

2

$$f(x) = \frac{x(x+4) - 3(|x+2| - 2)}{|x-4|}$$

La funzione f è definita e continua in $\mathbb{R} - \{4\}$.

Essendo $\lim_{x \rightarrow 4} [x(x+4) - 3(|x+2| - 2)] = 32 - 12 = 20$,
 si ha $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = +\infty$, quindi la retta di equazione
 $x = 4$ è un asintoto verticale per il grafico di f .

Esprimiamo la legge di f liberandole dai valori
 assoluti:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x(x+4) - 3(-x-2-2)}{4-x} = -\frac{x^2+7x+12}{x-4} & \text{se } x \in]-\infty, -2] , \\ \frac{x(x+4) - 3(x+2-2)}{4-x} = -\frac{x^2+x}{x-4} & \text{se } x \in [-2, 4[, \\ \frac{x^2+x}{x-4} & \text{se } x \in]4, +\infty[, \end{cases}$$

da cui, effettuando la divisione con la regola di
 Ruffini:

	1	7	12
4		4	44
	1	11	56

	1	1	0
4		4	20
	1	5	20

si ottiene

$$f(x) = \begin{cases} -(x+11) - \frac{56}{x-4} & \text{se } x \in]-\infty, -2] , \\ -(x+5) - \frac{20}{x-4} & \text{se } x \in [-2, 4[, \\ x+5 + \frac{20}{x-4} & \text{se } x \in]4, +\infty[. \end{cases}$$

Ne segue facilmente che le rette di equazione $y = -(x+11)$ e $y = x+5$ sono asintoti per il grafico di f , rispettivamente per $x \rightarrow -\infty$ e per $x \rightarrow +\infty$.

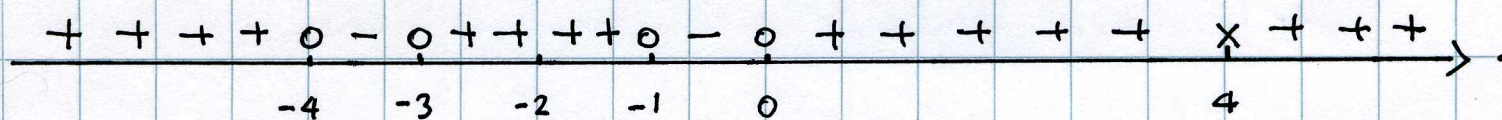
Il segno di f coincide con quello di

$$x(x+4) - 3(1x+2) - 2)$$

così con quello di $x^2+7x+12$ in $] -\infty, -2]$ e con quello di x^2+x in $[-2, +\infty[\setminus \{4\}$; pertanto, essendo

$$x^2+7x+12=0 \Leftrightarrow x = \frac{-7 \pm 1}{2} = \begin{cases} -4 \\ -3 \end{cases}, \quad x^2+x=0 \Leftrightarrow x = \begin{cases} -1 \\ 0 \end{cases},$$

il segno di f è:



$$f(-2) = -\frac{4-2}{-2-4} = \frac{1}{3}.$$

La derivata prima è

$$f'(x) = \begin{cases} -1 + \frac{56}{(x-4)^2} & \text{se } x \in]-\infty, -2[, \\ -1 + \frac{20}{(x-4)^2} & \text{se } x \in]-2, 4[, \\ 1 - \frac{20}{(x-4)^2} & \text{se } x \in]4, +\infty[; \end{cases}$$

inoltre $f'(-2-) = -1 + \frac{56}{36} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$,

$$f'(-2+) = -1 + \frac{20}{36} = -\frac{16}{36} = -\frac{4}{9} .$$

Il segno di f' coincide con quello di $-(x-4)^2 + 56$ in $]-\infty, -2[$, con quello di $-(x-4)^2 + 20$ in $]-2, 4[$ e con quello di $(x-4)^2 - 20$ in $]4, +\infty[$; pertanto, essendo

$$-(x-4)^2 + 56 = 0 \Leftrightarrow x-4 = \pm \sqrt{56} \Leftrightarrow x = 4 \pm \sqrt{56} ,$$

$$-(x-4)^2 + 20 = 0 \Leftrightarrow x = 4 \pm \sqrt{20}$$

$$4-8 < 4-\sqrt{56} < 4-7 , \quad 4-5 < 4-\sqrt{20} < 4-4 ,$$

il segno di f' è :

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccc} - & - & - & - & 0 & + & + & + & \times & - & 0 & + & + & + & + & + & \times & - & - & - & - & 0 & + & + & + \\ \hline & & & & 4-\sqrt{56} & & & & -2 & & 4-\sqrt{20} & & & & & & 4 & & & & & & 4+\sqrt{20} & & & \end{array} ,$$

per cui i punti

$$4 - \sqrt{56}, \quad 4 - \sqrt{20}, \quad 4 + \sqrt{20}$$

sono tutti di minimo relativo proprio.

