# Verso la prova in itinere 2008 ...

(ultimo aggiornamento: 11 febbraio 2008)

**Questa breve raccolta di esercizi, raggruppati per argomenti, è particolarmente utile per la preparazione al compito scritto della prova in itinere di metà anno.**

**Gli argomenti degli esercizi sono:**

**1. Disequazioni, sistemi di disequazioni, ricerca del dominio di una funzione reale di variabile reale.**

**2. Numeri complessi.**

**3. Successioni (studio della monotonia, ricerca dell'estremo inferiore e dell'estremo superiore, successioni estratte, successioni definite per ricorrenza).**

**4. Calcolo di limiti.**

**5. Funzioni continue (ricerca del codominio di una funzione, discussione di equazioni, studio dei punti di discontinuità, condizioni necessarie e/o sufficienti di continuità).**

# 1

**1** Trovare i domini delle seguenti funzioni reali di variabile reale:

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x^3-x^2}{x^3-6x+5}\right)^n \qquad , \qquad g(x)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x^3-x^2}{x^3-6x+5}\right)^n+\log_{\frac{3}{2}}(3^x-2^x) \quad .$$

**2** Trovare i domini delle seguenti funzioni reali di variabile reale:

$$f(x)=\sqrt[4]{\mathrm{tg}\,(2x-1)^2-\sqrt{3}} \qquad , \qquad g(x)=\sqrt[4]{\mathrm{tg}\,(2x-1)^2-\sqrt{3}}+\mathrm{arcsen}\,\frac{2^{2x+1}-1}{15} \quad .$$

**3** Trovare i domini delle seguenti funzioni reali di variabile reale:

$$f(x)=\log_5\left(\sqrt{2\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{3\sqrt{2}}\mathrm{sen}\,x\right)}-1\right) \qquad , \qquad g(x)=f(x)-\sqrt{x}\log_{\frac{1}{5}}(9\pi-2x) \quad .$$

**4** Trovare i domini delle seguenti funzioni reali di variabile reale:

$$f(x)=\log_{\mathrm{sen}\,x}\left(1-3^{2\cos x+\sqrt{3}}\right) \qquad , \qquad g(x)=f(x)+x\sqrt{5+4x(x+1)-x^3} \quad .$$

**5** Trovare i domini delle seguenti funzioni reali di variabile reale:

$$f(x)=\log_{\frac{\pi}{6}}\left(\frac{\pi}{6}+\mathrm{arctg}\,\frac{x}{x+1}\right) \qquad , \qquad g(x)=f(x)-\frac{\sqrt[8]{8\sqrt{2}-2^{|4x^2+x|}}}{1+\mathrm{arctg}^2x} \quad .$$

**6** Date le funzioni reali di variabile reale:

$$f(x)=\log_{x-1}\left(x+\sqrt{x}-\sqrt{x^2-1}\right)\ ,\ g(x)=\sqrt{2^x-3}+\log\left(\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{x}\right)\ ,\ h(x)=\mathrm{arcsen}\left(\frac{4}{\pi}\,\mathrm{arcsen}\,\frac{x}{5}\right)\ ,$$

trovare il sottoinsieme di $\mathbb{R}$ costituito dai punti che appartengono

a) a tutti e tre i domini delle funzioni $f$, $g$ e $h$;

b) ad uno solo dei domini delle tre funzioni.

**7** Trovare i domini delle seguenti funzioni reali di variabile reale:

$$f(x)=\sqrt{\max\{\mathrm{sen}\,2x,\cos 2x\}-\max\{\mathrm{sen}\,x,\cos x\}}\ ,\ g(x)=f(x)-\log_{\frac{1}{10}}\left(10-\max\{x^2-3x,x+1\}\right) \quad .$$

**8** Trovare i domini delle seguenti funzioni reali di variabile reale:

$$f(x)=\sqrt{\mathrm{arcsen}\,\frac{(x-1)^2}{(x+1)^2}-\mathrm{arcsen}\,\frac{x}{x+1}} \qquad , \qquad g(x)=\frac{f(x)}{\sqrt{\mathrm{arctg}\,(5x^5-x^4)+\mathrm{arctg}\,(5x-1)}} \quad .$$

# 2

**1** Trovare tutte le coppie ordinate $(z, w)$ di numeri complessi che siano l'uno il cubo dell'altro.

**2** Risolvere nel campo complesso l'equazione

$$2z^4 - (5-i)z^3 + (7-i)z^2 - (5-i)z + 2 = 0 \quad .$$

**3** Risolvere l'equazione

$$z^4\overline{z} = 1 + i$$

nell'incognita $z \in \mathbb{C}$.

**4** Calcolare le radici quarte del numero complesso

$$\frac{i+3}{3i-1}$$

e scriverle in forma algebrica.

**5** Calcolare le radici cubiche del numero complesso

$$-\frac{(1+i)^5(-\sqrt{3}+i)^6}{32(\sqrt{3}+i)^3}$$

e scriverle in forma algebrica.

