

5

$$f(x) = x - \sqrt[3]{x^3 - 3x^2}$$

La funzione f è definita e continua in $\mathbb{R}$.
 Si ha:

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left[x - \sqrt[3]{x^3 - 3x^2} \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left[x - x \sqrt[3]{1 - \frac{3}{x}} \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm \infty} 3 \frac{\sqrt[3]{1 - \frac{3}{x}} - 1}{-\frac{3}{x}} = \lim_{t \rightarrow 0} 3 \frac{(1+t)^{\frac{1}{3}} - 1}{t} =$$

$$= 3 \cdot \frac{1}{3} = 1,$$

quindi la retta di equazione $y=1$ è asintoto orizzontale per il grafico di f sia per $x \rightarrow -\infty$ che per $x \rightarrow +\infty$. Si ha inoltre:

$$f(0) = 0.$$

Per determinare il segno della funzione risolveremo dapprima l'equazione $f(x) = 0$.

Si ha:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2} \Leftrightarrow x^3 = x^3 - 3x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0;$$

ne segue (per il teorema di esistenza degli zeri) che in ciascuno dei due intervalli $] -\infty, 0[$ e $] 0, +\infty[$ il segno di f è costante; pertanto, avendo trovato che $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1$, possiamo concludere che è $f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Calcoliamo le derivate prime. Si ha:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \frac{3x^2 - 6x}{3\sqrt[3]{(x^3 - 3x^2)^2}} = 1 - \frac{x^2 - 2x}{\sqrt[3]{x^4(x-3)^2}} = \\ &= 1 - \frac{x-2}{\sqrt[3]{x(x-3)^2}} \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 3\}; \end{aligned}$$

un'altra

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow 0^\pm} f'(x) = \pm \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 3} f'(x) = -\infty.$$

Per determinare il segno delle derivate

So he

$$f\left(\frac{8}{3}\right) = \frac{8}{3} - \sqrt[3]{\frac{8^3}{3^3} - 3 \frac{8^2}{3^2}} =$$

$$= \frac{8}{3} - \frac{8}{3} \sqrt[3]{1 - 3 \frac{8^2}{3^2} \cdot \frac{3^3}{8^3}} = \frac{8}{3} - \frac{8}{3} \sqrt[3]{1 - \frac{9}{8}} =$$

$$= \frac{8}{3} \left(1 - \sqrt[3]{-\frac{1}{8}}\right) = \frac{8}{3} \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{8}{3} \cdot \frac{3}{2} = 4 ;$$

$$f(3) = 3 - \sqrt[3]{3^3 - 3 \cdot 3^2} = 3 .$$

La deuxième racine est :

$$f''(x) = - \frac{\sqrt[3]{x(x-3)^2} - (x-2) \cdot \frac{(x-3)^2 + 2x(x-3)}{3 \sqrt[3]{x^2(x-3)^4}}}{\sqrt[3]{x^2(x-3)^4}} =$$

$$= - \frac{x(x-3)^2 - \frac{1}{3}(x-2)(x-3)[x-3+2x]}{\sqrt[3]{x^4(x-3)^8}} =$$

$$= - (x-3) \frac{x^2 - 3x - \frac{1}{3}(x-2)3(x-1)}{\sqrt[3]{x^4(x-3)^8}} =$$

$$= - (x-3) \frac{x^2 - 3x - (x^2 - 3x + 2)}{\sqrt[3]{x^4 (x-3)^8}} =$$

$$= \frac{2(x-3)}{\sqrt[3]{x^4 (x-3)^8}} \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0, 3\},$$

