

Se $0 < a < 1$ la successione $\{a^n\}$ è decrescente, quindi anche $\{\arctg a^n\}$ è decrescente; pertanto, dato che $\{\frac{1}{n}\}$ e $\{\arctg a^n\}$ sono due successioni entrambe decrescenti ed a valori positivi, possiamo concludere che $\{\frac{1}{n} \arctg a^n\}$ è decrescente.

Se $a = 1$ la successione $\{\frac{1}{n} \arctg a^n\} = \{\frac{1}{n} \cdot \frac{\pi}{4}\}$ è decrescente.

Se $a > 1$ le successioni $\{\frac{1}{n}\}$ e $\{\arctg a^n\}$ sono una decrescente e l'altra crescente; occorre quindi ragionare in maniera diversa. Consideriamo allora la funzione reale di variabile reale

$$f(t) = \frac{1}{t} \arctg a^t$$

e calcoliamo la sua derivata:

$$f'(t) = \frac{\frac{1}{1+a^{2t}} (a^t \log a) t - \arctg a^t}{t^2}$$

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Osserviamo che al limite, per $t \rightarrow +\infty$, del numeratore della precedente frazione è:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{1+e^{2t}} (e^t \log e) t - \operatorname{arctg} e^t \right] =$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\left(\frac{t}{e^t} \right)^0 \frac{1}{\frac{1}{e^{2t}} + 1} \log e - \operatorname{arctg} e^t \right] = -\frac{\pi}{2},$$

per tanto esiste $\bar{t} > 0$ tale che $\varphi'(t) < 0$
 $\forall t \in [\bar{t}, +\infty[$, quindi la funzione φ è
 decrescente in $[\bar{t}, +\infty[$, e poiché possiamo conclu-
 dere che la successione $\left\{ \frac{1}{n} \operatorname{arctg} e^n \right\} = \{\varphi(n)\}$
 è definitivamente decrescente

[NOTA. Il ragionamento ottenuto per $e > 1$
 funziona anche per $0 < e \leq 1$; infatti, in
 questo caso, si verifica immediatamente che è

$$\varphi'(t) < 0 \quad \forall t \in]0, +\infty[.$$

Passiamo allo studio della serie

$$(1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{arctg} x^n.$$

(è la serie $0+0+\dots+0+\dots$, quindi)

Per $x=0$ la serie converge ed ha somma 0.

Per $x > 0$ le (1) e i termini positivi.

Se $x > 1$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \arctg x^n = \frac{\pi}{2}$ e
quival

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} \text{rect} y x^n}{\frac{1}{n}} = \frac{\pi}{2},$$

le (1) ha lo stesso carattere delle serie armoniche, quindi diverge.

Anche per $x = 1$ la (1) converge (si tratta delle serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{n}$).

Se $0 < x < 1$ so he $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{erctg } x^n = 0$; inoltre,

ricordando che la funzione arctgt è, per $t \rightarrow 0$, infinitesimale dello stesso ordine di t (infettu

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\text{entgt}}{t} = \left[\frac{D \text{entgt}}{t} \right]_{t=0} = 1$$

ebkemo :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} \operatorname{arctg} x^n}{\frac{1}{n} x^n} = 1$$



quindi la serie (1) ha lo stesso carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n,$$

che (si verifica facilmente con il criterio del rapporto) è convergente.

Se $x < 0$, dato che $\operatorname{arctg} t$ è una funzione dispari, si ha

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{arctg} x^n &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{arctg} (-1 \times 1)^n = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} \operatorname{arctg} |x|^n, \end{aligned}$$

pertanto la (1) è una serie a termini di segno alternato e la corrispondente serie dei valori assoluti è

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{arctg} |x|^n$$

(cioè la stessa (1) considerata nel punto $|x|$). Pertanto, se $|x| < 1$, cioè $-1 < x < 0$, la (1) è assolutamente convergente. Per $x \leq -1$, invece, non c'è assoluta convergenza, però, dato che la successione

$$\left\{ \left| \frac{1}{n} \arctan x^n \right| \right\} = \left\{ \frac{1}{n} \arctan |x|^n \right\}$$

è definitivamente decrescente e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \arctan x^n = 0,$$

per il criterio di Leibniz possiamo concludere che la serie (1) converge.

In conclusione, la serie (1)

converge a $+\infty$ se $x \geq 1$,

converge assolutamente se $-1 < x < 1$,

converge (non assolutamente) se $x \leq -1$.