

5

2)

$$\int_{\frac{1}{5}}^5 \left(\sin x^2 - \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x^2} \right) dx$$

$$= \int_{\frac{1}{5}}^5 \sin x^2 dx + \int_{\frac{1}{5}}^5 \left(-\frac{1}{x^2} \right) \sin \left(\frac{1}{x} \right)^2 dx =$$

(dato che $D \frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2}$ nel secondo integrale possiamo effettuare la sostituzione $\frac{1}{x} = t$; per i limiti di integrazione osserviamo che:

$$\text{per } x = \frac{1}{5} \rightarrow \frac{1}{x} = 5, \quad \text{per } x = 5 \rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{5}$$

$$= \int_{\frac{1}{5}}^5 \sin x^2 dx + \int_5^{\frac{1}{5}} \sin t^2 dt =$$

$$= \int_{\frac{1}{5}}^5 \sin x^2 dx - \int_{\frac{1}{5}}^5 \sin t^2 dt = 0$$

┌ NOTA : le primitive della funzione $\sin x^2$
non sono esprimibili elementarmente ┘

5-2

$$\begin{aligned}
 & \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(\frac{1}{x} \cos \frac{\pi}{x} - \frac{1}{\pi x^2} \sin \pi x \right) dx = \\
 &= \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1}{x} \cos \frac{\pi}{x} dx - \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1}{\pi x^2} \sin \pi x dx = \\
 &= -\frac{1}{\pi} \int_{\frac{1}{2}}^2 x \underbrace{\left(-\frac{\pi}{x^2} \cos \frac{\pi}{x} \right)}_{D \sin \frac{\pi}{x}} dx - \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1}{\pi x^2} \sin \pi x dx =
 \end{aligned}$$

(usando per il primo integrale la formula di integrazione per parti)

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{\pi} \left[x \sin \frac{\pi}{x} \right]_{\frac{1}{2}}^2 + \frac{1}{\pi} \int_{\frac{1}{2}}^2 \sin \frac{\pi}{x} dx + \\
 &+ \frac{1}{\pi} \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(-\frac{1}{x^2} \right) \sin \frac{\pi}{x} dx =
 \end{aligned}$$

(effettuando nell'ultimo integrale la sostituzione $\frac{1}{x} = t$)

$$= -\frac{1}{\pi} \left[2 \sin \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \sin 2\pi \right] +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_{\frac{1}{2}}^2 \sin \frac{\pi}{x} dx + \frac{1}{\pi} \int_2^{\frac{1}{2}} \sin \frac{\pi}{t} dt = -\frac{2}{\pi}$$

b)

La funzione $f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{\sqrt{x} e^{\sqrt{x}}}$ è assolutamente

integrabile in $[1, +\infty[$; infatti, sfruttando il limite notevole $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^\alpha}{e^t} = 0 \quad \forall \alpha \in]0, +\infty[$, si ha

che $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|f(x)|}{\frac{1}{x^p}} = 0 \quad \forall p \in]0, +\infty[$ (*), da cui,

prendendo $p > 1$, si ottiene l'assoluta integrabilità di f grazie ad una variante del criterio di integrabilità. Per provare la (*) basta scrivere:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|f(x)|}{\frac{1}{x^p}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^p (2x^2 - x - 1)}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{e^{\sqrt{x}}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^p (2x^2 - x - 1)}{\sqrt{x}}}{\frac{x^p \cdot x^2}{\sqrt{x}}} \cdot \frac{x^{p+\frac{3}{2}}}{e^{\sqrt{x}}} =$$

$$= 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x})^{2p+3}}{e^{\sqrt{x}}} = 0$$

Passiamo al calcolo dell'integrale :

$$\int_{[1, +\infty[} \frac{2x^2 - x - 1}{\sqrt{x} e^{\sqrt{x}}} dx = \lim_{k \rightarrow +\infty} 2 \int_1^k \frac{2x^2 - x - 1}{e^{\sqrt{x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} dx =$$

(effettuando la sostituzione $\sqrt{x} = t$)

$$= \lim_{k \rightarrow +\infty} 2 \int_1^{\sqrt{k}} (2t^4 - t^2 - 1) e^{-t} dt =$$

l'integrale indefinito $\int (2t^4 - t^2 - 1) e^{-t} dt$

si calcola per parti :

$$\begin{aligned} \int (2t^4 - t^2 - 1) e^{-t} dt &= -e^{-t} (2t^4 - t^2 - 1) + \\ &+ \int e^{-t} (8t^3 - 2t) dt = -e^{-t} (2t^4 - t^2 - 1) - e^{-t} (8t^3 - 2t) + \\ &+ \int e^{-t} (24t^2 - 2) dt = -e^{-t} (2t^4 + 8t^3 - t^2 - 2t - 1) - \\ &- e^{-t} (24t^2 - 2) + 48 \int e^{-t} t dt = \\ &= -e^{-t} (2t^4 + 8t^3 + 23t^2 + 46t - 3) + 48 \int e^{-t} dt = \\ &= -e^{-t} (2t^4 + 8t^3 + 23t^2 + 46t + 45) + C \end{aligned}$$

$$= \lim_{k \rightarrow +\infty} 2 \left[-e^{-t} \underbrace{P(t)}_{2t^4 + 8t^3 + 23t^2 + 46t + 45} \right]_1^{\sqrt{k}} =$$

$$\left(\text{dato che } \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{P(t)}{e^t} = 0 \right)$$

$$= 2 e^{-1} P(1) = 248 e^{-1} .$$