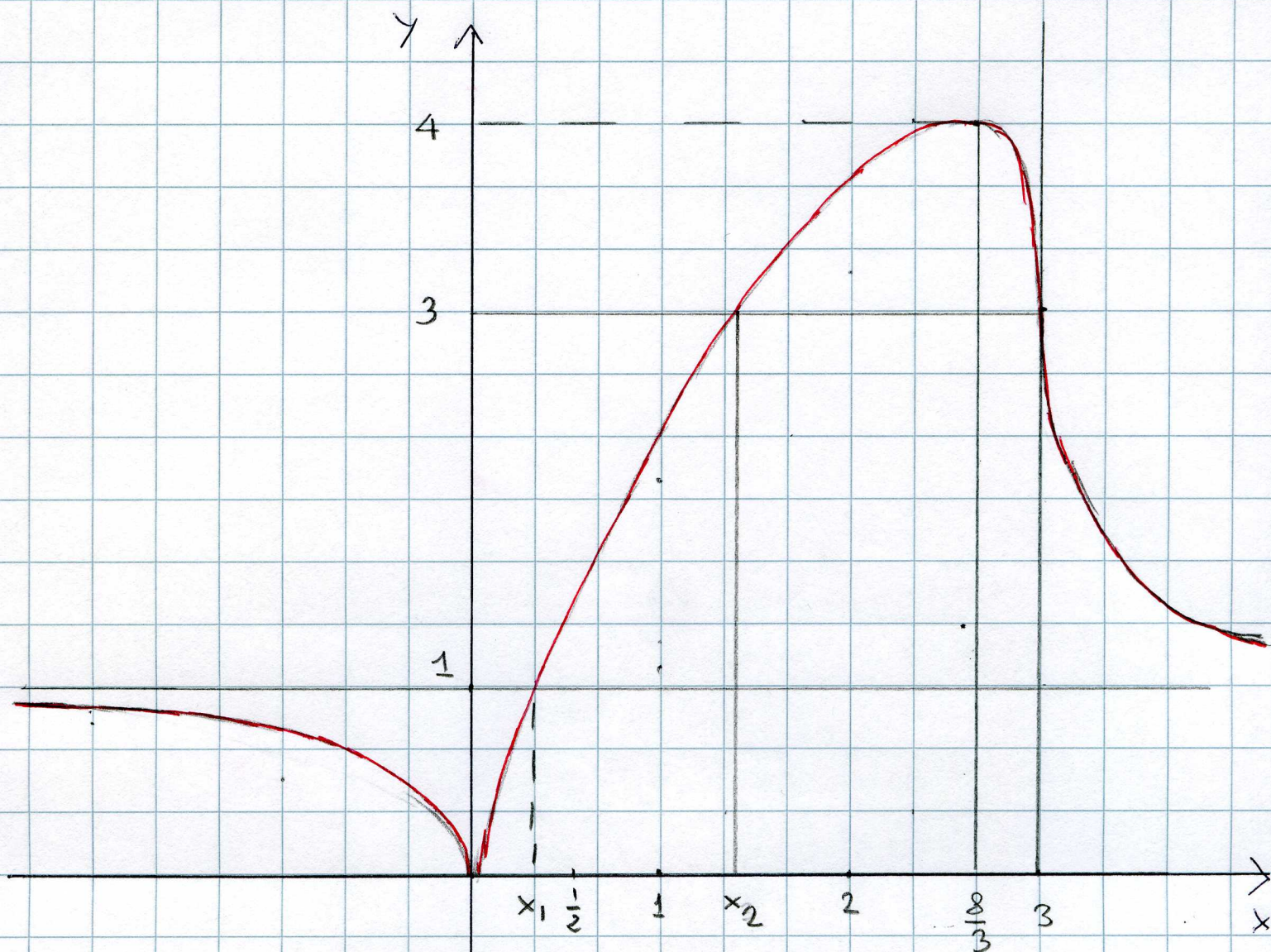
quindi il segno di f'' è :

$$\begin{array}{ccccccccccc} - & - & - & x & - & - & - & - & - & x & + & + & + & + \\ \hline & & & 0 & & & & & & 3 & & & & \end{array},$$

concave

quindi f è strettamente ~~convessa~~ in $]-\infty, 0]$
e in $[0, 3]$ è strettamente convessa in $[3, +\infty[$

5.6



NOTA $x_1 =$ unica soluzione di $f(x) = 1$
 $x_2 =$ unica soluzione di $f(x) = 3$ in $]0, \frac{8}{3}[$;

perché $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} + \sqrt[3]{\frac{5}{8}} > \frac{1}{2} + \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = 1$

$f(1) = 1 + \sqrt[3]{2}$, $2 < f(1) < 3$

$f(2) = 2 + \sqrt[3]{4}$, $3 < f(2)$,

si ha $x_1 < \frac{1}{2}$, $2 < x_2 < 3$