

⑧

$$a) \int (tg x + 1)^2 e^{2x} dx = \int (tg^2 x + 2tg x + 1) e^{2x} dx =$$

$$= \int \underbrace{(tg^2 x + 1)}_{Dtg x} e^{2x} dx + 2 \int tg x \cdot e^{2x} dx =$$

$$= tg x \cdot e^{2x} - \int tg x \cdot 2e^{2x} dx + 2 \int tg x \cdot e^{2x} dx =$$

$$= tg x \cdot e^{2x} + c.$$

$$\int \log x \sqrt{\frac{1 - \log^2 x}{x^2(1 + \log^2 x)}} dx =$$

(dato che il dominio della funzione integranda è contenuto in $]0, +\infty[$)

$$= \int \frac{\log x}{x} \sqrt{\frac{1 - \log^2 x}{1 + \log^2 x}} dx =$$

$$(osservando che $D \log^2 x = \frac{2 \log x}{x}$)$$

$$= \frac{1}{2} \left[\int \sqrt{\frac{1-u}{1+u}} du \right]_{u = \log^2 x} ;$$

l'integrale $\int \sqrt{\frac{1-u}{1+u}} du$ è del tipo $\int R(u, \sqrt[n]{\frac{au+b}{cu+d}}) du$,

con $m \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ e $R(x, y)$ funzione razionale di due variabili; come è noto dalle teorie, il calcolo di un integrale di questo tipo si riconduce a quello dell'integrale di una funzione razionale applicando la seguente formula di integrazione per sostituzione con $u = \varphi(t)$, dove φ è la funzione inversa di

$$u \rightarrow \sqrt[n]{\frac{au+b}{cu+d}};$$

nel nostro caso $\varphi^{-1}(u) = \sqrt{\frac{1-u}{1+u}}$; per ricavare l'espressione di $\varphi(t)$ basta risolvere l'equazione nell'incognita u

$$\sqrt{\frac{1-u}{1+u}} = t;$$

$$\text{si trova: } \frac{1-u}{1+u} = t^2, \quad 1-u = (1+u)t^2,$$

$$1-t^2 = (1+t^2)u \quad \text{e quindi} \quad \varphi(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$\varphi'(t) = \frac{-2t(1+t^2) - 2t(1-t^2)}{(1+t^2)^2} = \frac{-4t}{(1+t^2)^2};$$

pertanto

$$\int \sqrt{\frac{1-u}{1+u}} du = \left[\int t \frac{-4t}{(1+t^2)^2} dt \right]_{-t = \sqrt{\frac{1-u}{1+u}}}.$$

Calcoliamo

$$\int t \frac{-4t}{(1+t^2)^2} dt = -4 \int \frac{t^2+1-1}{(1+t^2)^2} dt =$$

$$= -4 \arctan t + 4 \int \frac{dt}{(1+t^2)^2} =$$

ricordando che per l'integrale $I_n = \int \frac{dt}{(1+t^2)^n}$,
 $n \in \mathbb{N}$, si ha la formula ricorrente:

$$I_{n+1} = \frac{1}{2n} \left[(2n-1) I_n + \frac{t}{(1+t^2)^n} \right]$$

$$= -4 \arctan t + 4 \cdot \frac{1}{2} \left[\arctan t + \frac{t}{1+t^2} \right] + C =$$

$$= -2 \arctan t + \frac{2t}{1+t^2} + C ;$$

pertanto

$$\int \sqrt{\frac{1-u}{1+u}} du = -2 \arctan \sqrt{\frac{1-u}{1+u}} + \frac{2 \sqrt{\frac{1-u}{1+u}}}{1 + \frac{1-u}{1+u}} + C$$

$$= -2 \arctan \sqrt{\frac{1-u}{1+u}} + (1+u) \sqrt{\frac{1-u}{1+u}} + C =$$

(osservando che il dominio di $\sqrt{\frac{1-u}{1+u}}$ è $]-1, 1[$ e che in tale intervallo è $1+u > 0$)

$$= -2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-u}{1+u}} + \sqrt{1-u^2} + C$$

e, in definitiva,

$$\int \log x \sqrt{\frac{1 - \log^2 x}{x^2(1 + \log^2 x)}} dx =$$

$$= -\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1 - \log^2 x}{1 + \log^2 x}} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \log^4 x} + C'$$

b₁) La funzione $f(x)$ è a valori positivi e, dato che

$$1 < \sqrt{(3 - \sin x + \cos x)^{p+1}} < 5^{\frac{p+1}{2}} \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

valere la catena di disuguaglianze

$$(*) \quad g(x) < f(x) < 5^{\frac{p+1}{2}} g(x)$$

$$[(2+\sin x)^p + \sin x + \cos x + 5]$$

$$\forall x \in [\pi, +\infty[$$

dove n è posto $g(x) = \frac{1}{[(2+p)x^p + \sin x + \cos x + 5]^2}$

$\forall x \in [\pi, +\infty[$. Dalle (*) segue facilmente che:

f integrabile $\Leftrightarrow g$ integrabile ;

infatti si ha:

$$g \text{ integrabile} \Rightarrow 5^{\frac{p+1}{2}} g \text{ integrabile} \Rightarrow \\ \Rightarrow f \text{ integrabile ;}$$

↓ per le regole d'integrazione ;

$$g \text{ non integrabile} \Rightarrow f \text{ non integrabile}$$

↓ per le prime d'integrazione.

D'altra parte la funzione g è, per $x \rightarrow +\infty$, asintotica alla stessa dello stesso ordine di $\frac{1}{x^{2p}}$; infatti

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{\frac{1}{x^{2p}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^p}{(2+p)x^p + \sin x + \cos x + 5} \right]^2 = \\ = \frac{1}{(2+p)^2} .$$

Peritonto :

$$f \text{ integrabile} \Leftrightarrow 2p > 1 \Leftrightarrow p > \frac{1}{2}.$$

$b_2)$ Per $p=1$ si ha

$$f(x) = \frac{3 - \sin x + \cos x}{[3x + \sin x + \cos x + 5]^2}$$

e quindi, essendo $3 - \sin x + \cos x$ la derivata
di $3x + \sin x + \cos x + 5$,

$$\int f(x) dx = - \frac{1}{3x + \sin x + \cos x + 5} + C;$$

peritonto

$$\int_{[\pi, +\infty[} f(x) dx = \lim_{K \rightarrow +\infty} \left[- \frac{1}{3x + \sin x + \cos x + 5} \right]_{\pi}^K =$$

$$= \frac{1}{3\pi + 4}.$$