In vista del compito scritto 2008 ...

(ultimo aggiornamento: 26 maggio 2008)

Questa è una breve raccolta di esercizi, raggruppati per argomenti, utile per la preparazione al compito d'esame.

Naturalmente gli studenti che non hanno superato la prova in itinere di febbraio faranno bene a tenere presente anche l'altra raccolta di esercizi "Verso la prova in itinere 2008".

Gli argomenti degli esercizi sono:

1. Studio di funzioni.

2. Calcolo di integrali (indefiniti, definiti, generalizzati ed impropri).

3. Serie numeriche e successioni e serie di funzioni.

1

1 Studiare la funzione reale di variabile reale

$$f(x) = 2x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{8}{3} + \log(3 - 2x)$$

e disegnarne il grafico.

2 Studiare la funzione reale di variabile reale

$$f(x) = \frac{x(x+4) - 3(|x+2| - 2)}{|x-4|}$$

e disegnarne il grafico.

3 Studiare la funzione reale di variabile reale

$$f(x) = x - \sqrt{3(1 - x^2)}$$

e disegnarne il grafico.

4 Studiare la funzione reale di variabile reale

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 + 2x}$$

e disegnarne il grafico.

5 Studiare la funzione reale di variabile reale

$$f(x) = x - \sqrt[3]{x^3 - 3x^2}$$

e disegnarne il grafico.

6 Studiare la funzione reale di variabile reale

$$f(x) = x \log \frac{x}{x-2}$$

e disegnarne il grafico.

7 Studiare la funzione reale di variabile reale

$$f(x) = \left| \frac{x-1}{x} \right| \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$$

e disegnarne il grafico.

8 Studiare la funzione reale di variabile reale

$$f(x) = \log \frac{\sqrt{|x-1|}}{|x-2|}$$

e disegnarne il grafico.

9 Studiare la funzione reale di variabile reale

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x}{|x^2-1|}$$

e disegnarne il grafico.

10 Studiare la funzione reale di variabile reale

$$f(x) = \frac{1}{2}|x| - \operatorname{arcsen} \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}}$$

e disegnarne il grafico.

11 Studiare la funzione reale di variabile reale

$$f(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x + |\cos x| + 1}$$

e disegnarne il grafico.

12 Studiare la funzione reale di variabile reale

$$f(x) = \log\left(\sqrt{3}(|\operatorname{sen} x| - 1) + \cos x\right)$$

e disegnarne il grafico.

13 Studiare la funzione reale di variabile reale

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{|x|}}\left(\log^2|x| + \frac{1}{2}\log x^2 + 2\right)$$

e disegnarne il grafico.

14 Studiare la funzione reale di variabile reale

$$f(x) = \operatorname{arctg}\sqrt{e^{2x+|x-1|}}$$

e disegnarne il grafico.
Verificare che la funzione f è iniettiva e trovare l'insieme di definizione e la legge di f^{-1}.

15 Studiare la funzione reale di variabile reale

$$f(x) = x^2\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x^2\right)$$

e disegnarne il grafico. (Per quanto riguarda lo studio della convessità si richiede di provare che vi è un solo punto $x^* \in]0,+\infty[$ nel quale la f'' si annulla e che tale punto appartiene all'intervallo $\left]\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt[4]{\frac{3}{5}}\right[$.)

2

1 a) Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{2x^4-5x^3+4x^2+2x+4}{(x-1)^3(x^2+x+5)}\,\mathrm{d}x \quad .$$

b) Stabilire se la funzione

$$\log x - \frac{x^2}{\sqrt{1-x}}$$

è integrabile in $[0,1]$ e, in caso affermativo, calcolare l'integrale.

2 a) Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{x}{\sqrt{2x^2+x+1}}\,\mathrm{d}x \quad .$$

b) Stabilire se la funzione

$$\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{3}x}{x^2}$$

è integrabile in $]-\infty,-1]$ e, in caso affermativo, calcolare l'integrale.