**6** Risolvere nel campo complesso l'equazione

$$z^6 + 2iz^3 - 2 = 0 \quad .$$

**7** Trovare le radici reali dell'equazione

$$z^8 - (3+i)z^7 - 3iz^5 - (1-4i)z^2 + (3+5i)z - 3i = 0 \quad .$$

**8** Calcolare le radici cubiche del numero complesso

$$-\frac{5(1+2i)^7(3+i)}{(1-2i)^4(1+i)}$$

e scriverle in forma algebrica.

# 3

**1** a) Sia $\{a_n\}$ la successione definita per ricorrenza nel modo seguente:

$$a_0 = 1 \quad , \quad 3^{a_{n+1}} = 5 \cdot 2^{a_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 \quad .$$

Provare che $\{a_n\}$ è monotona e trovarne il limite.
b) Che cosa si può dire della successione $\{b_n\}$ definita ponendo:

$$b_0 = 1 \quad , \quad 3^{b_n} = 5 \cdot 2^{b_{n+1}} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 \quad ?$$

**2** a) Data una successione $\{a_n\}$, sia $\{b_n\}$ la successione definita nel modo seguente:

$$b_n \;=\; \begin{cases} a_n & \text{se } n \in \{2k \,:\, k \in \mathbb{N}_0\}\,, \\ \dfrac{4a_n + a_{n^2-1}}{5} & \text{se } n \in \{2k+1 \,:\, k \in \mathbb{N}_0\}\,. \end{cases}$$

Dire, giustificando le risposte, quali delle seguenti implicazioni sono vere e quali no:

1) $\{a_n\}$ convergente $\Longrightarrow$ $\{b_n\}$ convergente; 2) $\{b_n\}$ convergente $\Longrightarrow$ $\{a_n\}$ convergente;
3) $\{a_n\}$ regolare $\Longrightarrow$ $\{b_n\}$ regolare; 4) $\{b_n\}$ regolare $\Longrightarrow$ $\{a_n\}$ regolare.

b) Risolvere il quesito a) considerando, invece della successione $\{b_n\}$, la seguente successione $\{c_n\}$:

$$c_n \;=\; \begin{cases} a_n & \text{se } n \in \{2k \,:\, k \in \mathbb{N}_0\}\,, \\ \dfrac{na_n + \operatorname{sen} a_{n^2-1}}{n+1} & \text{se } n \in \{2k+1 \,:\, k \in \mathbb{N}_0\}\,. \end{cases}$$

**3** Studiare la monotonia della successione $\{a_n\} = \left\{\log_{\frac{1}{3}}\left(\sqrt{n^2+n+1} - (n-1)\right)\right\}$.
Trovare il limite di $\{a_n\}$.
Determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore della successione $\{a_n\}$, precisando se si tratta, rispettivamente, di minimo e di massimo.

**4** Sono assegnate le successioni: $\{a_n\} = \left\{\frac{3n\pi}{n^2+1}\right\}$ , $\{b_n\} = \left\{\operatorname{sen}\frac{3n\pi}{n^2+1}\right\}$ .
Studiare la monotonia della successione $\{a_n\}$ e trovarne il limite.
Trovare il limite di $\{b_n\}$.
Studiare la monotonia della successione $\{b_n\}$ e trovarne l'estremo inferiore e l'estremo superiore, precisando se si tratta, rispettivamente, di minimo e di massimo.

**5** È assegnata la successione:

$$\{a_n\} = \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{(n+1)!}{5^{n+2}(n+5)}} \right\} \quad .$$

Studiare la monotonia della successione $\{a_n\}$.
Trovare il limite di $\{a_n\}$.
Trovare l'estremo inferiore e l'estremo superiore della successione $\{a_n\}$, precisando se si tratta, rispettivamente, di minimo e di massimo.

**6** Sia $\{a_n\}$ la seguente successione:

$$a_0 = \frac{1}{3}\,,\ a_1 = \frac{1}{3+\frac{1}{3}}\,,\ a_2 = \frac{1}{3+\frac{1}{3+\frac{1}{3}}}\,,\ a_3 = \frac{1}{3+\frac{1}{3+\frac{1}{3+\frac{1}{3}}}}\,,\ a_4 = \frac{1}{3+\frac{1}{3+\frac{1}{3+\frac{1}{3+\frac{1}{3}}}}}\,,\ \ldots\,.$$

a) Esprimere la legge di definizione di $\{a_n\}$ tramite il principio della definizione per induzione.
b) Provare che le due successioni estratte $\{a_{2n}\}$ e $\{a_{2n+1}\}$ sono monotone.
c) Provare che $\{a_n\}$ è regolare e trovarne il limite.

**7** a) Provare che la successione $\{a_n\} = \left\{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n+1}\right\}$ è decrescente (suggerimento: usare il fatto che la successione notevole $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$ è decrescente) e trovarne il limite.
b) Trovare l'estremo inferiore e l'estremo superiore della seguente successione $\{b_n\}$:

$$b_n \;=\; \begin{cases} \sqrt{\frac{3n+5}{n+1}} & \text{se } n \in \{2k \,:\, k \in \mathbb{N}_0\}\,, \\ \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n+1} & \text{se } n \in \{2k+1 \,:\, k \in \mathbb{N}_0\}\,, \end{cases}$$

precisando se si tratta, rispettivamente, di minimo e di massimo.

