

(10)

2.) Calcoliamo dapprima l'integrale indefinito

$$\int \frac{\cos^2 x}{4 - \sin^2 x} dx$$

La funzione integranda è del tipo

$$(1) \quad R(\sin^2 x, \cos^2 x, \sin x \cos x)$$

($R(u, v, w)$ funzione razionale di tre variabili);
come è noto dalle teoremi (1) si può esprimere, negli intervalli che non contengono punti del tipo $\frac{\pi}{2} + h\pi$, $h \in \mathbb{Z}$, nelle forme

$$(2) \quad R_1(\tan x)$$

($R_1(u)$ funzione razionale di una variabile)
e l'integrazione indefinita delle (2) si riconduce facilmente all'integrazione indefinita di una funzione razionale (basta moltiplicare e dividere per $1 + \tan^2 x$). Per scrivere le (1) nelle forme (2) si utilizzano le formule

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x}, \quad \sin^2 x = \frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x},$$

$$\sin x \cos x = \frac{\tan x}{1 + \tan^2 x};$$

nel nostro caso arriviamo più rapidamente allo scopo dividendo numeratore e denominatore per $\cos^2 x$:

$$\int \frac{\cos^2 x}{4 - \sin^2 x} dx = \int \frac{1}{\frac{4}{\cos^2 x} - \tan^2 x} dx =$$

negli intervalli $I \subseteq \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$

$$= \int \frac{1}{4(1 + \tan^2 x) - \tan^2 x} dx = \int \frac{dx}{4 + 3\tan^2 x} =$$

$$= \int \frac{1}{(1 + \tan^2 x)(4 + 3\tan^2 x)} \underbrace{(1 + \tan^2 x)}_{D \tan x} dx =$$

$$= \left[\int \frac{dy}{(1 + y^2)(4 + 3y^2)} \right]_{y = \tan x}$$

Calcoliamo $\int \frac{dy}{(1 + y^2)(4 + 3y^2)}$. La funzione

integrandale si scompone nel seguente modo:

$$(3) \frac{1}{(1+y^2)(4+3y^2)} = \frac{Ay+B}{1+y^2} + \frac{Cy+D}{4+3y^2} \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

$$\Updownarrow$$

$$1 = (Ay+B)(4+3y^2) + (Cy+D)(1+y^2)$$

$$\forall y \in \mathbb{C}$$

ove A, B, C, D sono opportune costanti reali univocamente determinate dalla precedente condizione. Per pervenire più rapidamente alla scomposizione (3) potremo ragionare nel modo seguente: consideriamo la funzione

$$\frac{1}{(1+z)(4+3z)}$$

che, come sappiamo, si scompone come

$$\frac{1}{(1+z)(4+3z)} = \frac{E}{1+z} + \frac{F}{4+3z} \quad \forall z \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -\frac{4}{3}\}$$

$$\Updownarrow$$

$$1 = E(4+3z) + F(1+z) \quad \forall z \in \mathbb{C} ;$$

$$\text{per } z = -1$$

$$1 = E$$

$$\text{per } z = -\frac{4}{3}$$

$$1 = -\frac{1}{3} F, \quad F = -3$$

ne segue che :

$$\frac{1}{(1+y^2)(4+3y^2)} = \frac{1}{1+y^2} - \frac{3}{4+3y^2} \quad \forall y \in \mathbb{R};$$

$$\int \frac{dy}{(1+y^2)(4+3y^2)} = \arctan y - \frac{3}{4} \int \frac{dy}{1 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2} =$$

$$= \arctan y - \frac{3}{\sqrt{2}} \int \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} dy}{1 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2} =$$

$$= \arctan y - \frac{3}{\sqrt{2}} \arctan \frac{\sqrt{3}}{2} y + C.$$

Pertanto si ha :

$$(4) \int \frac{\cos^3 x}{4 - \sin^4 x} dx = \arctan(\tan x) - \frac{3}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \tan x\right) + C$$

(negli intervalli $I \subseteq \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$).

L'intervallo $[0, \pi]$ contiene il punto $\frac{\pi}{2}$.

