

(2)

a)

$$\int \frac{x}{\sqrt{2x^2+x+1}} dx =$$

facciamo figurare al numeratore la derivata del radicando: $D(2x^2+x+1) = 4x+1$

$$= \frac{1}{4} \int \frac{4x+1-1}{\sqrt{2x^2+x+1}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{4x+1}{2\sqrt{2x^2+x+1}} dx - \frac{1}{4} \int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+x+1}} =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\int \frac{dy}{2\sqrt{y}} \right]_{y=2x^2+x+1} - \frac{1}{4} \int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+x+1}} =$$

dato che il discriminante del trinomio $2x^2+x+1$ è negativo, possiamo condurre il calcolo dell'integrale all'integrale immediato

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{\sqrt{y^2+1}} &= \operatorname{arcsinh} y + c = \\ &= \ln(y + \sqrt{y^2+1}) + c \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{2x^2+x+1} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{2}}} =$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{2x^2 + x + 1} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{16} + \frac{1}{2} - \frac{1}{16}}} =$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{2x^2 + x + 1} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{(x + \frac{1}{4})^2 + \frac{7}{16}}} =$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{2x^2 + x + 1} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\frac{\sqrt{7}}{4}} \int \frac{dx}{\sqrt{[\frac{4}{\sqrt{7}}(x + \frac{1}{4})]^2 + 1}} =$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{2x^2 + x + 1} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \int \frac{\frac{4}{\sqrt{7}} dx}{[\frac{4}{\sqrt{7}}(x + \frac{1}{4})]^2 + 1} =$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{2x^2 + x + 1} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \log \left(\frac{4}{\sqrt{7}} \left(x + \frac{1}{4}\right) + \sqrt{\left[\frac{4}{\sqrt{7}} \left(x + \frac{1}{4}\right)\right]^2 + 1} \right) +$$

+ C =

Proviamo di scrivere in maniera più semplice l'argomento del logaritmo.

$$= \frac{1}{2} \sqrt{2x^2 + x + 1} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \log \left(\frac{1}{\sqrt{7}} (4x+1) + \sqrt{\frac{(4x+1)^2}{7} + 1} \right) + C =$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{2x^2 + x + 1} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \log \left(\frac{1}{\sqrt{7}} (4x+1) + \frac{1}{\sqrt{7}} \sqrt{(4x+1)^2 + 7} \right) + C =$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{2x^2 + x + 1} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \log \left(4x+1 + \sqrt{(4x+1)^2 + 7} \right) + C'$$

b) Si nota subito che è :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left| \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{3} x}{x^2} \right|}{\frac{1}{|x|^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} |\operatorname{arctg} \sqrt{3} x| = \frac{\pi}{2},$$

quindi $\frac{\operatorname{arctg} \sqrt{3} x}{x^2}$ è integrabile per il criterio di integrabilità ($p=2$).

Calcoliamo dunque l'integrale indefinito :

$$\int \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{3} x}{x^2} = \quad (\text{per parte})$$

$$= \left(-\frac{1}{x}\right) \operatorname{arctg} \sqrt{3} x + \int \frac{1}{x} \frac{\sqrt{3}}{1+3x^2} dx =$$

$$= -\frac{1}{x} \operatorname{arctg} \sqrt{3} x + \sqrt{3} \int \frac{dx}{x(1+3x^2)} =$$

cerchiamo le costanti reali A , B e C tali che :

$$\frac{1}{x(1+3x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{1+3x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

⇕

$$1 = A(1+3x^2) + (Bx+C)x \quad \forall x \in \mathbb{C}$$

per $x=0$ $1 = A$, quindi

$$1 = (3+B)x^2 + Cx + 1 \quad \forall x \in \mathbb{C} ,$$

per tanto $B = -3$, $C = 0$

$$= -\frac{1}{x} \operatorname{arctg} \sqrt{3}x + \sqrt{3} \log |x| - 3\sqrt{3} \int \frac{x dx}{1+3x^2} =$$

$$= -\frac{1}{x} \operatorname{arctg} \sqrt{3}x + \sqrt{3} \log |x| - \frac{3\sqrt{3}}{6} \int \frac{6x dx}{1+3x^2} =$$

$$= -\frac{1}{x} \operatorname{arctg} \sqrt{3}x + \sqrt{3} \log |x| - \frac{\sqrt{3}}{2} \log (1+3x^2) + C$$

$$= -\frac{1}{x} \operatorname{arctg} \sqrt{3}x + \sqrt{3} \log \frac{|x|}{\sqrt{1+3x^2}} + C .$$

Partenito

$$\int_{]-\infty, -1]} \frac{\arctan \sqrt{3} x}{x^2} dx =$$

$$= \lim_{h \rightarrow -\infty} \int_h^{-1} \frac{\arctan \sqrt{3} x}{x^2} dx =$$

$$= \lim_{h \rightarrow -\infty} \left[-\frac{1}{x} \arctan \sqrt{3} x + \sqrt{3} \log \frac{|x|}{\sqrt{1+3x^2}} \right]_h^{-1} =$$

$$= \arctan(-\sqrt{3}) + \sqrt{3} \log \frac{1}{2} - \sqrt{3} \log \frac{1}{\sqrt{3}} =$$

$$= -\frac{\pi}{3} - \sqrt{3} \log \frac{\sqrt{3}}{2} .$$