

(9)

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x}{|x^2 - 1|}$$

La funzione f è definita e continua in $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$; esse è anche una funzione dispari, per cui è sufficiente studiare la restrizione all'intervallo $[0, +\infty[\setminus \{1\}$.
Si ha:

$$f(0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0,$$

per tanto:

- i punti 1 e -1 sono dei discontinuità eliminabili per f e il prolungamento continuo di f a tutto $\mathbb{R}$ è la funzione

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } x = 1, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{se } x = -1; \end{cases}$$

- la retta di equazione $y = 0$ è un asintoto orizzontale per il grafico di f sia per $x \rightarrow +\infty$ che per $x \rightarrow -\infty$.
Si ha inoltre: $f(x) > 0 \quad \forall x \in]0, +\infty[\setminus \{1\}$.

Esprimiamo la legge di f esplicitando il valore assoluto:

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{x}{x^2 - 1} & \text{se } x \in]1, +\infty[\cup]-\infty, -1[\\ -\operatorname{arctg} \frac{x}{x^2 - 1} & \text{se } x \in]-1, 1[; \end{cases}$$

per tanto :

$$f'(x) = \text{Derctg} \frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{(x^2-1)^2}} \cdot \frac{x^2-1 - 2x^2}{(x^2-1)^2} =$$

$$= \frac{-(1+x^2)}{(x^2-1)^2 + x^2} \quad \forall x \in]1, +\infty[\cup]-\infty, -1[$$

$$f'(x) = -\text{Derctg} \frac{x}{x^2-1} = \frac{1+x^2}{(x^2-1)^2 + x^2} \quad \forall x \in]-1, 1[;$$

in particolare si ha :

$$f'(0+) = 1 \quad (\text{e quindi dato che } f \text{ è derivabile, anche } f'(0) = 1); \quad \text{si vede in particolare l'Esercizio 318 delle Rassegne};$$

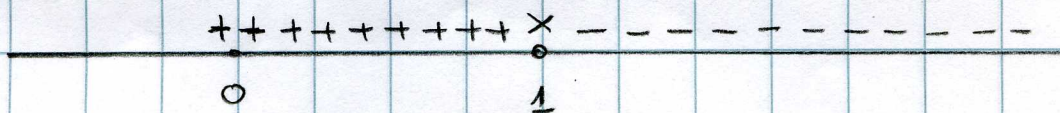
inoltre, per la funzione g , si ha

$$g'(1+) = \lim_{x \rightarrow 1+} f'(x) = -2,$$

$$g'(1-) = \lim_{x \rightarrow 1-} f'(x) = 2,$$

quindi il punto $(1, \frac{\pi}{2})$ è un punto angoloso del grafico di g .

Il segno di f' in $[0, +\infty[\setminus \{1\}$ è :



NOTA. Le f' è una funzione pari; cfr. l'Esercizio 318 delle Raccoglie.

quindi f è crescente in $[0, 1[$ e decrescente in $]1, +\infty[$.

Calcoliamo la derivata seconda:

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= -D \frac{1+x^2}{(x^2-1)^2 + x^2} = \\
 &= - \frac{2x [(x^2-1)^2 + x^2] - (1+x^2) [4x(x^2-1) + 2x]}{[(x^2-1)^2 + x^2]^2} = \\
 &= -2x \frac{(x^2-1)^2 + x^2 - (1+x^2) [2(x^2-1) + 1]}{[(x^2-1)^2 + x^2]^2} = \\
 &= -2x \frac{x^4 - 2x^2 + 1 + x^2 - 2(x^4-1) - (1+x^2)}{[(x^2-1)^2 + x^2]^2} = \\
 &= -2x \frac{-x^4 - 2x^2 + 2}{[(x^2-1)^2 + x^2]^2} = 2x \frac{x^4 + 2x^2 - 2}{[(x^2-1)^2 + x^2]^2}
 \end{aligned}$$

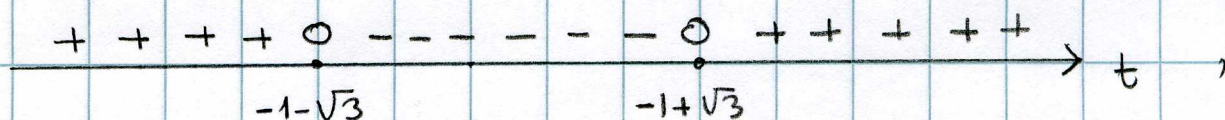
$$\forall x \in]1, +\infty[\cup]-\infty, -1[$$

$$f''(x) = D \frac{1+x^2}{(x^2-1)^2 + x^2} =$$

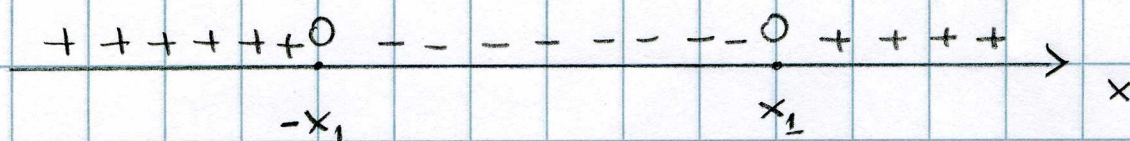
$$= -2x \frac{x^4 + 2x^2 - 2}{[(x^2-1)^2 + x^2]^2}$$

$$\forall x \in]-1, 1[$$

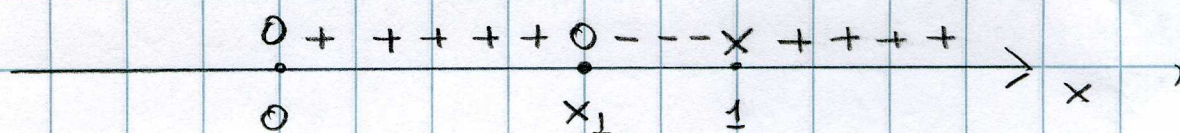
Il segno del trinomio $t^2 + 2t^2 - 2$ è :



quindi il segno di $x^4 + 2x^2 - 2$ è :



($x_1 = \sqrt{\sqrt{3} - 1} \approx 0,85$) e pertanto per f'' in $[0, +\infty[\setminus \{1\}$ si ha : f'' è una funzione dispersa_



dunque la funzione f è :

strettamente convessa in $[0, x_1]$ e in $]1, +\infty[$,

strettamente concava in $[x_1, 1[$,

mentre $(x_1, f(x_1))$ è un punto di flesso proprio.

Poiché f è una funzione dispersa, avremo

anche che f è :

strettamente concave in $]-\infty, -1[$ e in $[-x_1, 0]$,

strettamente convessa in $]-1, -x_1]$,

mentre $(-x_1, -f(x_1))$ è un punto di flesso proprio;

inoltre $(0, 0)$ è un punto di flesso proprio. f è

$$x_1 = \sqrt{\sqrt{3} - 1}$$

$$\left[x_1 < 1 \Leftrightarrow \sqrt{3} - 1 < 1 \Leftrightarrow \right.$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3} < 2 \Leftrightarrow 3 < 4$$

quindi $x_1 < 1$]

$$x_1 \approx 0,85$$

$$f(x_1) = \arctg \frac{\sqrt{\sqrt{3} - 1}}{2 - \sqrt{3}} \approx 1,26$$

$$f'(x_1) = \frac{1 + \sqrt{3} - 1}{(\sqrt{3} - 2)^2 + \sqrt{3} - 1} = \frac{\sqrt{3}}{6 - 3\sqrt{3}} \approx 2,15$$

9-6

