

④

$$f(x) = \left| \frac{x-1}{x} \right| e^{\frac{1}{x}}$$

La funzione  $f$  è definita e continua in  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Si ha inoltre:

$$f(x) = \left| \frac{x-1}{x} \right| e^{\frac{1}{x}} \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

quindi il disegno del grafico di  $f$  si deduce in modo ovvio da quello del grafico della funzione

$$g(x) = \frac{x-1}{x} e^{\frac{1}{x}}$$

(anch'essa definita e continua in  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ). Studiamo pertanto la funzione  $g$ .

Si ha:

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} g(x) = 1$$

(quindi la retta di equazione  $y=1$  è asintoto orizzontale per il grafico di  $g$  sia per  $x \rightarrow -\infty$  che per  $x \rightarrow +\infty$ ),

$$\lim_{x \rightarrow 0+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \underbrace{\left( \frac{x-1}{x} \right)}_{-\infty} \underbrace{\left( e^{\frac{1}{x}} \right)}_{+\infty} = -\infty;$$

invece il  $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x)$  è presente nelle forme

indeterminate  $(+\infty) \cdot 0$ ; per eliminare l'indeterminazione procediamo nel modo seguente:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(1 - \frac{1}{x}\right) e^{\frac{1}{x}} =$$

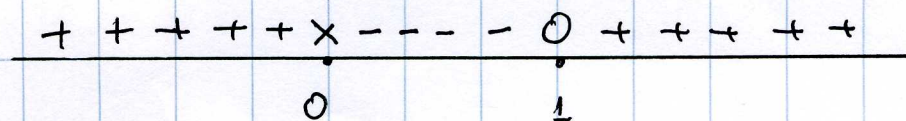
(osservando che  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ )

$$= \lim_{t \rightarrow -\infty} (1-t) e^t = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{1+u}{e^u} = 0;$$

allora la retta di equazione  $x=0$  è asintoto verticale per il grafico della restrizione  $g|_{]0,+\infty[}$ ,

mentre il punto 0 è di discontinuità eliminabile per la restrizione  $g|_{]-\infty,0[}$ .

Il segno della funzione  $g$  coincide con quello della funzione  $\frac{x-1}{x}$  e quindi è:



Calcoliamo le derivate prime:

$$\begin{aligned}
 g'(x) &= \left[ D\left(1 - \frac{1}{x}\right) \right] e^{\frac{1}{x}} + \left(1 - \frac{1}{x}\right) e^{\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \\
 &= \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x^2} \left(1 - \frac{1}{x}\right) e^{\frac{1}{x}} = \\
 &= \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{x}\right)\right) = \frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x}}
 \end{aligned}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Il segno di  $y'$  è  $\begin{array}{c} - - - - x + + + + + \\ \hline 0 \end{array}$ ,

quindi  $y$  è decrescente in  $]-\infty, 0[$  e crescente in  $]0, +\infty[$ .

Osserviamo inoltre che :

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0^-} y'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{1}{x^3}}{e^{-\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\left(-\frac{1}{x}\right)^3}{e^{-\frac{1}{x}}} \\
 &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{-t^3}{e^t} = 0,
 \end{aligned}$$

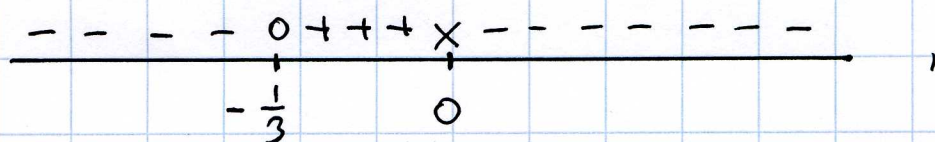
quindi la retta tangente (de sinistra) al grafico del prolungamento continuo di  $y|_{]-\infty, 0[}$  allo

intervallo  $]-\infty, 0]$  in  $(0, 0)$  è l'asse  $x$ .

Le derivate seconde e' :

$$\begin{aligned}
 g''(x) &= -\frac{3}{x^4} e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \\
 &= -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^4} \left(3 + \frac{1}{x}\right) \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}
 \end{aligned}$$

quindi il segno di  $y''$  e' l'opposto di quello di  $\frac{3x+1}{x}$  :



• dunque  $y$  e' strettamente concave in  $]-\infty, -\frac{1}{3}]$  e in  $]0, +\infty[$ , strettamente convessa in  $[-\frac{1}{3}, 0[$  e il punto  $-\frac{1}{3}$  e' un punto di flesso proprio.

