

(9)

2) Calcoliamo dopprima l'integrale indefinito.

$$\int \frac{\cos x + 2}{\sin x + 2} dx = \int \frac{\cos x}{\sin x + 2} dx + \int \frac{2}{\sin x + 2} dx =$$

(dato che $\cos x = D(\sin x + 2)$)

$$= \log |\sin x + 2| + \int \frac{2}{\sin x + 2} dx =$$

$$= \log (\sin x + 2) + 2 \int \frac{dx}{\sin x + 2} ;$$

il precedente risultato vale in tutto $\mathbb{R}$. Per calcolare l'integrale

$$\int \frac{dx}{\sin x + 2}$$

faremo ricorso alle formule in $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$; si ha, in ogni intervallo I che non contiene punti del tipo $\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$:

$$\int \frac{dx}{\sin x + 2} = \int \frac{dx}{\frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} + 2} =$$

$$= \int \frac{1}{2 \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} \right)} (1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}) dx =$$

$$= \int \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1} \underbrace{\frac{1}{2} (1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2})}_{= D \operatorname{tg} \frac{x}{2}} dx =$$

$$= \left[\int \frac{dt}{t^2 + t + 1} \right]_{t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}} ;$$

all'altra parte

$$\int \frac{dt}{t^2 + t + 1} = \int \frac{dt}{t^2 + t + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \int \frac{dt}{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$$

$$= \frac{4}{3} \int \frac{dt}{\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t + \frac{1}{2}\right)\right]^2 + 1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{1}{\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t + \frac{1}{2}\right)\right]^2 + 1} \frac{2}{\sqrt{3}} dt =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctg \left[\frac{2}{\sqrt{3}} \left(t + \frac{1}{2}\right) \right] + c .$$

Risulte pertanto, in ogni intervallo $I \subseteq \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi : k \in \mathbb{Z}\}$:

$$\int \frac{\cos x + 2}{\sin x + 2} dx = \underbrace{\log(\sin x + 2) + \frac{4}{\sqrt{3}} \arctg \left[\frac{2}{\sqrt{3}} \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right) \right]}_{F(x)} + c'$$

[NOTA. Allo stesso risultato si perviene, ma con qualche calcolo in più, se si adoperano le formule in $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ direttamente nell'integrale iniziale]

Poiché $[0, \frac{\pi}{2}]$ non contiene punti del tipo $(2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, abbiamo:

$$\int_{[0, \frac{\pi}{2}]} \frac{\cos x + 2}{\sin x + 2} dx = \left[F(x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \log 3 + \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left[\frac{2}{\sqrt{3}} \left(1 + \frac{1}{2} \right) \right] -$$

$$- \log 2 - \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) =$$

$$= \log \frac{3}{2} + \frac{4}{\sqrt{3}} \left(\operatorname{arctg} \sqrt{3} - \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} \right) =$$

$$= \log \frac{3}{2} + \frac{4}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) = \log \frac{3}{2} + \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

L'intervallo $[0, 2\pi]$ contiene invece il punto π . Per aggirare queste difficoltà scriviamo

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos x + 2}{\sin x + 2} dx = \int_0^{\pi} \frac{\cos x + 2}{\sin x + 2} dx + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\cos x + 2}{\sin x + 2} dx =$$

(per la continuità della funzione integrale)

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_0^{\pi-\varepsilon} \frac{\cos x + 2}{\sin x + 2} dx + \int_{\pi+\varepsilon}^{2\pi} \frac{\cos x + 2}{\sin x + 2} dx \right] =$$

NOTA : $\int_{\pi}^{2\pi} \dots = - \int_{2\pi}^{\pi} \dots = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(- \int_{2\pi}^{\pi+\varepsilon} \dots \right) =$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\pi+\varepsilon}^{2\pi} \dots$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[[F(x)]_0^{\pi-\varepsilon} + [F(x)]_{\pi+\varepsilon}^{2\pi} \right] =$$

$$= \log 2 + \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{\pi}{2} - \log 2 - \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{\pi}{6} \text{ctg} +$$

$$+ \log 2 + \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{\pi}{6} - \log 2 - \frac{4}{\sqrt{3}} \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4\pi}{\sqrt{3}}$$

b)

Osserviamo preliminarmente che la funzione $f(x) = \frac{1}{e^x \sqrt{e^x - 4}}$ è integrabile in $[\log 5, +\infty[$

in quanto si ha, per ogni $p > 0$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\frac{1}{x^p}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^p}{e^x} \cdot \frac{1}{\sqrt{e^x - 4}} = 0,$$

da cui, prendendo $p > 1$, si ha l'integrabilità di f per una variante del criterio di integrabilità.

Periamo al calcolo dell'integrale:

$$\int_{[\log 5, +\infty]} \frac{dx}{e^x \sqrt{e^x - 4}} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\log 5}^k \frac{1}{e^{2x} \sqrt{e^x - 4}} e^x dx =$$

(effettuando la sostituzione $e^x = t$)

$$= \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_5^{e^k} \frac{dt}{t^2 \sqrt{t-4}} =$$

(con l'ulteriore sostituzione $\sqrt{t-4} = z$, per la quale si ha $D\sqrt{t-4} = \frac{1}{2\sqrt{t-4}}$, $t = 4 + z^2$)

$$= \lim_{k \rightarrow +\infty} 2 \int_1^{\sqrt{e^k - 4}} \frac{dz}{(4 + z^2)^2} =$$

$$\int \frac{dz}{(4 + z^2)^2} = \frac{1}{16} \int \frac{dz}{[1 + (\frac{z}{2})^2]^2} =$$

$$= \frac{1}{8} \left[\int \frac{dy}{(1+y^2)^2} \right]_{y=\frac{z}{2}} ;$$

per l'integrale $I_n = \int \frac{dy}{(1+y^2)^n}$, $n \in \mathbb{N}$,
 si ha le formule ricorrente

$$I_{n+1} = \frac{1}{2n} \left[(2n-1) I_n + \frac{y}{(1+y^2)^n} \right] ;$$

per tanto

$$I_2 = \frac{1}{2} \left[\arctan y + \frac{y}{1+y^2} \right] + C$$

e quindi

$$\int \frac{dz}{(4+z^2)^2} = \frac{1}{16} \left[\arctan \frac{z}{2} + \frac{\frac{z}{2}}{1+\frac{z^2}{4}} \right] + C' =$$

$$= \frac{1}{16} \left[\arctan \frac{z}{2} + \frac{2z}{4+z^2} \right] + C'$$

$$= \lim_{K \rightarrow +\infty} \frac{1}{8} \left[\arctan \frac{z}{2} + \frac{2z}{4+z^2} \right]_{-1}^{\sqrt{e^K-4}} =$$

$$= \frac{1}{8} \left(\frac{\pi}{2} - \left(\arctan \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \right) \right)$$