

10

$$f(x) = \frac{1}{2}|x| - \arcsen \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}}$$

Il dominio di f è l'unione delle soluzioni delle disuguaglianze

$$(1) \quad \left| \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}} \right| \leq 1$$

Su le :

$$(1) \Leftrightarrow \left| \frac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2+1}} \right| \leq 1 \quad (\Leftrightarrow)$$

dato che $(x-1)^2+1 > 0$
 $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow |x-1| \leq \sqrt{(x-1)^2+1} \quad (\Leftrightarrow)$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 \leq (x-1)^2+1 \quad ;$$

pertanto f è definita in $\mathbb{R}$; inoltre f è continua in $\mathbb{R}$. Osserviamo anche che nella (1) non si verifica mai l'uguaglianza (cioè ci permette di affermare che la derivata

$$\text{Derivata } \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}}$$

esiste in tutto $\mathbb{R}$).

Su he :

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = +\infty ; \quad f(0) = -\arcsen \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

Explicitando il valore assoluto abbiamo :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x - \arcsen \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}} & \text{se } x \in [0, +\infty[, \\ -\frac{1}{2}x - \arcsen \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}} & \text{se } x \in]-\infty, 0] . \end{cases}$$

Potento :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \frac{1}{2}x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\arcsen \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}} \right) =$$

definitivamente, per $x \rightarrow +\infty$, e' $x-1 \geq 0$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\arcsen \sqrt{\frac{(x-1)^2}{(x-1)^2 + 1}} \right) = -\arcsen 1 = -\frac{\pi}{2} ,$$

quindi la retta di equazione $y = \frac{1}{2}x - \frac{\pi}{2}$ e' asintoto
per il grafico di f per $x \rightarrow +\infty$; inoltre :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[f(x) + \frac{1}{2}x \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\arcsin \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \arcsin \frac{1-x}{\sqrt{(x-1)^2 + 1}} =$$

definitivamente
e' $1-x \geq 0$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \arcsin \sqrt{\frac{(1-x)^2}{(x-1)^2 + 1}} = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2},$$

quindi la retta di equazione $y = -\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2}$ e' asintoto per il grafico di f per $x \rightarrow -\infty$.

L'equazione $f(x) = 0$ non e' facilmente risolvibile, pertanto perveniremo allo studio delle derivate prime, per poi dedurre, eventualmente, informazione sul segno di f .

Su $\mathbb{R}_e$, su tutto $\mathbb{R}$:

$$D \arcsin \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}} =$$

10-4

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(x-1)^2}{(x-1)^2 + 1}}} \cdot \frac{\sqrt{(x-1)^2 + 1} - (x-1) \frac{2(x-1)}{2\sqrt{(x-1)^2 + 1}}}{(x-1)^2 + 1} =$$

$$= \sqrt{(x-1)^2 + 1} \cdot \frac{(x-1)^2 + 1 - (x-1)^2}{[(x-1)^2 + 1] \sqrt{(x-1)^2 + 1}} =$$

$$= \frac{1}{(x-1)^2 + 1} ;$$

per tanto

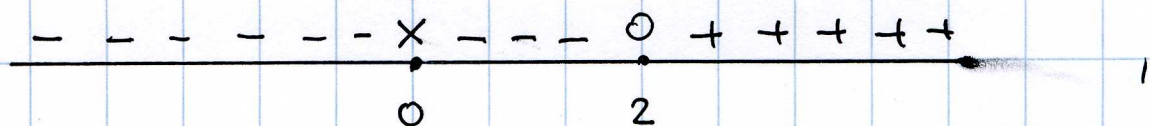
$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{(x-1)^2 + 1} = \frac{1}{2} \frac{(x-1)^2 - 1}{(x-1)^2 + 1} & \text{se } x \in]0, +\infty[, \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{(x-1)^2 + 1} & \text{se } x \in]-\infty, 0[, \end{cases}$$

$$f'(0+) = 0 , \quad f'(0-) = -1 ;$$

ne segue che è $f'(x) < 0 \quad \forall x \in]-\infty, 0[$, mentre
in $]0, +\infty[$ il segno di f' coincide con quello
di $(x-1)^2 - 1$

$$\sqrt{(x-1)^2 - 1} = 0 \Leftrightarrow x-1 = \pm 1 \Leftrightarrow x = \begin{matrix} 2 \\ 0 \end{matrix};$$

in definitiva il segno di f' è:



anche f è decrescente in $]-\infty, 2]$ e crescente
in $[2, +\infty[$, e dunque

$$f(2) = 1 - \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 - \frac{\pi}{4} > 0$$

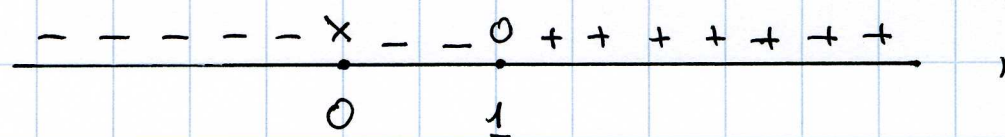
è il minimo assoluto di f .