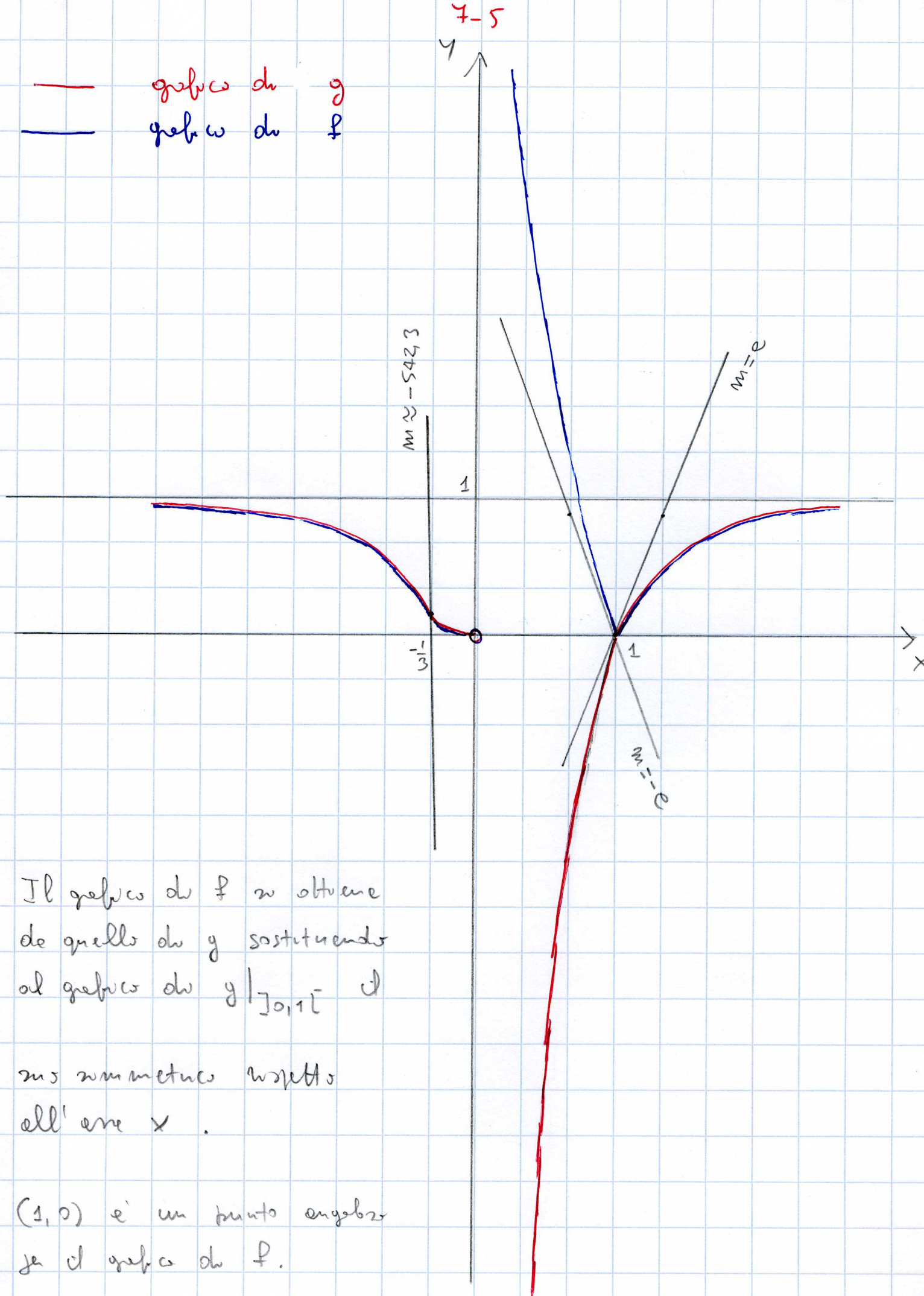
Si ha :

$$\begin{aligned}
 g\left(-\frac{1}{3}\right) &= 4e^{-3} \\
 &\approx 0,19
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g'\left(-\frac{1}{3}\right) &= -27e^3 \\
 &\approx -542,3
 \end{aligned}$$

