

1

$$f(x) = 2x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{8}{3} + \log(3-2x)$$

Il dominio della funzione f è l'insieme delle soluzioni della disuguaglianza $3-2x > 0$, cioè l'intervallo $] -\infty, \frac{3}{2} [$ e la f è continua su tale intervallo.

Su ha:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \left[2 + \frac{\frac{2}{3}}{x} - \frac{\frac{8}{3}}{x^2} + \frac{\log(3-2x)}{x^2} \right] = +\infty$$

(tenendo presente che

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\log(3-2x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\log(3-2x)}{3-2x} \cdot \frac{3-2x}{x^2} = 0,$$

grazie al limite notevole $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\log t}{t} = 0$),

$$f(0) = -\frac{8}{3} + \log 3 < 0$$

(dato che $\log 3 < \log e^2 = 2 < \frac{8}{3}$),

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^-} f(x) = -\infty,$$

quindi la retta di equazione $x = \frac{3}{2}$ è un asintoto

verticale per il grafico di f . Non vi è, invece, asintoto per $x \rightarrow -\infty$, dato che

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left[2 + \frac{\frac{2}{3}}{x} - \frac{\frac{8}{3}}{x^2} + \frac{\log(3-2x)}{x^2} \right] = -\infty.$$

La funzione f è derivabile in $]-\infty, \frac{3}{2}[$ e si ha:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x + \frac{2}{3} + \frac{-2}{3-2x} = 2 \frac{6x(3-2x) + 3-2x-3}{3(3-2x)} = \\ &= 4x \frac{3(3-2x)-1}{3(3-2x)} = 4x \frac{-6x+8}{3(3-2x)} = \frac{8}{3} \times \frac{-3x+4}{3-2x}. \end{aligned}$$

Il segno di f' è $\begin{array}{ccccccccccccccc} - & - & - & - & 0 & + & + & + & + & + & + & 0 & - & - & - \\ & & & & 0 & & & & & & & \frac{4}{3} & & \frac{3}{2} & \end{array}$

quindi f è decrescente in $]-\infty, 0]$ e in $[\frac{4}{3}, \frac{3}{2}[$ e crescente in $[0, \frac{4}{3}]$, pertanto i punti 0 e $\frac{4}{3}$ sono, rispettivamente, di minimo e di massimo relativo proprio per f .

Si ha:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{4}{3}\right) &= 2 \cdot \frac{16}{9} + \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} - \frac{8}{3} + \log\left(3 - \frac{8}{3}\right) = \\ &= \frac{16}{9} - \log 3. \end{aligned}$$

Osserviamo che :

$$f\left(\frac{4}{3}\right) \geq 0 \Leftrightarrow 16 \geq \log 3^9 \Leftrightarrow e^{16} \geq 3^9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (e^4)^3 \underset{?}{\geq} (3^3)^3 \Leftrightarrow e^4 \underset{?}{\geq} 3^3$$

per cui, essendo $e^4 > (2,5)^4 = (6,25)^2 > 36 > 3^3$,
concludiamo che $e^{\frac{4}{3}} > 0$. Pertanto la funzione
 f ha esattamente tre zeri:

$$x_1 \in]-\infty, 0[\quad , \quad x_2 \in]0, \frac{4}{3}[\quad , \quad x_3 \in]\frac{4}{3}, \frac{3}{2}[\quad .$$

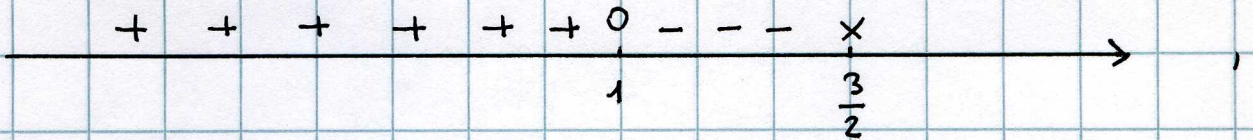
Le derivate seconda e' :

$$\varphi''(x) = \frac{8}{3} \frac{(-3x+4-3x)(3-2x) - x(-3x+4)(-2)}{(3-2x)^2} =$$

$$= \frac{8}{3} \frac{(-6x+4)(3-2x) + 2x(-3x+4)}{(3-2x)^2} = \frac{16}{3} \frac{(-3x+2)(3-2x) + x(-3x+4)}{(3-2x)^2} =$$

$$= \frac{16}{3} \frac{3x^2 - 9x + 6}{(3-2x)^2} = 16 \frac{x^2 - 3x + 2}{(3-2x)^2} \quad \forall x \in]-\infty, \frac{3}{2}[$$

Poi che $x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$, il segno di f'' è:



quindi f è strettamente convessa in $]-\infty, 1]$ e strettamente concava in $[1, \frac{3}{2}[$, e il punto

$$(1, f(1)) = (1, 2 + \frac{2}{3} - \frac{8}{3} + \log 1) = (1, 0)$$

è di pieno proprio per f (abbiamo già trovato che $x_2 = 1$) e la retta tangente al grafico in $(1, 0)$ ha coefficiente angolare $f'(1) = \frac{8}{3}$.

Per localizzare lo zero x_1 calcoliamo

$$f(-1) = 2 - \frac{2}{3} - \frac{8}{3} + \log 5 = -\frac{4}{3} + \log 5 ;$$

osserviamo che

$$f(-1) \geq 0 \Leftrightarrow \log 5 \geq \frac{4}{3} \Leftrightarrow 5^3 \geq e^4 ,$$

per cui, essendo $5^3 > 3^4 > e^4$, concludiamo che è $f(-1) > 0$, pertanto $x_1 \in]-1, 0[$.

Alcuni valori approssimativi utili per il disegno sono:

$$f(0) = -\frac{8}{3} + \log 3 \approx -1,57$$

$$f(\frac{4}{3}) = \frac{16}{9} - \log 3 \approx 0,68$$

$$f(-1) = -\frac{4}{3} + \log 5 \approx 0,28$$

1.5

Il disegno è:

