

④

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 + 2x}$$

Il dominio di f è l'unione delle soluzioni della disuguaglianza $x^2 + 2x \geq 0$, cioè $]-\infty, -2] \cup [0, +\infty[$, e f è continua in tale unione.

Si ha:

$$f(0) = 0, \quad f(-2) = -2, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty;$$

il limite $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ si presenta nella forma indeterminata $-\infty + \infty$; per risolvere l'indeterminazione osserviamo che per $x \leq -2$ possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} x + \sqrt{x^2 + 2x} &= x + \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{2}{x}\right)} = x - x \sqrt{1 + \frac{2}{x}} = \\ &= \frac{1 - \sqrt{1 + \frac{2}{x}}}{\frac{1}{x}} = -2 \frac{\sqrt{1 + \frac{2}{x}} - 1}{\frac{2}{x}}, \end{aligned}$$

da cui, ricordando il limite notevole

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1+t)^\alpha - 1}{t} = \alpha,$$

riceviamo che $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = (-2)^{\frac{1}{2}} = -1$, quindi

la retta di equazione $y = -1$ è asintoto orizzontale per il grafico di f per $x \rightarrow -\infty$. Per decidere sulla

esistenza dell'asintoto per $x \rightarrow +\infty$, calcoliamo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2}{x}} \right] = 2,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{x^2 + 2x} - x \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\sqrt{1 + \frac{2}{x}} - 1 \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \frac{\sqrt{1 + \frac{2}{x}} - 1}{\frac{2}{x}} =$$

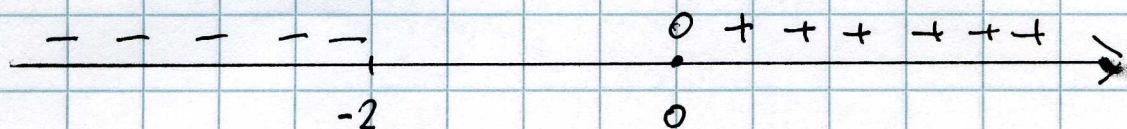
$$= 2 \cdot \frac{1}{2} = 1;$$

per tanto la retta di equazione $y = 2x + 1$ è asintoto per il grafico di f per $x \rightarrow +\infty$.

Per decidere sul segno di f risolviamo l'equazione $f(x) = 0$; osserviamo che:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -x = \sqrt{x^2 + 2x} \Rightarrow x^2 = x^2 + 2x \Leftrightarrow x = 0,$$

per tanto, dato che, come abbiamo già visto, è $f(0) = 0$, possiamo concludere che 0 è l'unico zero della funzione f . Tenendo conto dei valori e dei limiti di f già calcolati, abbiamo che il segno di f è:



La funzione f è derivabile in $]-\infty, -2[\cup]0, +\infty[$ e risulta

$$f'(x) = 1 + \frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x}} = 1 + \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}$$

$$\forall x \in]-\infty, -2[\cup]0, +\infty[;$$

inoltre:

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f'(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = +\infty,$$

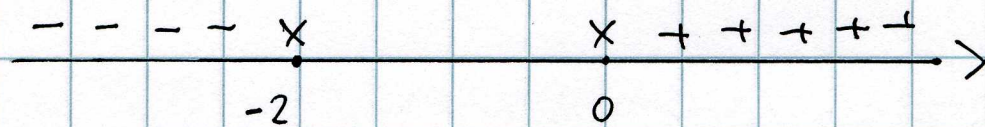
riche le rette tangenti al grafico nei punti $(-2, -2)$ e $(0, 0)$ sono verticali.

Per determinare il segno di f' risolveremo dapprima l'equazione $f'(x) = 0$. Si ha:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{x^2+2x} + (x+1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+2x} = -(x+1) \Rightarrow x^2+2x = x^2+2x+1,$$

da cui concludiamo che $f'(x) = 0$ non ha soluzioni; pertanto, dato che f' è continua in $]-\infty, -2[\cup]0, +\infty[$, grazie ai limiti di $f'(x)$ già calcolati (per $x \rightarrow -2^-$ e $x \rightarrow 0^+$) abbiamo che il segno di f' è:



dunque f è decrescente in $]-\infty, -2]$ e crescente in $[0, +\infty[$; inoltre i punti -2 e 0 sono due minimi relativi propri per f e -2 anche punto di minimo assoluto.

Per la derivata seconda si ha:

$$f''(x) = \frac{\sqrt{x^2+1x} - (x+1) \frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+1x}}}{x^2+1x} =$$

$$= \frac{x^2+1x - (x+1)^2}{(x^2+1x) \sqrt{x^2+1x}} = - \frac{1}{(x^2+1x) \sqrt{x^2+1x}} < 0$$

$$\forall x \in]-\infty, -2] \cup]0, +\infty[,$$

dunque f è strettamente concava sia in $]-\infty, -2]$ che in $[0, +\infty[$.

Sulle base dello studio fatto un possibile disegno del grafico è:

4.5