3 a) Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{2x^3+5x^2+7x+5}{x^4+9x^2+25}\,\mathrm{d}x \quad .$$

b) Stabilire se la funzione

$$\frac{1+4x^2}{\sqrt{|x|}}\,\mathrm{e}^{x^2}$$

è integrabile in $[-1,1]$ e, in caso affermativo, calcolare l'integrale.

4 a) Calcolare l'integrale definito

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^5}{(x^3-2)(|x|^3+5)}\,\mathrm{d}x \quad .$$

b) Trovare tutti i valori dell'esponente $p \in]0,+\infty[$ per i quali la funzione $(\operatorname{tg} x)^p$ è integrabile nell'intervallo $[0,\frac{\pi}{2}]$.

5 a) Calcolare gli integrali definiti:

$$\int_{\frac{1}{5}}^{5} \left(\operatorname{sen} x^2 - \frac{1}{x^2}\operatorname{sen}\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x \qquad , \qquad \int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(\frac{1}{x}\cos\frac{\pi}{x} - \frac{1}{\pi x^2}\operatorname{sen}\pi x\right)\mathrm{d}x \qquad .$$

b) Calcolare l'integrale improprio

$$\int_{[1,+\infty[} \frac{2x^2-x-1}{\sqrt{x}\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x \quad .$$

6 a) Calcolare l'integrale definito

$$\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\operatorname{sen} x \log(5 - \operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} \, \mathrm{d}x \quad .$$

b) Trovare tutti i valori di $p \in]0, +\infty[$ per i quali la funzione

$$\frac{1 + \log^{p^2} x}{x\sqrt{\log^{5p} x + 4}}$$

è integrabile in $[\mathrm{e}, +\infty[$.

7 a) Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \left[\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} + \log(6 + |x^2 - x|) \right] \mathrm{d}x \quad .$$

b) Provare, senza calcolarne l'integrale, che la funzione

$$\frac{1 + \operatorname{sen}^4 \frac{1}{x}}{x^2}$$

è integrabile in $[\frac{2}{\pi}, +\infty[$. Calcolare quindi l'integrale improprio

$$\int_{[\frac{2}{\pi}, +\infty[} \frac{1 + \operatorname{sen}^4 \frac{1}{x}}{x^2} \, \mathrm{d}x \quad .$$

8 a) Calcolare gli integrali indefiniti:

$$\int (\operatorname{tg} x + 1)^2 \mathrm{e}^{2x} \, \mathrm{d}x \qquad , \qquad \int \log x \sqrt{\frac{1 - \log^2 x}{x^2(1 + \log^2 x)}} \, \mathrm{d}x \quad .$$

b_1) Trovare tutti i valori di $p \in]0, +\infty[$ per i quali la funzione

$$f(x) \;=\; \frac{\sqrt{(3 - \operatorname{sen} x + \cos x)^{p+1}}}{[(2 + p)x^p + \operatorname{sen} x + \cos x + 5]^2}$$

è integrabile in $[\pi, +\infty[$.
b_2) Calcolare l'integrale improprio

$$\int_{[\pi, +\infty[} f(x) \, \mathrm{d}x$$

nel caso $p = 1$.

9 a) Calcolare gli integrali estesi:

$$\int_{[0, \frac{\pi}{2}]} \frac{\cos x + 2}{\operatorname{sen} x + 2} \, \mathrm{d}x \qquad , \qquad \int_{[0, 2\pi]} \frac{\cos x + 2}{\operatorname{sen} x + 2} \, \mathrm{d}x \quad .$$

b) Calcolare l'integrale improprio

$$\int_{[\log 5, +\infty[} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x \sqrt{\mathrm{e}^x - 4}} \quad .$$

10 a$_1$) Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos^2 x}{4 - \mathrm{sen}^2 x}\, \mathrm{d}x \qquad .$$

a$_2$) Provare che risulta

$$\int_{\alpha}^{\pi+\alpha} \frac{\cos^2 x}{4 - \mathrm{sen}^2 x}\, \mathrm{d}x \;=\; \int_0^{\pi} \frac{\cos^2 x}{4 - \mathrm{sen}^2 x}\, \mathrm{d}x \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

b) Trovare tutti gli esponenti $p \in]0, +\infty[$ per i quali la funzione

$$f(x) \;=\; \left[\frac{1}{\sqrt{x}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{x}} \right]^p$$

è integrabile nell'intervallo $[0, 1]$. Calcolare quindi l'integrale generalizzato $\int_{[0,1]} f(x)\, \mathrm{d}x$ nel caso $p = 1$.