$$g'(1) = e$$

— grafico di  $g$   
— grafico di  $f$

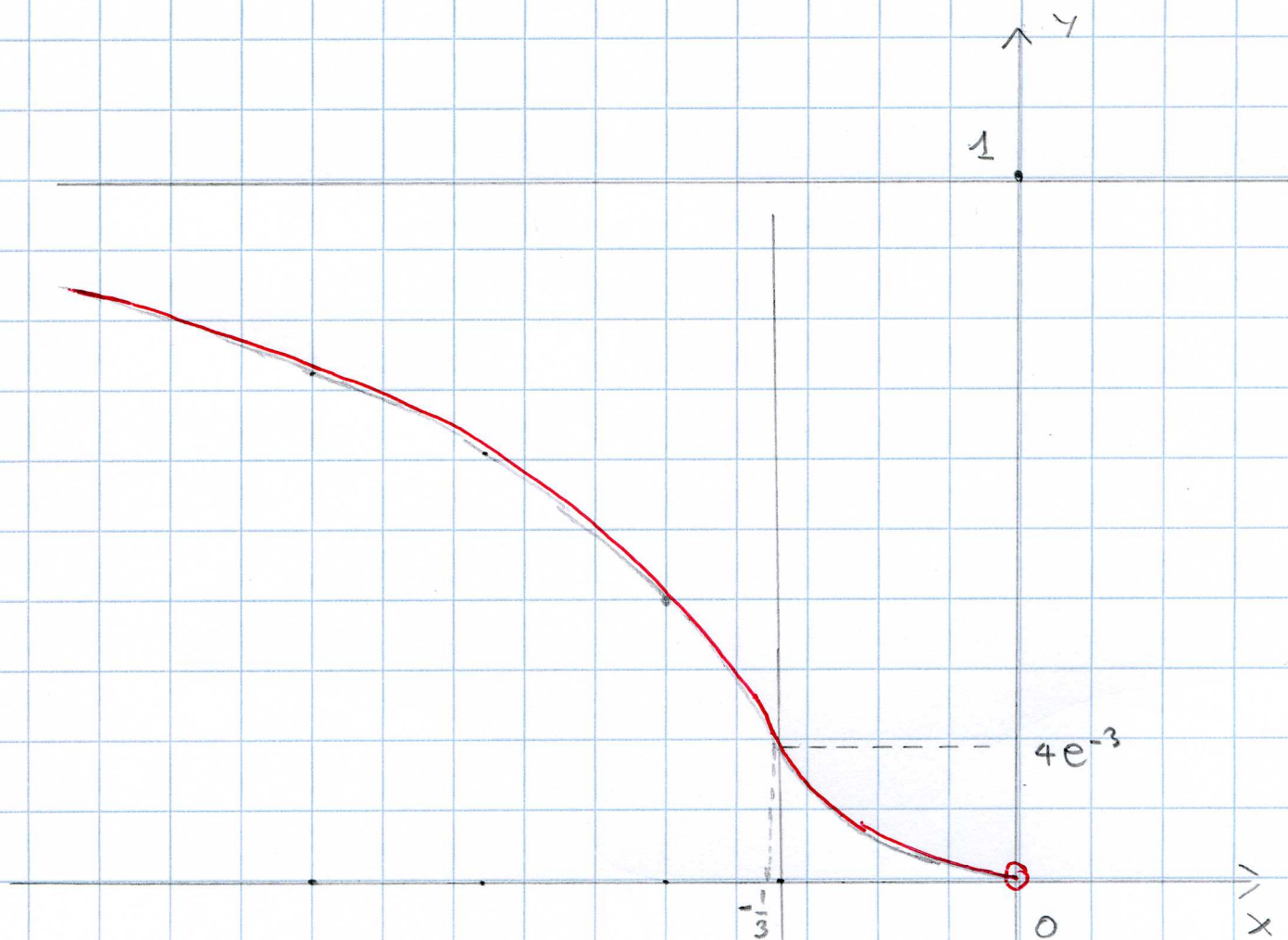


Il grafico di  $f$  si ottiene  
da quello di  $g$  sostituendo  
al grafico di  $g|_{[0,1]}$  il

suo simmetrico rispetto  
all'asse  $x$ .

$(1,0)$  è un punto angoloso  
per il grafico di  $f$ .

7-6



particolare del grafico  
di  $f$

$$m = -27e^3$$