

3

$$f(x) = x - \sqrt{3(1-x^2)}$$

La funzione f è definita e continua nell'intervallo $[-1, 1]$. Si ha:

$$f(-1) = -1, \quad f(1) = 1, \quad f(0) = -\sqrt{3}.$$

Per determinare il segno di f risolviamo dapprima l'equazione $f(x) = 0$. Si ha:

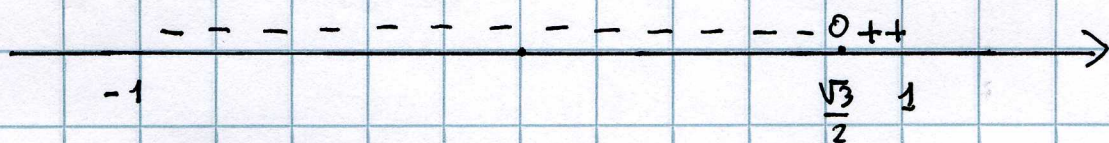
$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{3(1-x^2)} \Rightarrow x^2 = 3(1-x^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2};$$

effettuando le verifiche si trova che:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2},$$

per cui, dato che $f(\pm 1) = \pm 1$, possiamo concludere, grazie al teorema di esistenza degli zeri, che il segno di f è:



Calcoliamo la derivata prima; si ha:

$$f'(x) = 1 - \frac{-6x}{2\sqrt{3(1-x^2)}} = 1 + \frac{3x}{\sqrt{3(1-x^2)}}$$

$$\forall x \in]-1, 1[;$$

inoltre:

$$(*) \lim_{x \rightarrow -1+} f'(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1-} f'(x) = +\infty,$$

quindi le rette tangenti al grafico nei punti $(\pm 1, \pm 1)$ sono parallele all'asse y .

Per trovare il segno di f' risolviamo l'equazione $f'(x) = 0$. Si ha:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3x}{\sqrt{3(1-x^2)}} = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x = -\sqrt{3(1-x^2)} \Rightarrow 9x^2 = 3 - 3x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 12x^2 = 3 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{2}$$

e, facendo le verifiche, si trova che:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

Di conseguenza, dato che f' è continua in $] -1, 1[$, tenendo presenti i limiti (*) si ha che il segno di f' è:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} & x & - & - & - & 0 & + & + & + & + & + & + & + & + & x \\ & | & & & & | & & & & & & & & & | \\ -1 & & & & & -\frac{1}{2} & & & & & & & & & 1 \end{array},$$

quindi f è decrescente in $[-1, -\frac{1}{2}]$ e crescente in $[-\frac{1}{2}, 1]$ e

$$f(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2} - \sqrt{3} \frac{3}{4} = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -2 \quad \text{e} \quad f(1) = 1$$

sono, rispettivamente, il minimo ed il massimo assoluto di f .

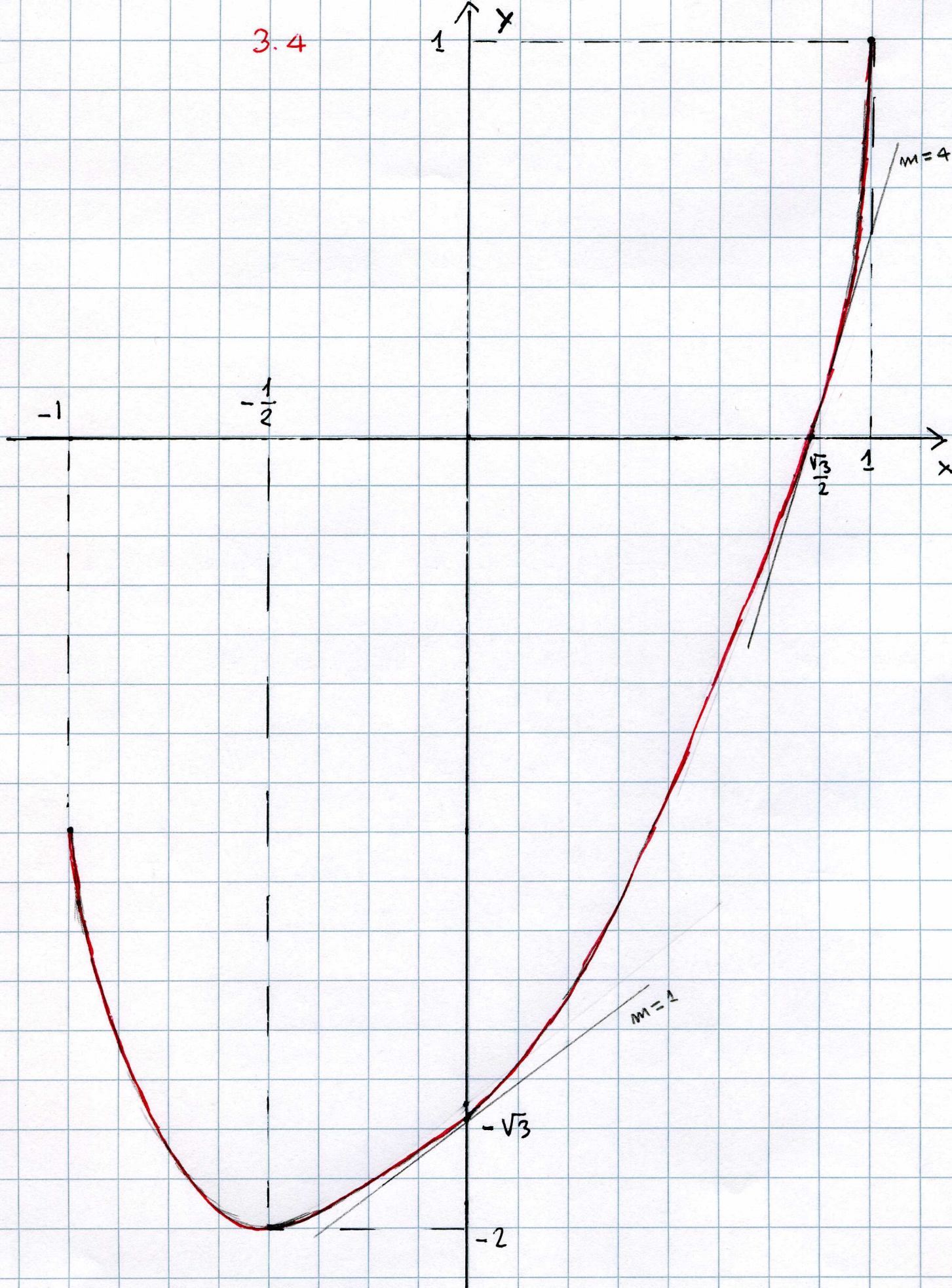
Calcoliamo la derivata seconda:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{\sqrt{3(1-x^2)} - x \frac{-6x}{2\sqrt{3(1-x^2)}}}{3(1-x^2)} = \\ &= \frac{3(1-x^2) + 3x^2}{(1-x^2)\sqrt{3(1-x^2)}} = \frac{\sqrt{3}}{(1-x^2)^{3/2}} > 0 \end{aligned}$$

$$\forall x \in] -1, 1[,$$

pertanto f è strettamente convessa in $] -1, 1[$ e quindi (per la continuità) anche in $[-1, 1]$ (si veda, un proposito l'Esercizio 324 delle Recalche).

3.4



$$f'(0) = 1$$

$$f'(\frac{\sqrt{3}}{2}) = 1 + \frac{3 \frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3 \frac{1}{4}}} = 4$$