**8** a) Dimostrare che condizione necessaria affinché una successione $\{a_n\}$ sia regolare è che le due successioni $\{m_n\}$ e $\{M_n\}$, definite ponendo, per ogni $n \in \mathbb{N}_0$,

$$m_n = \min_{n \le i \le 2n} a_i \quad , \quad M_n = \max_{n \le i \le 2n} a_i \quad ,$$

siano entrambe regolari ed abbiano lo stesso limite.
b) Stabilire se la precedente condizione è anche sufficiente. Giustificare la risposta data.
c) Costruire una successione $\{a_n\}$ tale che, delle due successioni $\{m_n\}$ e $\{M_n\}$, una sia regolare e l'altra oscillante.

# 4

**1** Calcolare i seguenti limiti, menzionando, di volta in volta, i teoremi che si applicano:

$$\lim_{x\to+\infty} |\sqrt{x-2}-5| \operatorname{tg} \frac{2x}{\sqrt{x^3-x+1}} \qquad , \qquad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2-3n+2}{n^2+3n}\right)^{\sqrt{n-\operatorname{sen} n}} \quad .$$

**2** Calcolare i seguenti limiti, menzionando, di volta in volta, i teoremi che si applicano:

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{4^{x(x-\pi)}-1} \qquad , \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n+(-1)^n n^2+\sqrt{n}} \quad .$$

**3** Calcolare i seguenti limiti, menzionando, di volta in volta, i teoremi che si applicano:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log_2(1+x)}{\log_4(1+5x)} \qquad , \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{2^n+3^{-n}}\right)^4}-1}{\operatorname{sen}\frac{3}{2^n}} \quad .$$

**4** Calcolare i seguenti limiti, menzionando, di volta in volta, i teoremi che si applicano:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\operatorname{sen}(2^x+3^x)}{\operatorname{sen}(3^x+4^x)} \qquad , \qquad \lim_{x\to 3} \left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{3-x}} \quad .$$

**5** Calcolare i seguenti limiti, menzionando, di volta in volta, i teoremi che si applicano:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(1+\cos x)^7-1}{x-\frac{\pi}{2}} \qquad , \qquad \lim_{x\to 0} \frac{2^x-2^{-x}}{\sqrt{x}} \quad .$$

**6** Calcolare i seguenti limiti, menzionando, di volta in volta, i teoremi che si applicano:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_5(1-2^{-x^2})}{\log_3(1+5^{-x})} \qquad , \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{4^n}{(n+2)\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)} \quad .$$

**7** Calcolare i seguenti limiti, menzionando, di volta in volta, i teoremi che si applicano:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{(3+(-1)^n)^n\,(n+1)!}{(2n+3)!}\right)^{n!} \qquad , \qquad \lim_{x\to+\infty} 2^{\frac{x}{x^2-1}} \sqrt{|x-x^2|} \operatorname{arctg} \frac{x}{x^2-1} \quad .$$

**8** Calcolare i seguenti limiti, menzionando, di volta in volta, i teoremi che si applicano:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} \operatorname{arcsen} \frac{1}{2n+3}\right)^{\operatorname{tg}\frac{n\pi+3}{2n+1}} \qquad , \qquad \lim_{x\to 0} \left(1+\log(1+x^2)\right)^{\frac{x}{x+2^x}} \quad .$$

# 5

**1** Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita nel modo seguente:

$$f(x) \;=\; \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{3 \cdot 2^x}{2^x + 1} & \text{se } x \in ]-\infty, -1]\,, \\ x^4 & \text{se } x \in ]-1, 2[\,, \\ \dfrac{1}{x} - 1 & \text{se } x \in [2, +\infty[\,. \end{cases}$$

Studiare la continuità e la monotonia di $f$.
Trovare il codominio di $f$ e discutere, al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$, l'equazione $f(x) = \lambda$.

**2** Sia $f : [0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ una funzione continua e iniettiva, tale che:

$$f(0) \;=\; 0 \quad , \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 5 \quad .$$

Provare che risulta $0 < f(x) \leq 5 \;\; \forall x \in ]0, +\infty[$.
Provare che risulta $0 < f(x) < 5 \;\; \forall x \in ]0, +\infty[$.
Provare che $f$ è crescente in $[0, +\infty[$.

**3** Posto $A = ]-\infty, 0] \cap \mathbb{Q}$ , $B = \left\{ \frac{1}{n} \,:\, n \in \mathbb{N} \right\}$, sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita nel modo seguente:

$$f(x) \;=\; \begin{cases} -x & \text{se } x \in A \cup B\,, \\ x^2 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus (A \cup B)\,. \end{cases}$$

Trovare tutti i punti di discontinuità per la funzione $f$, precisandone la natura.

