

③

a)

$$\int \frac{2x^3 + 5x^2 + 7x + 5}{x^4 + 9x^2 + 25} dx$$

Perché il trinomio  $t^2 + 9t + 25$  ha discriminante negativo  $(-19)$  l'equazione  $x^4 + 9x^2 + 25 = 0$  non ha radici reali; precisamente si ha:

$$(*) \quad x^4 + 9x^2 + 25 = 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad x^2 = \frac{-9 + \sqrt{19}i}{2} \quad \text{oppure} \quad x^2 = \frac{-9 - \sqrt{19}i}{2}.$$

Per decomporre  $x^4 + 9x^2 + 25$  nel prodotto di due trinomi di secondo grado a coefficienti reali (con discriminante negativo) conviene, anziché calcolare le radici delle (\*), procedere nel seguente modo:

$$\begin{aligned} x^4 + 9x^2 + \underbrace{25}_{5^2} &= x^4 + 5^2 + 10x^2 - 10x^2 + 9x^2 = \\ &= (x^2 + 5)^2 - x^2 = (x^2 + 5 - x)(x^2 + 5 + x). \end{aligned}$$

Cerchiamo quindi le quattro costanti reali  $A, B, C$  e  $D$ , per le quali risulta:

$$\frac{2x^3 + 5x^2 + 7x + 5}{x^4 + 9x^2 + 25} = \frac{Ax + B}{x^2 - x + 5} + \frac{Cx + D}{x^2 + x + 5} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$



$\hat{=}$ 

3-2

$$2x^3 + 5x^2 + 7x + 5 = (Ax + B)(x^2 + x + 5) + (Cx + D)(x^2 - x + 5) \quad \forall x \in \mathbb{C}$$

 $\hat{=}$ 

$$2x^3 + 5x^2 + 7x + 5 = (A+C)x^3 + (A+B-C+D)x^2 + (5A+B+5C-D)x + 5(B+D)$$

$$\forall x \in \mathbb{C} ;$$

$(A, B, C, D)$  è pertanto la soluzione del sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} A+C = 2 \\ A+B-C+D = 5 \\ 5A+B+5C-D = 7 \\ 5(B+D) = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+C = 2 \\ A-C+B+D = 5 \\ 5(A+C)+B-D = 7 \\ B+D = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

sostituendo la prima equazione nella terza e la quarta nelle seconde

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A+C = 2 \\ A-C = 4 \\ B-D = -3 \\ B+D = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 3 \\ C = -1 \\ B = -1 \\ D = 2 \end{cases}$$

3-3

$$\int \frac{2x^3 + 5x^2 + 7x + 5}{x^4 + 9x^2 + 25} dx =$$

$$= \int \frac{3x-1}{x^2-x+5} dx - \int \frac{x-2}{x^2+x+5} dx =$$

$$= \frac{3}{2} \int \frac{2x - \frac{2}{3}}{x^2-x+5} dx - \frac{1}{2} \int \frac{2x-4}{x^2+x+5} dx =$$

$$= \frac{3}{2} \int \frac{\overset{=D(x^2-x+5)}{2x-1} + \frac{1}{3}}{x^2-x+5} dx - \frac{1}{2} \int \frac{\overset{=D(x^2+x+5)}{2x+1} - 5}{x^2+x+5} dx =$$

$$= \frac{3}{2} \log(x^2-x+5) + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2-x+\frac{1}{4}+\frac{19}{4}} -$$

$$- \frac{1}{2} \log(x^2+x+5) + \frac{5}{2} \int \frac{dx}{x^2+x+\frac{1}{4}+\frac{19}{4}} \quad (*)$$

$$\int \frac{dx}{x^2-x+\frac{1}{4}+\frac{19}{4}} = \frac{1}{\frac{19}{4}} \int \frac{dx}{\frac{(x-\frac{1}{2})^2}{\frac{19}{4}} + 1} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{19}} \int \frac{\frac{2}{\sqrt{19}} dx}{\left[\frac{2(x-\frac{1}{2})}{\sqrt{19}}\right]^2 + 1} = \frac{2}{\sqrt{19}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{19}} + K$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + x + \frac{1}{4} + \frac{19}{4}} =$$

(possiamo utilizzare l'integrale già calcolato)

$$= - \int \frac{-dx}{(-x)^2 - (-x) + \frac{1}{4} + \frac{19}{4}} = - \left[ \int \frac{dz}{z^2 - z + \frac{1}{4} + \frac{19}{4}} \right]_{z=-x} =$$

$$= - \frac{2}{\sqrt{19}} \operatorname{arctg} \frac{-2x-1}{\sqrt{19}} + K_1 =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{19}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{19}} + K_2$$

$$(*) = \log \sqrt{\frac{(x^2 - x + 5)^3}{x^2 + x + 5}} + \frac{1}{\sqrt{19}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{19}} +$$

$$+ \frac{5}{\sqrt{19}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{19}} + C$$

b)

La funzione  $f(x) = \frac{1+4x^2}{\sqrt{x}} e^{x^2}$  ha

in  $[-1, 1]$  una sola discontinuità nel punto

0 ( $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ ). Si osserva subito

che è

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x)|}{\frac{1}{\sqrt{|x|}}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1+4x^2) e^{x^2} = 1$$

e quindi  $f$  è integrabile per il criterio di integrabilità ( $p = \frac{1}{2}$ ).

Si ha, per definizione,

$$\begin{aligned} \int_{[-1,1]} \frac{1+4x^2}{\sqrt{|x|}} e^{x^2} dx &= \\ &= \int_{[-1,0]} \frac{1+4x^2}{\sqrt{|x|}} e^{x^2} dx + \int_{[0,1]} \frac{1+4x^2}{\sqrt{|x|}} e^{x^2} dx = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1+4x^2}{\sqrt{|x|}} e^{x^2} dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1+4x^2}{\sqrt{|x|}} e^{x^2} dx = \end{aligned}$$

(effettuando nel primo integrale il cambiamento di variabile  $x = -t$ )

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_1^{\varepsilon} \frac{1+4t^2}{\sqrt{|t|}} e^{t^2} (-1) dt + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1+4x^2}{\sqrt{|x|}} e^{x^2} dx =$$

$$= 2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1+4x^2}{\sqrt{x}} e^{x^2} dx$$

Calcoliamo l'integrale indefinito:

$$\int \frac{1+4x^2}{\sqrt{x}} e^{x^2} dx =$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{x}} e^{x^2} dx + \int 4x\sqrt{x} e^{x^2} dx =$$

(calcolando per parti il primo integrale)

$$= 2\sqrt{x} e^{x^2} - \int 2\sqrt{x} e^{x^2} \cdot 2x dx + \int 4x\sqrt{x} e^{x^2} dx =$$

(dato che gli integrali indefiniti sono opposti)

3-7

$$= 2\sqrt{x} e^{x^2} + C.$$

Partento

$$\int_{[-1,1]} \frac{1+4x^2}{\sqrt{|x|}} e^{x^2} dx = 2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left[ 2\sqrt{x} e^{x^2} \right]_{-\varepsilon}^1 =$$

$$= 4e.$$