$$\begin{aligned} f(4 - \sqrt{56}) &= -(4 - \sqrt{56} + 11) - \frac{56}{4 - \sqrt{56} - 4} = \\ &= -15 + 2\sqrt{56} \approx -0,03, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(4 - \sqrt{20}) &= -(4 - \sqrt{20} + 5) - \frac{20}{4 - \sqrt{20} - 4} = \\ &= -9 + 2\sqrt{20} \approx -0,06, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(4 + \sqrt{20}) &= 4 + \sqrt{20} + 5 + \frac{20}{4 + \sqrt{20} - 4} = \\ &= 9 + 2\sqrt{20} \approx 17,94; \end{aligned}$$

per tanto $f(4 - \sqrt{20})$ è il minimo assoluto di f

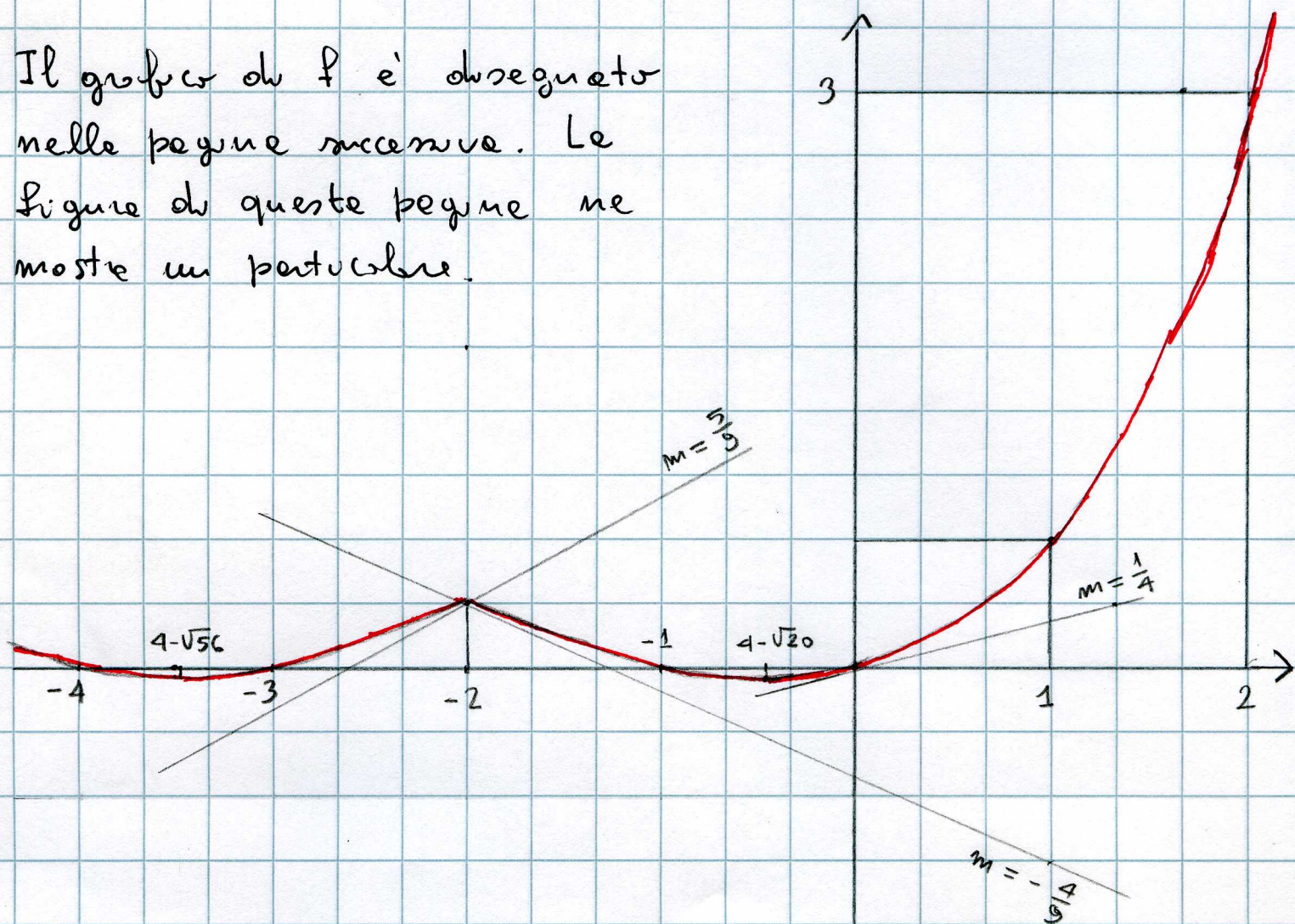
ESERCIZIO. Provare senza fare uso delle calcolatrici che è: $f(4 - \sqrt{20}) < f(4 - \sqrt{56}) < 0$

La devvete segnole è:

$$f''(x) = \begin{cases} -2 \frac{56}{(x-4)^3} & \text{se } x \in]-\infty, -2[\\ -2 \frac{20}{(x-4)^3} & \text{se } x \in]-2, 4[\\ 2 \frac{20}{(x-4)^3} & \text{se } x \in]4, +\infty[\end{cases}$$

ed è $f''(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 4\}$; pertanto f è strettamente convessa in ciascuno degli intervalli $]-\infty, -2]$, $[-2, 4[$ e $]4, +\infty[$.

Il grafico di f è disegnato nelle pagine successive. Le figure di queste pagine ne mostrano un particolare.



2.6