**4** Provare che l'equazione (nell'incognita $x \in \mathbb{R}$)

$$x^2 \;=\; \operatorname{cotg} x$$

ha infinite soluzioni e che l'insieme di tali soluzioni non è limitato né inferiormente né superiormente.

**5** Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione dispari. Provare che condizione necessaria e sufficiente affinché la funzione $f$ sia continua (in $\mathbb{R}$) è che la restrizione $f|_{[0,+\infty[}$ sia continua (in $[0, +\infty[$).

**6** Sia $f : ]-\infty, \sqrt{5}[ \to \mathbb{R}$ la funzione definita nel modo seguente:

$$f(x) \;=\; \begin{cases} 3 - 2^{1-x} & \text{se } x \in ]-\infty, -2]\ , \\ 8 \operatorname{sen}^2 \dfrac{\pi x}{12} & \text{se } x \in ]-2, 2[\ , \\ \log_3(25 - x^4) & \text{se } x \in [2, \sqrt{5}[\ . \end{cases}$$

Studiare la continuità e la monotonia di $f$.
Trovare il codominio di $f$ e discutere, al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$, l'equazione $f(x) = \lambda$.

**7** Sia $f : ]0,+\infty[ \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 5$$

e sia $A = \{x \in ]0,+\infty[ \,:\, f(x) = 2\}$.
Provare che l'insieme $A$

a) non è vuoto;
b) è limitato;
c) ha minimo e massimo.

**8** Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita nel modo seguente:

$$f(x) \;=\; \begin{cases} \operatorname{arctg} 2x^2 & \text{se } x \in \mathbb{Q}\,, \\ \operatorname{arctg} x^3 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\,. \end{cases}$$

Dire, giustificando le risposte,
a) se esistono i limiti:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) \quad ;$$

b) quali sono i punti $x_0 \in \mathbb{R}$ nei quali la funzione $f$ è continua;
c) di che tipo sono i punti di discontinuità per la funzione $f$;
d) se è vero che la restrizione di $f$ ad un qualsiasi intervallo chiuso e limitato $[a,b]$ è una funzione limitata;
e) se è vero che la restrizione di $f$ all'intervallo $[\frac{1}{2}, \sqrt{2}]$ è dotata di minimo e di massimo (assoluti).

# Soluzioni

## 1.1

$$\mathrm{dom} f = \left( \left] \tfrac{-1-\sqrt{41}}{4}, \tfrac{-1+\sqrt{41}}{4} \right[ \setminus \{1\} \right) \cup [5, +\infty[ \quad , \quad \mathrm{dom} g = \left( \left] 0, \tfrac{-1+\sqrt{41}}{4} \right[ \setminus \{1\} \right) \cup [5, +\infty[ \quad .$$

## 1.2

$$\mathrm{dom} f = \left( \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} \left] \tfrac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\tfrac{\pi}{2} + k\pi}\right), \tfrac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\tfrac{\pi}{3} + k\pi}\right) \right] \right) \cup \left( \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} \left[ \tfrac{1}{2}\left(1 + \sqrt{\tfrac{\pi}{3} + k\pi}\right), \tfrac{1}{2}\left(1 + \sqrt{\tfrac{\pi}{2} + k\pi}\right) \right[ \right) ,$$

$$\mathrm{dom} g = \left( \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} \left] -\tfrac{1}{2}\left(1 + \sqrt{\tfrac{\pi}{2} + k\pi}\right), -\tfrac{1}{2}\left(1 + \sqrt{\tfrac{\pi}{3} + k\pi}\right) \right] \right) \cup \left[ \tfrac{1}{2}\left(1 + \sqrt{\tfrac{\pi}{3}}\right), \tfrac{1}{2}\left(1 + \sqrt{\tfrac{\pi}{2}}\right) \right[ \; .$$

## 1.3

$$\mathrm{dom} f = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] \tfrac{\pi}{4} + 2k\pi, \tfrac{3\pi}{4} + 2k\pi \right[ \quad , \quad \mathrm{dom} g = \left] \tfrac{\pi}{4}, \tfrac{3\pi}{4} \right[ \cup \left] \tfrac{\pi}{4} + 2\pi, \tfrac{3\pi}{4} + 2\pi \right[ \cup \left] \tfrac{\pi}{4} + 4\pi, \tfrac{\pi}{2} + 4\pi \right[ \; .$$

## 1.4

$$\mathrm{dom} f = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] \tfrac{5\pi}{6} + 2k\pi, \pi + 2k\pi \right[ \quad , \quad \mathrm{dom} g = \bigcup_{k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}} \left] \tfrac{5\pi}{6} + 2k\pi, \pi + 2k\pi \right[ \quad .$$

## 1.5

$$\mathrm{dom} f = ]-\infty, -1[ \cup \left] -\tfrac{\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}, +\infty \right[ \quad , \quad \mathrm{dom} g = \left] \tfrac{-1-\sqrt{57}}{8}, -1 \right[ \cup \left] -\tfrac{\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}, \tfrac{-1+\sqrt{57}}{8} \right[ \quad .$$

## 1.6

a) $\left[\log_2 3, \frac{5\sqrt{2}}{2}\right] \setminus \{2\}$ , b) $\left[-\frac{5\sqrt{2}}{2}, 1\right]$ .