11 a) Calcolare gli integrali indefiniti:

$$\int \frac{\sqrt{x} \operatorname{arctg}(3\sqrt{x} + 1)}{x^2}\, \mathrm{d}x \qquad , \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{(x-2)\sqrt{-x^2 + 3x - 2}} \qquad .$$

b) Provare che l'insieme

$$A \;=\; \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; 0 < x < 3 \;,\; 0 \le y \le \left| \log_3 |x^2 - 9| \right| \right\}$$

è misurabile secondo Peano-Jordan. Calcolare poi la misura secondo Peano-Jordan dell'insieme A.

12 a) Calcolare gli integrali indefiniti

$$\int \sqrt{\frac{x}{1-x}}\, \mathrm{d}x \qquad , \qquad \int x \sqrt{\frac{x^2 - 10}{11 - x^2}}\, \mathrm{d}x \qquad , \qquad \int \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x}{1-x}}\, \mathrm{d}x \qquad .$$

b) Provare, senza calcolarne l'integrale, che la funzione

$$f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{|\mathrm{sen}\, x| - \mathrm{sen}^2 x}}$$

è integrabile nell'intervallo $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$. Calcolare quindi gli integrali generalizzati

$$\int_{[0, \frac{\pi}{6}]} f(x)\, \mathrm{d}x \qquad , \qquad \int_{[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]} f(x)\, \mathrm{d}x \qquad .$$

13 a) Trovare una primitiva della funzione

$$f(x) = \frac{1}{2\cos x - 1}$$

nel'intervallo $[0, \pi]$.

b) Dire, giustificando le risposte, quali delle seguenti funzioni sono integrabili in $[0, +\infty[$:

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x-1}{x^4+1} \quad , \quad g(x) = \frac{\log(\sqrt{x}+1)}{x+2} \quad , \quad h(x) = \frac{\operatorname{sen} \sqrt{x+1}}{x+1} \quad .$$

14 a) Sia $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ una funzione continua e tale che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \alpha \in \mathbb{R}$. Provare che anche la successione

$$\left\{ \frac{\int_n^{n^2} f(x)\, \mathrm{d}x}{n^2+1} \right\}$$

è convergente ad α.

b) Trovare tutti gli esponenti $p \in]0, +\infty[$ per i quali la funzione

$$f(x) \quad = \quad \left(\frac{3x^2+1}{x^3+x+2} \right)^p \frac{1}{\log(x^3+x+2)}$$

è integrabile nell'intervallo $[0, +\infty[$.

15 a) Calcolare gli integrali indefiniti:

$$\int x^5 \mathrm{e}^{3x^2}\, \mathrm{d}x \quad , \quad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\cos^6 \sqrt{x}} \quad .$$

b) Dire, giustificando le risposte, quali delle seguenti funzioni sono integrabili in $[0, 1]$:

$$f(x) = \frac{1}{x}\left(2 + \operatorname{sen} \frac{1}{x^3}\right) \quad , \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \operatorname{sen}^3 \frac{1}{\sqrt{x}} \quad , \quad h(x) = \frac{1}{x} \operatorname{sen} \frac{1}{x^3} \quad .$$

3

1 Stabilire il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{2}x+1)\sqrt{3n-2}}{n^{\sqrt{3}}\left(x^2+\frac{1}{4}\right)^{2n-1}}$$

al variare di $x \in \mathbb{R}$.

