per ogni $x > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \log \frac{x + \frac{1}{n}}{x^2 + \frac{1}{n}} = \log \frac{1}{x} \quad ;$$

per tanto la successione di funzioni $\{f_n(x)\} =$

$= \left\{ \log \frac{nx+1}{nx^2+1} \right\}$ converge puntualmente in $[0, +\infty[$ verso la funzione limite

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \log \frac{1}{x} & x \in]0, +\infty[\end{cases} .$$

Si osserva subito che la funzione limite f non è continua nel punto 0, mentre tutte le funzioni f_n , $n \in \mathbb{N}$, sono continue in $[0, +\infty[$. Di conseguenza, per il teorema delle continue della funzione limite, la convergenza nell'intervallo $[0, +\infty[$ non è uniforme.

Per dimostrare che in un qualunque intervallo

$[a, +\infty[$, $a > 0$, la convergenza è uniforme, facciamo vedere che sono verificate le due condizioni caratteristiche per la convergenza uniforme:

$$(1) \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \sup_{[a, +\infty[} |f_n - f| < +\infty \quad \forall n \geq \bar{n} ;$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{[a, +\infty[} |f_n - f| = 0$$

Osserviamo che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, n ha

$$\begin{aligned} f_n(x) - f(x) &= \log \frac{nx+1}{nx^2+1} - \log \frac{1}{x} = \\ &= \log \frac{nx^2+x}{nx^2+1} \quad \forall x \in]0, +\infty[, \end{aligned}$$

per tanto la funzione $f_n(x) - f(x)$ è continua in $]0, +\infty[$; essendo inoltre

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f_n(x) - f(x)] = \log 1 = 0 ,$$

abbiamo che $f_n(x) - f(x)$ è limitata in $[a, +\infty[$, quindi la (1) è vera ($\bar{n} = 1$). Per provare la (2) calcoliamo la derivata

$$D[f_n(x) - f(x)] = \frac{nx^2+1}{nx^2+x} \cdot \frac{(nx+1)(nx^2+1) - 2nx(nx^2+x)}{(nx^2+1)^2} =$$

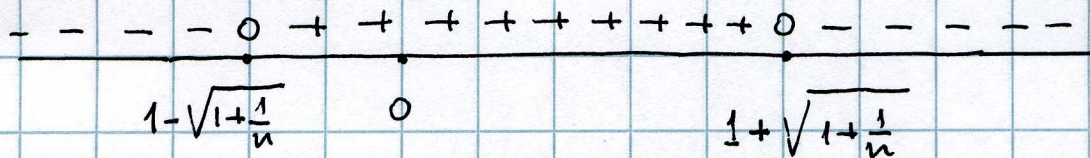
$$= \frac{2nx^3 + 2nx + nx^2 + 1 - 2nx^3 - 2nx^2}{(nx^2 + x)(nx^2 + 1)} =$$

$$= \frac{-nx^2 + 2nx + 1}{(nx^2 + x)(nx^2 + 1)} \quad \forall x \in]0, +\infty[, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\left[nx^2 - 2nx - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{n \pm \sqrt{n^2 + n}}{n} = \right.$$