## 1.7

$$\mathrm{dom} f = \{2k\pi \,:\, k \in \mathbb{Z}\} \cup \left( \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[ \tfrac{\pi}{6} + 2k\pi, \tfrac{\pi}{3} + 2k\pi \right] \right) \cup \left( \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[ \tfrac{5\pi}{6} + 2k\pi, \tfrac{3\pi}{2} + 2k\pi \right] \right) \quad ,$$

$$\mathrm{dom} g = \left] -2, -\tfrac{\pi}{2} \right] \cup \{0\} \cup \left[ \tfrac{\pi}{6}, \tfrac{\pi}{3} \right] \cup \left[ \tfrac{5\pi}{6}, \tfrac{3\pi}{2} \right] \quad .$$

## 1.8

$$\mathrm{dom} f = \left[0, \tfrac{1}{3}\right] \quad , \quad \mathrm{dom} g = \left] \tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{3} \right] \quad .$$

## 2.1

$$(0,0)\ ,\ (1,1)\ ,\ \left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}(-1+i), \tfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right)\ ,\ (-i,i)\ ,\ \left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i), \tfrac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)\right)\ ,$$

$$(-1,-1)\ ,\ \left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}(1-i), \tfrac{\sqrt{2}}{2}(-1-i)\right)\ ,\ (i,-i)\ ,\ \left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}(-1-i), \tfrac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\right)\ .$$

## 2.2

$$\tfrac{1}{2}\big(1 \pm \sqrt{3}i\big)\ ,\ 1-i\ ,\ \tfrac{1}{2}(1+i)\ .$$

## 2.3

$$\tfrac{1}{2\sqrt[5]{4}}\Big(\sqrt{3}+1+(\sqrt{3}-1)i\Big)\ ,\ \tfrac{1}{\sqrt[5]{4}}(-1+i)\ ,\ -\tfrac{1}{2\sqrt[5]{4}}\Big(\sqrt{3}-1+(\sqrt{3}+1)i\Big)\ .$$

## 2.4

$$\pm\tfrac{1}{2}\Big(\sqrt{2+\sqrt{2}} - i\sqrt{2-\sqrt{2}}\Big)\ ,\ \pm\tfrac{1}{2}\Big(\sqrt{2-\sqrt{2}} + i\sqrt{2+\sqrt{2}}\Big)\ .$$

## 2.5

$$\tfrac{1}{\sqrt[3]{2}}(1+i)\ ,\ -\tfrac{1}{2\sqrt[3]{2}}\Big(\sqrt{3}+1+(\sqrt{3}-1)i\Big)\ ,\ \tfrac{1}{2\sqrt[3]{2}}\Big(\sqrt{3}-1-(\sqrt{3}+1)i\Big)\ .$$

## 2.6

$$\tfrac{1}{2\sqrt[3]{2}}\left[\pm(\sqrt{3}+1)-(\sqrt{3}-1)i\right]\ ,\ \tfrac{1}{2\sqrt[3]{2}}\left[\pm(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{3}+1)i\right]\ ,\ \tfrac{1}{\sqrt[3]{2}}(\pm 1 - i)\ .$$

## 2.7

L'unica radice reale dell'equazione data è $z=-1$ .

## 2.8

$$\tfrac{1}{2}\left[5\sqrt{3}+24+(5-24\sqrt{3})i\right]\ ,\ \tfrac{1}{2}\left[-5\sqrt{3}+24+(5+24\sqrt{3})i\right]\ ,\ -24-5i\ .$$

### 3.1

a) La successione $\{a_n\}$ è crescente e $\lim_{n\to\infty} a_n = \log_{\frac{3}{2}} 5$ .

b) La successione $\{b_n\}$ è decrescente e $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$ .

### 3.2

a) Le implicazioni 1), 2) e 3) sono vere. La 4) è falsa; un controesempio è dato dalla successione

$$a_n = \begin{cases} n & \text{se } n \in \{2k \,:\, k \in \mathbb{N}_0\}\,, \\ 0 & \text{se } n \in \{2k+1 \,:\, k \in \mathbb{N}_0\}\,. \end{cases}$$

b) Tutte e quattro le implicazioni sono vere.

### 3.3

La successione $\{a_n\}$ è crescente.
$\lim_{n\to\infty} a_n = \log_{\frac{1}{3}} \frac{3}{2}$ .
$\min_{n\in\mathbb{N}_0} a_n = a_0 = \log_{\frac{1}{3}} 2$ ; $\sup_{n\in\mathbb{N}_0} a_n = \log_{\frac{1}{3}} \frac{3}{2}$ (non è massimo).

