

6

$$f(x) = x \log \frac{x}{x-2}$$

Il dominio della funzione f è l'unione delle soluzioni della disuguaglianza $\frac{x}{x-2} > 0$, cioè l'unione

$$A =]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[.$$

La funzione f è continua in tale unione.

I limiti per $x \rightarrow \pm \infty$ si presentano nella forma indeterminata $(\pm \infty) \cdot 0$; l'undeterminazione si risolve riconducendo il calcolo dei limiti $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x)$ a quello dei limiti notevoli $\lim_{t \rightarrow \pm \infty} (1 + \frac{1}{t})^t = e$;

precisamente:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm \infty} x \log \frac{x}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \log \left(\frac{x}{x-2} \right)^x = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \log \left(\frac{x-2+2}{x-2} \right)^x = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \log \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{x-2}{2}} \right)^{\frac{x-2}{2}} \right]^{\frac{2}{x-2} \cdot x} = \end{aligned}$$

dato che $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x-2}{2} = \pm \infty$ e quindi,

per il teorema sul limite delle funzione composte,

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x-2}{2}}\right)^{\frac{x-2}{2}} = \lim_{t \rightarrow \pm \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e$$

$$= \log e^2 = 2,$$

pertanto la retta di equazione $y=2$ è asintoto orizzontale per il grafico di f sia per $x \rightarrow -\infty$ che per $x \rightarrow +\infty$.

Anche il $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ è presente nella forma

indeterminata $0 \cdot (-\infty)$. Scriviamo allora la legge di f nelle forme

$$f(x) = \frac{\log \frac{x}{x-2}}{\frac{1}{x}}$$

(che è presente, per $x \rightarrow 0^-$, nelle forme indeterminate $\frac{-\infty}{-\infty}$) e cerchiamo di applicare il

secondo teorema di L'Hôpital:

$$\begin{aligned} \frac{D \log \frac{x}{x-2}}{D \frac{1}{x}} &= \frac{\frac{x-2}{x} \cdot \frac{x-2-x}{(x-2)^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \\ &= \frac{2x^2}{x(x-2)} = \frac{2x}{x-2} \xrightarrow{\text{per } x \rightarrow 0^-} 0 \end{aligned}$$

pertanto $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$, quindi 0 è un

punto di discontinuità eliminabile per f .

Su le inoltre:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} x \log \left(\frac{x}{x-2} \right) = +\infty,$$

$\downarrow$
 $+\infty$

quindi la retta di equazione $x=2$ è asintoto verticale per il grafico di f .

Per decidere sul segno di f risolveremo dapprima l'equazione $f(x) = 0$; si ha:

$$x \log \frac{x}{x-2} = 0 \Leftrightarrow \log \frac{x}{x-2} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{x-2} = 1$$

$\swarrow$
 dato che $0 \notin A$

e quindi l'equazione $f(x) = 0$ non ha soluzioni;
 ne segue che f assume valori di segno costante in
 ognuno dei due intervalli $] -\infty, 0[$ e $] 2, +\infty[$.

Ricordando che $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 2$ possiamo concludere che
 è $f(x) > 0 \quad \forall x \in A$.

Calcoliamo la derivata prima:

$$f'(x) = \log \frac{x}{x-2} + x D \log \frac{x}{x-2} =$$

$$= \log \frac{x}{x-2} + x \frac{-2}{x(x-2)} =$$

$$= \log \frac{x}{x-2} - \frac{2}{x-2} \quad \forall x \in A.$$

Poiché l'equazione $f'(x) = 0$ non è facilmente
 risolvibile, cerchiamo di ottenere informazioni
 sul segno di f' dallo studio di f'' .

Intanto osserviamo che è:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = 0,$$

ocché la retta tangente al grafico del prolungamento con-
 tinuo di f all'origine $] -\infty, 0[\cup] 2, +\infty[$ nel punto

$(0,0)$ è l'origine.

Calcoliamo la derivata seconda:

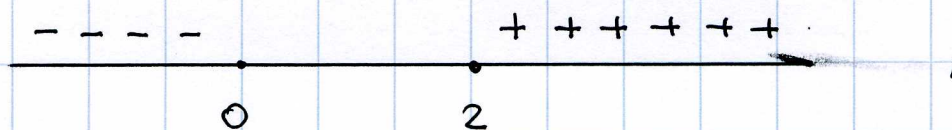
$$f''(x) = -\frac{2}{x(x-2)} + \frac{2}{(x-2)^2} =$$

$$= \frac{2}{x-2} \left[-\frac{1}{x} + \frac{1}{x-2} \right] =$$

$$= 2 \frac{-(x-2) + x}{x(x-2)^2} = \frac{4}{x(x-2)^2}$$

$$\forall x \in A ;$$

il segno di f'' è:



quindi f è strettamente concava in $]-\infty, 0[$
e strettamente convessa in $]2, +\infty[$.

Lo studio di f'' ci dice che f' è decrescente
in $]-\infty, 0[$ e crescente in $]0, +\infty[$. Allora,

osservando che è

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f'(x) = 0,$$

possiamo concludere che è $f'(x) < 0 \quad \forall x \in A$,
quindi f è decrescente sia in $] -\infty, 0[$ che in
 $] 2, +\infty[$.