$$= 1 \pm \sqrt{1 + \frac{1}{n}}$$

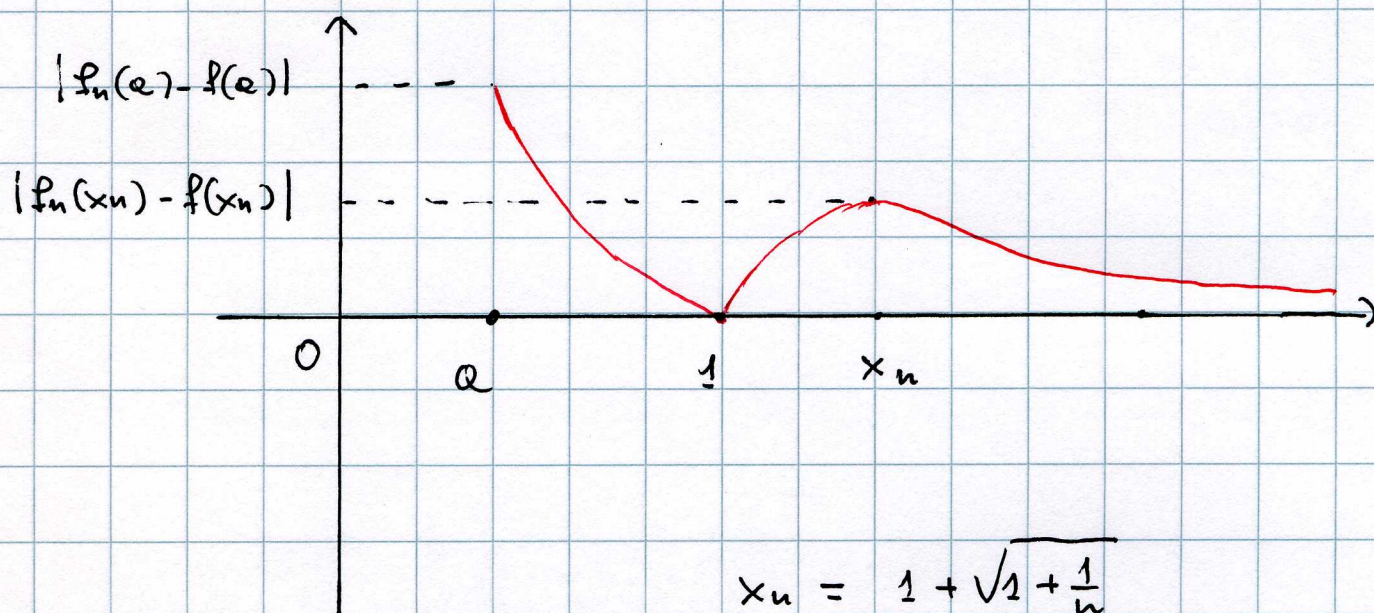
segno di $-nx^2 + 2nx + 1$



pertanto, per ogni $n \in \mathbb{N}$, la funzione $f_n - f$ è crescente in $]0, 1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n}}]$ e decrescente in $[1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n}}, +\infty[$. Osserviamo anche che $f_n(1) - f(1) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Allora, supponendo $0 < x < 1$, il grafico della funzione

$$|f_n(x) - f(x)| \quad \Big| \quad]0, +\infty[$$

e', e menr delle convessate' :



se si suppone che $|f_n(a) - f(a)| > |f_n(x_n) - f(x_n)|$;
 il disegno si modificherebbe in modo ovvio se
 $|f_n(a) - f(a)| < |f_n(x_n) - f(x_n)|$ oppure $|f_n(a) - f(a)| =$
 $= |f_n(x_n) - f(x_n)|$; in ogni caso e' chiaro che si ha:

$$\sup_{[a, +\infty[} |f_n(x) - f(x)| = \max_{[a, +\infty[} |f_n(x) - f(x)| =$$

$$= \max \left\{ |f_n(a) - f(a)|, |f_n(x_n) - f(x_n)| \right\},$$

per cui provare la (2) equivale a provare che e':

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(a) - f(a)| = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x_n) - f(x_n)| = 0 ;$$

La prima relazione di limite è vera (per la convergenza puntuale). Proviamo la seconda:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x_n) - f(x_n)| = \lim_{n \rightarrow \infty} [f_n(x_n) - f(x_n)] =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \log \frac{nx_n^2 + x_n}{nx_n^2 + 1} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \log \frac{n \left(1 + 2\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1 + \frac{1}{n} \right) + 1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n}}}{n \left(1 + 2\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1 + \frac{1}{n} \right) + 1} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \log \frac{2 + 2\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\sqrt{1 + \frac{1}{n}}}{2 + 2\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n}} =$$

$$= \log 1 = 0.$$

Abbiamo così provato la convergenza uniforme negli intervalli $[a, +\infty[$ con $0 < a < 1$. A maggior ragione vi sarà convergenza uniforme negli intervalli $[a, +\infty[$ con $a \geq 1$.