### 3.4

La successione $\{a_n\}$ è definitivamente decrescente: $a_n > a_{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N}$ e $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ .
$\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ .
$b_0 > b_1$ ; $b_1 < b_2 < \ldots < b_5$ ; $b_n > b_{n+1}\ \forall n \geq 6$ . $\min_{n\in\mathbb{N}_0} b_n = b_1 = -1$ ; $\max_{n\in\mathbb{N}_0} b_n = b_6 = \operatorname{sen} \frac{18\pi}{37}$ .

### 3.5

$a_0 < a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ ; $a_n > a_{n+1}\ \forall n \geq 4$ .
$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ .
$\inf_{n\in\mathbb{N}_0} a_n = 0$ (non è minimo) ; $\max_{n\in\mathbb{N}_0} a_n = a_4$ .

### 3.6

a) $a_0 = \frac{1}{3}$ , $a_{n+1} = \frac{1}{3+a_n}\ \forall n \in \mathbb{N}_0$ .

b) La successione $\{a_{2n}\}$ è decrescente, mentre la $\{a_{2n+1}\}$ è crescente.

c) $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\sqrt{13}-3}{2}$ .

### 3.7

a) Per provare che la successione $\{a_n\}$ è decrescente basta osservare che il suo termine generale si può scrivere nella forma $a_n = \sqrt{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n+1}\left(1+\frac{1}{2n}\right)}$ .
$\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{\mathrm{e}}$ .
b) $\inf_{n\in\mathbb{N}_0} b_n = \sqrt{\mathrm{e}}$ (non è minimo) ; $\max_{n\in\mathbb{N}_0} b_n = b_1 = \frac{9}{4}$ .

### 3.8

b) La condizione è anche sufficiente; basta osservare che è: $m_n \leq a_n \leq M_n\ \forall n \in \mathbb{N}_0$ e applicare i teoremi di confronto.
c) Un esempio di successione con i requisiti richiesti è

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \in \{2^{4k+1} \,:\, k \in \mathbb{N}_0\}\,, \\ 0 & \text{se } n \in \mathbb{N}_0 \setminus \{2^{4k+1} \,:\, k \in \mathbb{N}_0\}\,. \end{cases}$$

## 4.1

$$\lim_{x\to+\infty} |\sqrt{x-2}-5| \operatorname{tg} \frac{2x}{\sqrt{x^3-x+1}} \;=\; 2 \qquad ; \qquad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2-3n+2}{n^2+3n}\right)^{\sqrt{n-\operatorname{sen} n}} \;=\; 1 \;\; .$$

## 4.2

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{4^{x(x-\pi)}-1} \;=\; -\frac{1}{\pi \log 4} \qquad ; \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n+(-1)^n n^2+\sqrt{n}} \;=\; 2 \; .$$

## 4.3

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log_2(1+x)}{\log_4(1+5x)} \;=\; \frac{2}{5} \qquad ; \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{2^n+3^{-n}}\right)^4}-1}{\operatorname{sen} \frac{3}{2^n}} \;=\; \frac{4}{9} \; .$$

## 4.4

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\operatorname{sen}(2^x+3^x)}{\operatorname{sen}(3^x+4^x)} \;=\; +\infty \qquad ; \qquad \lim_{x\to 3} \left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{3-x}} \;=\; e^{-\frac{1}{3}} \;\; .$$

## 4.5

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(1+\cos x)^7-1}{x-\frac{\pi}{2}} \;=\; -7 \qquad ; \qquad \lim_{x\to 0} \frac{2^x-2^{-x}}{\sqrt{x}} \;=\; 0 \; .$$

## 4.6

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_5(1-2^{-x^2})}{\log_3(1+5^{-x})} \;=\; 0 \qquad ; \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{4^n}{(n+2)\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)} \;=\; +\infty \;\; .$$

## 4.7

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{(3+(-1)^n)^n\,(n+1)!}{(2n+3)!}\right)^{n!} \;=\; 0 \qquad ; \qquad \lim_{x\to+\infty} 2^{\frac{x}{x^2-1}} \sqrt{|x-x^2|} \operatorname{arctg} \frac{x}{x^2-1} \;=\; 1 \;\; .$$

## 4.8

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1}\, \operatorname{arcsen} \frac{1}{2n+3}\right)^{\operatorname{tg} \frac{n\pi+3}{2n+1}} \;=\; +\infty \qquad , \qquad \lim_{x\to 0} \left(1+\log(1+x^2)\right)^{\frac{x}{x+2^x}} \;=\; 1 \;\; .$$

## 5.1

La funzione $f$ è continua in $\mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$ . I punti $-1$ e 2 sono di discontinuità di prima specie e la $f$ è continua da sinistra nel punto $-1$ e continua da destra nel punto 2 . La funzione $f$ è crescente in ciascuno degli intervalli $]-\infty, -1]$, $[0, 2[$ ed è decrescente in ciascuno degli intervalli $]-1, 0]$ e $[2, +\infty[$.