La derivata seconda è

$$f''(x) = D \left[- \frac{1}{(x-1)^2 + 1} \right] = \frac{2(x-1)}{[(x-1)^2 + 1]^2}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

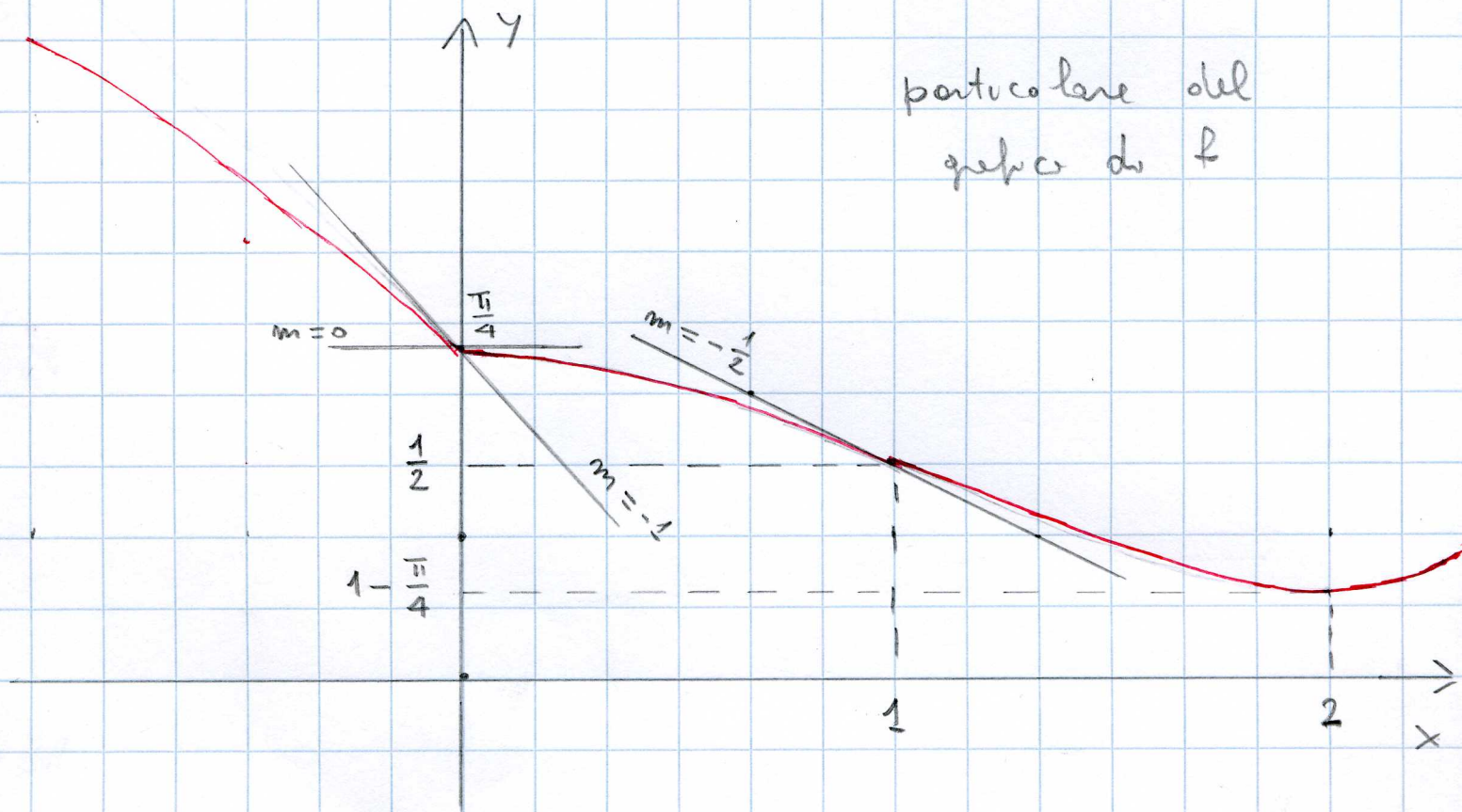
quindi il segno di f'' è :



pertanto f è strettamente convessa in $[1, +\infty[$ e strettamente convessa in ciascuno degli intervalli $]-\infty, 0]$ e $[0, 1]$; il punto

$$(1, f(1)) = (1, \frac{1}{2})$$

è di pieno proprio per il grafico di f ed è $f'(1) = -\frac{1}{2}$.



10-7

