

12

La serie

$$(1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{(n^3)!} = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n$$

è a termini positivi. Perchiamo di applicare il criterio del rapporto:

$$\frac{Q_{n+1}}{Q_n} = \frac{(n+1)^{2n+2}}{[(n+1)^3]!} \cdot \frac{(n^3)!}{n^{2n}} =$$

$$= \underbrace{\left(\frac{n+1}{n} \right)^{2n}}_{e^2} \cdot (n+1)^2 \cdot \frac{(n^3)!}{(n^3)! (n^3+1) (n^3+2) \dots (n+1)^3};$$

però, osservando che i fattori del prodotto $(n^3+1)(n^3+2) \dots (n+1)^3$ sono un numero di

$$(n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1 \geq 7$$

e sono tutti maggiori o uguali a $n+1$,
abbiamo che:

$$\frac{Q_{n+1}}{Q_n} \leq \left(\frac{n+1}{n} \right)^{2n} \cdot \frac{1}{(n+1)^5} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

quindi $\frac{Q_{n+1}}{Q_n} \rightarrow 0$ e la serie (1) converge.

Per quanto riguarda la serie

$$(2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\pi \cdot \sin \frac{10\pi}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{10\pi}{n}$$

si osserva subito che i termini della successione $\left\{ \frac{10\pi}{n} \right\}$ appartengono definitivamente ($n \geq 20$) all'intervallo $\left] 0, \frac{\pi}{2} \right]$ e che, dato che $\sin x$ è crescente in $\left[0, \frac{\pi}{2} \right]$, si ha, per ogni $n \geq 20$:

$$0 < \frac{10\pi}{n+1} < \frac{10\pi}{n} \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 < \sin \frac{10\pi}{n+1} < \sin \frac{10\pi}{n} ;$$

si ha inoltre $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{10\pi}{n} = 0$. Dalle prece-

denti osservazioni segue che la serie

$$(2') \quad \sum_{n=20}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{10\pi}{n}$$

è una serie a termini di segno alternato, convergente per il criterio di Leibniz; pertanto anche la (2), della quale la (2') è una serie resto, è convergente.

Le serie

$$(3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-n}}{n} \cos \frac{10\pi}{n}$$

è a termini definitivamente ($n \geq 20$) non
positivi; e lo mostra

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{-n}}{n} \cdot \cos \frac{10\pi}{n} = -1,$$

per cui la (3) non converge; pertanto la serie
(3) diverge a $-\infty$.