Il codominio di $f$ è $]-1, -\frac{1}{2}] \cup [0, 16[$ . L'equazione $f(x) = \lambda$ è impossibile per $\lambda \in ]-\infty, -1] \cup ]-\frac{1}{2}, 0[ \cup [16, +\infty[$ , ha una soluzione per $\lambda \in ]-1, -\frac{1}{2}] \cup \{0\} \cup [1, 16[$ , due soluzioni per $\lambda \in ]\frac{\pi}{4}, 1[$ e tre soluzioni per $\lambda \in ]0, \frac{\pi}{4}]$ .

## 5.2

Sia $\overline{x} \in ]0, +\infty[$. Proviamo che risulta $0 < f(\overline{x}) \leq 5$. Ovviamente non può essere $f(\overline{x}) = 0$, perché ciò, essendo $f(0) = 0$, contraddice l'iniettività di $f$. Facciamo vedere che anche le ipotesi $f(\overline{x}) < 0$ e $f(\overline{x}) > 5$ conducono ad una contraddizione. Supponiamo che sia $f(\overline{x}) < 0$; poiché $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 5$, per il teorema della permanenza del segno esiste $h > 0$ tale che $f(x) > 0 \ \forall x \in ]h, +\infty[$ ; fissiamo $\overline{\overline{x}} \in ]h, +\infty[$ (ovviamente sarà $\overline{\overline{x}} > \overline{x}$) e applichiamo il teorema dell'esistenza degli zeri alla restrizione $f|_{[\overline{x}, \overline{\overline{x}}]}$; otteniamo l'esistenza di $c \in ]\overline{x}, \overline{\overline{x}}[$ tale che $f(c) = 0$, ma ciò, come sappiamo, contraddice l'iniettività di $f$. Supponiamo che sia $f(\overline{x}) > 5$; allora, fissato un qualunque $y \in ]5, f(\overline{x})[$, per il teorema dei valori intermedi applicato alla restrizione $f|_{[0, \overline{x}]}$, esiste $x_1 \in ]0, \overline{x}[$ tale che $f(x_1) = y$; d'altra parte, essendo $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 5 < y$, per la generalizzazione del teorema della permanenza del segno esiste $\sigma > 0$ tale che $f(x) < y \ \forall x \in ]\sigma, +\infty[$ ; fissiamo $\overline{\overline{x}} \in ]\sigma, +\infty[$ e applichiamo il teorema dei valori intermedi a $f|_{[\overline{x}, \overline{\overline{x}}]}$; otteniamo l'esistenza di $x_2 \in ]\overline{x}, \overline{\overline{x}}[$ tale che $f(x_2) = y$; abbiamo così trovato $x_1, x_2 \in [0, +\infty[$, $x_1 \neq x_2$, tali che $f(x_1) = f(x_2)$, in contraddizione con l'ipotesi che $f$ sia iniettiva.

Proviamo adesso che anche l'ipotesi $f(\overline{x}) = 5$, $\overline{x} \in ]0, +\infty[$, conduce ad una contraddizione. Infatti, fissato $\overline{\overline{x}} \in ]\overline{x}, +\infty[$, per quanto già dimostrato e per l'iniettività di $f$ si ha $f(\overline{\overline{x}}) < 5$; allora, preso un qualunque valore $y \in ]f(\overline{\overline{x}}), 5[$, applicando due volte il teorema dei valori intermedi si prova l'esistenza di due elementi distinti di $[0, +\infty[$, $x_1 \in ]0, \overline{x}[$ e $x_2 \in ]\overline{x}, \overline{\overline{x}}[$, tali che $f(x_1) = y = f(x_2)$, contraddicendo così, ancora una volta, l'iniettività di $f$.

Proviamo infine che $f$ è crescente. Supponiamo, per assurdo, che esistano $\overline{x}, \overline{\overline{x}} \in [0, +\infty[$, $\overline{x} < \overline{\overline{x}}$, tali che $f(\overline{x}) \geq f(\overline{\overline{x}})$. Per l'iniettività di $f$ deve essere $f(\overline{x}) > f(\overline{\overline{x}})$; di conseguenza (dato che $f(0) = 0$) è necessariamente $\overline{x} > 0$. Allora, fissato un qualsiasi valore $y \in ]f(\overline{\overline{x}}), f(\overline{x})[$, ragionando come in precedenza, si trovano $x_1 \in ]0, \overline{x}[$ e $x_2 \in ]\overline{x}, \overline{\overline{x}}[$ tali che $f(x_1) = y = f(x_2)$, in contraddizione con l'iniettività di $f$.

## 5.3

L'insieme dei punti di discontinuità per la funzione $f$ è $(]-\infty, 0[ \setminus \{-1\}) \cup B$ . I punti $x \in ]-\infty, 0[ \setminus \{-1\}$ sono di discontinuità di seconda specie; i punti $x \in B$ sono di discontinuità eliminabile.

## 5.4

Proviamo che, qualunque sia $h \in \mathbb{Z}$, l'equazione

$$(*) \qquad x^2 = \operatorname{cotg} x$$

ha almeno una soluzione $x_h$ appartenente all'intervallo $]h\pi, \pi + h\pi[$ ; da ciò segue facilmente che vi sono infinite soluzioni dell'equazione (*) e che l'insieme di tali soluzioni non è limitato né inferiormente né superiormente.