Allora, per utilizzare il risultato (4) per il calcolo dell'integrale definito, ragioneremo nel modo seguente:

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos^2 x}{4 - \sin^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{4 - \sin^2 x} dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{4 - \sin^2 x} dx =$$

(per la continuità della funzione integranda)

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{\frac{\pi}{2} - \varepsilon} \frac{\cos^2 x}{4 - \sin^2 x} dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\frac{\pi}{2} + \varepsilon}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{4 - \sin^2 x} dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[G(x) \right]_0^{\frac{\pi}{2} - \varepsilon} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[G(x) \right]_{\frac{\pi}{2} + \varepsilon}^{\pi} =$$

$$\left(G(x) = \arctg(\tg x) - \frac{2}{\sqrt{3}} \arctg\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \tg x\right) \right)$$

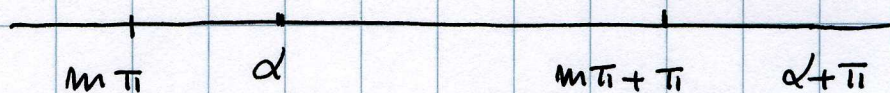
$$= \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\pi}{2} + \left[0 - \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\pi}{2} \right) \right] =$$

$$= \left(1 - \frac{2}{\sqrt{3}} \right) \pi.$$

2₂) Osserviamo che la funzione $g(x) = \frac{\cos^2 x}{4 - \sin^2 x}$ è periodica con periodo π :

$$g(x + m\pi) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall m \in \mathbb{Z}.$$

Abbiamo allora, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, indicando con m il massimo intero K per cui è $K\pi \leq \alpha$ (cioè $\lfloor \frac{\alpha}{\pi} \rfloor$),



$$\int_{\alpha}^{\alpha+\pi} g(x) dx = \int_{\alpha}^{m\pi+\pi} g(x) dx + \int_{m\pi+\pi}^{\alpha+\pi} g(x) dx$$

$$= \int_{\alpha}^{m\pi+\pi} g(x) dx + \int_{m\pi+\pi}^{\alpha+\pi} g(x-\pi) dx =$$

(effettuando nel secondo integrale la sostituzione $x - \pi = t$)

$$= \int_{\alpha}^{m\pi+\pi} g(x) dx + \int_{m\pi}^{\alpha} g(t) dt =$$

$$= \int_{\alpha}^{m\pi + \pi} g(x) dx + \int_{m\pi}^{\alpha} g(x) dx =$$

$$= \int_{m\pi}^{m\pi + \pi} g(x) dx =$$

NOTA. Il passaggio
eseguito fin qui non
supera se $m\pi = \alpha$

$$= \int_{m\pi}^{m\pi + \pi} g(x - m\pi) dx =$$

(con la sostituzione $x - m\pi = t$)

$$= \int_0^{\pi} g(t) dt.$$

b) La funzione f ha un unico punto di discontinuità: $x_0 = 0$, ed ha valori positivi. Poiché

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \arctan \frac{1}{\sqrt{x}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \arctan t = \frac{\pi}{2},$$

la funzione f è, per $x \rightarrow 0^+$, un infinito della stessa ordine di $\frac{1}{x^{1/2}}$; infatti:

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x)}{\frac{1}{x^{p/2}}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^{p/2}}{x^{p/2} \arctan^p \frac{1}{\sqrt{x}}} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^p ;$$

Intento :

$$f \text{ integrabile} \Leftrightarrow \frac{p}{2} < 1 \Leftrightarrow p < 2 .$$

Per $p=1$ si ha :

$$\int_{[0,1]} f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \arctan \frac{1}{\sqrt{x}} dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} 2 \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{2\sqrt{x}} \arctan \frac{1}{\sqrt{x}} dx =$$

(con la sostituzione $\sqrt{x} = t$)

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} 2 \int_{\sqrt{\varepsilon}}^1 \arctan \frac{1}{t} dt =$$

$$\int \arctan \frac{1}{t} dt = t \arctan \frac{1}{t} - \int t \frac{-\frac{1}{t^2}}{1 + (\frac{1}{t})^2} dt =$$

$$= t \arctan \frac{1}{t} + \frac{1}{2} \int \frac{2t}{t^2 + 1} = t \arctan \frac{1}{t} + \frac{1}{2} \log(1+t^2) + C$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} 2 \left[\left[t \arctan \frac{1}{t} \right]_{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}}^1 + \frac{1}{2} \left[\log(1+t^2) \right]_{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}}^1 \right] =$$

$$= 2 \left(\arctan 1 + \frac{1}{2} \log 2 \right) = \frac{\pi}{2} + \log 2.$$