2 Stabilire il carattere delle seguenti serie numeriche:

$$(1) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{n}(2n-1)} - \frac{\log n}{5^{2n+3}}\right] ,$$

$$(2) \qquad \frac{\log 3}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\log 4}{2} - \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{\log 5}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{7}} + \frac{\log 6}{4} - \frac{1}{3} + \dots \ .$$

3 Stabilire il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{x^{(2n+1)^2}}{\sqrt{n+4}} - \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right]$$

al variare di $x \in \mathbb{R}$.

4 Dire, giustificando le risposte, quali delle seguenti serie numeriche sono convergenti:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2+n+1} \quad , \quad \sum_{n=2}^{\infty} \log \frac{n-\sqrt{n}}{1+2n} \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{sen}^2 n}{n+1}\right)^n \ .$$

5 Provare che la successione di funzioni

$$(*) \qquad \left\{\left(x + \operatorname{sen}\tfrac{1}{n}\right)^2\right\}$$

converge puntualmente in $\mathbb{R}$.

Caratterizzare gli insiemi $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, nei quali la (*) converge uniformemente.

6 Provare che la successione di funzioni

$$(*) \qquad \left\{\frac{n^2 x}{n^4+x^2}\right\}$$

converge puntualmente in $\mathbb{R}$, ma che la convergenza non è uniforme.

Sia $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$. Provare che condizione necessaria e sufficiente affinché la (*) converga uniformemente in X è che X sia limitato.

7 Stabilire il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n(n+2)}}{\sqrt{n}}$$

al variare di $x \in \mathbb{R}$.

8 Trovare lo sviluppo in serie di MacLaurin della funzione

$$f(x) \;=\; \frac{x^3}{4+x^{100}} \quad ,$$

precisandone l'intervallo di validità.

9 Trovare una serie di potenze avente per somma, in $\mathbb{R}$, la funzione

$$S(x) \;=\; \begin{cases} \dfrac{e^{x^2}-1}{x^2} & \text{se} \;\; x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 1 & \text{se} \;\; x = 0 \end{cases}$$

Calcolare quindi la derivata $S^{(100)}(0)$.

10 Stabilire il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \big[\operatorname{arctg} \log(n^2+1)\big] x^{n^3}$$

al variare di $x \in \mathbb{R}$.

11 Provare che, per ogni $a > 0$, la successione $\{\frac{1}{n} \operatorname{arctg} a^n\}$ è definitivamente decrescente. Stabilire quindi il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{arctg} x^n$$

al variare di $x \in \mathbb{R}$.

12 Stabilire il carattere delle seguenti serie numeriche:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{(n^3)!} \qquad , \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\pi \cdot \operatorname{sen} \frac{10\pi}{n} \qquad , \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2-n}{n} \cos \frac{10\pi}{n} \quad .$$

13 Sia $\{f_n\}$ la successione di funzioni reali così definita:

$$f_n(x) = \log \frac{nx+1}{nx^2+1} \qquad \forall x \in [0, +\infty[\,, \; \forall n \in \mathbb{N} \quad .$$

Provare che la successione $\{f_n\}$ converge puntualmente, ma non uniformemente, in $[0, +\infty[$.
Provare che negli intervalli $[a, +\infty[\,$, $a > 0$, la convergenza è uniforme.

14 Determinare il carattere della serie

$$(*) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \text{sen}\,\frac{1}{n} \quad .$$

Denotata, per ogni $n \in \mathbb{N}$, con T_n la somma parziale n-ma della serie (*), determinare, al variare di x in $]-1, +\infty[$, il carattere della serie di potenze

$$(**) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} T_n x^n \quad .$$

Provare che la serie (**) è divergente a $+\infty$ per $x = -1$ e oscillante per $x < -1$.

15 Provare che la serie di funzioni

$$(*) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{(1+x)^{n-1}}$$

è convergente puntualmente in $[0, +\infty[$.
Trovare la funzione somma della (*) in $[0, +\infty[$.
Provare che la serie (*) non converge uniformemente in $[0, +\infty[$.
Provare che negli intervalli $[a, +\infty[$, $a > 0$, la convergenza è uniforme.