

15

15-1

$$a) \int x^5 e^{3x^2} dx = \frac{1}{2} \int (x^2)^2 e^{3x^2} \cdot \underbrace{2x}_{D_{x^2}} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\int y^2 e^{3y} dy \right]_{y=x^2};$$

l'integrale $\int y^2 e^{3y} dy$ si calcola facilmente per parti:

$$\begin{aligned} \int y^2 e^{3y} dy &= y^2 \frac{e^{3y}}{3} - \frac{2}{3} \int y e^{3y} dy = \\ &= \frac{1}{3} y^2 e^{3y} - \frac{2}{3} \left[\frac{1}{3} y e^{3y} - \frac{1}{3} \int e^{3y} dy \right] = \\ &= \frac{1}{3} y^2 e^{3y} - \frac{2}{9} y e^{3y} + \frac{2}{27} e^{3y} + C; \end{aligned}$$

per tanto

$$\begin{aligned} \int x^5 e^{3x^2} dx &= \frac{1}{6} x^4 e^{3x^2} - \frac{1}{9} x^2 e^{3x^2} + \\ &+ \frac{1}{27} e^{3x^2} + C'. \end{aligned}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} \cos^6 \sqrt{x}} = 2 \int \frac{1}{\cos^6 \sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} dx =$$

$$= 2 \left[\int \frac{dy}{\cos^6 y} \right]_{y=\sqrt{x}} ;$$

$$\int \frac{dy}{\cos^6 y} = \int \frac{1}{\cos^4 y} \cdot \left(\frac{1}{\cos^2 y} \right) dy =$$

Dtg x

$$= \int \left(\frac{1}{\cos^2 y} \right)^2 \frac{1}{\cos^2 y} dy =$$

$$= \int (1 + \tan^2 y)^2 \cdot (Dtg y) dy =$$

$$= \left[\int (1 + z^2)^2 dz \right]_{z=\tan y} = \frac{\tan^5 y}{5} + 2 \frac{\tan^3 y}{3} + \tan y + C ;$$

pentento

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} \cos^6 \sqrt{x}} = \frac{2}{5} \tan^5 \sqrt{x} + \frac{4}{3} \tan^3 \sqrt{x} + 2 \tan \sqrt{x} + C'.$$

b) Tutte e tre le funzioni hanno come unico punto di discontinuità il punto 0.

Essendo $2 + \sin \frac{1}{x^3} \geq 1 \quad \forall x \in]0,1]$, la funzione f è a valori positivi e inoltre

$$f(x) \geq \frac{1}{x} \quad \forall x \in]0,1] ;$$

dato che $\frac{1}{x}$ non è integrabile in $[0,1]$, per il teorema del confronto neanche f è integrabile.

Per la funzione g osserviamo che

$$|g(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \forall x \in]0,1] ;$$

dato che $\frac{1}{\sqrt{x}}$ è integrabile in $[0,1]$, la funzione g è assolutamente integrabile e quindi integrabile.

Per la funzione h il confronto con $\frac{1}{x^p}$ non porta a nessun risultato; infatti si ha:

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x)}{\frac{1}{x^p}} = \begin{cases} = 0 & \text{se } p > 1 \\ \neq & \text{se } 0 < p \leq 1 \end{cases},$$

ma nessuna delle due informazioni permette di

decidere sulla integrabilità di $f(x)$.

Ricorriamo alla definizione:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x^3} dx =$$

(facendo figurare la derivata di $\frac{1}{x^3}$)

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left[-\frac{1}{3} \int_{\varepsilon}^1 \underbrace{x^3 \cdot \frac{-3}{x^4} \sin \frac{1}{x^3}}_{D(-\cos \frac{1}{x^3})} dx \right] =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left[-\frac{1}{3} \left(\left[x^3 \left(-\cos \frac{1}{x^3} \right) \right]_{\varepsilon}^1 - \int_{\varepsilon}^1 3x^2 \left(-\cos \frac{1}{x^3} \right) dx \right) \right];$$

osserviamo che:

$$- \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left[x^3 \left(-\cos \frac{1}{x^3} \right) \right]_{\varepsilon}^1 = -\cos 1$$

$$- \text{il limite } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\varepsilon}^1 3x^2 \cos \frac{1}{x^3} dx \text{ esiste}$$

finito poiché $3x^2 \cos \frac{1}{x^3}$ è integrabile in $[0,1]$,
dato che questa funzione ha in 0 una discontinuità eliminabile.

Pertanto il limite

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x^3} dx$$

esiste finito, quando h è integrabile in $[0,1]$.