Fissato $h \in \mathbb{Z}$ ed indicata con $f_h$ la restrizione della funzione $x^2 - \operatorname{cotg} x$ all'intervallo $]h\pi, \pi + h\pi[$, osserviamo che risulta

$$\lim_{x \to h\pi+} f_h(x) = -\infty \qquad , \qquad \lim_{x \to \pi + h\pi-} f_h(x) = +\infty \quad ,$$

dunque il codominio $f_h(]h\pi, \pi + h\pi[)$ non è è limitato né inferiormente né superiormente; d'altra parte, essendo $f_h$ una funzione continua, tale codominio è un intervallo, dunque $f_h(]h\pi, \pi + h\pi[) = \mathbb{R}$; di conseguenza esiste $x_h \in ]h\pi, \pi + h\pi[$ tale che $f_h(x_h) = 0$, cioè $x_h$ è soluzione della (*).

## 5.5

La necessità della condizione è un'immediata conseguenza del teorema di continuità della restrizione.

Per provarne la sufficienza si osserva che, posto $g = f|_{[0,+\infty[}$, $h = f|_{]-\infty,0]}$, se la funzione $g$ è continua, allora, essendo $h(x) = -g(-x)\ \forall x \in ]-\infty, 0]$, anche la $h$ è continua per il teorema di continuità della funzione composta; dalla continuità della $g$ e della $h$ è poi facile ricavare, usando il teorema sui limiti delle "restrizioni larghe", distinguendo i casi $c > 0$, $c < 0$ e $c = 0$, la continuità di $f$ in ogni punto $c \in \mathbb{R}$.

## 5.6

La funzione $f$ è continua in $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$. Il punto $-2$ è di discontinuità di prima specie e la $f$ è continua da sinistra in tale punto.

La funzione $f$ è crescente in ciascuno degli intervalli $]-\infty, -2]$ e $[0, 2]$, decrescente in ciascuno degli intervalli $]-2, 0]$ e $[2, \sqrt{5}[$.

Il codominio di $f$ è $]-\infty, 2]$. L'equazione $f(x) = \lambda$ è impossibile per $\lambda \in ]2, +\infty[$, ha una soluzione per $\lambda \in ]-5, 0[ \cup \{2\}$, due soluzioni per $\lambda \in ]-\infty, -5] \cup \{0\}$ e tre soluzioni per $\lambda \in ]0, 2[$.

## 5.7

Essendo $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 < 2$, per la generalizzazione del teorema della permanenza del segno esiste $\delta > 0$ tale che $f(x) < 2\ \forall x \in ]0, \delta[$; analogamente, essendo $\lim_{x\to\infty} f(x) = 5 > 2$, esiste $h > 0$ tale che $f(x) > 2\ \forall x \in ]h, +\infty[$. Ovviamente si ha $\delta \le h$.

Per provare che l'insieme $A$ non è vuoto basta applicare il teorema dei valori intermedi alla restrizione della funzione $f$ ad un qualunque intervallo $[a, b]$, con $a \in ]0, \delta[$ e $b \in ]h, +\infty[$.

Per provare che l'insieme $A$ è limitato basta osservare che, per le proprietà di cui godono i numeri $\delta$ e $h$, si ha $\delta \le x \le h\ \forall x \in A$. Dunque $A$ è limitato e, posto $l = \inf A$, $L = \sup A$, risulta $\delta \le l$, $L \le h$.

Infine, per provare che $l, L \in A$ basta ragionare per assurdo. Ad esempio, se si suppone che $l \notin A$, il che equivale a dire che è $f(l) \neq 2$, la generalizzazione del teorema della permanenza del segno implica l'esistenza di un $\sigma > 0$ tale che $f(x) \neq 2\ \forall x \in ]l - \sigma, l + \sigma[ \cap ]0, +\infty[$; ciò comporta che nessun elemento dell'insieme $A$ è minore di $l + \sigma$, ma questo contraddice la seconda proprietà dell'estremo inferiore.

## 5.8

a) Il $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ non esiste; il $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ è uguale a $\frac{\pi}{2}$.

b) La funzione $f$ è continua nei punti 0 e 2.

c) Tutti i punti di $\mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$ sono di discontinuità di seconda specie per la funzione $f$.

d) È ovviamente vero; infatti la funzione $f$ è limitata in $\mathbb{R}$: $-\frac{\pi}{2} < f(x) < \frac{\pi}{2}\ \forall x \in \mathbb{R}$.

e) Falso. Anzi è vero che la restrizione in questione non ha né minimo né massimo; infatti l'insieme immagine $f([\frac{1}{2}, \sqrt{2}])$ ha come estremo inferiore e superiore, rispettivamente, $\operatorname{arctg} \frac{1}{8}$ e $\operatorname{arctg} 4$, ma nessuno di questi due numeri appartiene a $f([\frac{1}{2}, \sqrt{2}])$.