Corso di studio in **Fisica**
Compito di **Analisi matematica I**
assegnato il 21 febbraio 2006 (prova in itinere)

A

1 Trovare i domini delle seguenti funzioni reali di variabile reale:

$$f(x) = \sqrt[4]{2\operatorname{sen} 2^x + 1} \qquad , \qquad g(x) = \sqrt[4]{2\operatorname{sen} 2^x + 1} - \log_4(-x) \quad .$$

2 Trovare tutte le coppie ordinate $(z, w) \in \mathbb{C}^2$ tali che ciascuno dei due numeri z e w sia uguale al prodotto del quadrato dell'altro per il coniugato di $\frac{3+2i}{2-3i}$. (Esprimere i risultati utilizzando la forma algebrica dei numeri complessi.)

3 Studiare la monotonia della successione

$$\{a_n\} = \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{4n^2+1}-2n+1} \right\} \quad .$$

Trovare il limite di $\{a_n\}$.

Determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore della successione $\{a_n\}$, precisando se si tratta, rispettivamente, di minimo e di massimo.

4 Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2^n + n + 1}{2^n + 1}\right)^{n^2} \qquad , \qquad \lim_{x\to 0} \frac{3^{|\operatorname{sen} x|} - 2^{\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x}} \quad .$$

5 Sia $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f(0) = 0$, $f(1) = 5$.
a) Provare che vale l'implicazione

$$f \ \text{ iniettiva} \quad \Longrightarrow \quad f([0, 1]) \ = \ [0, 5] \quad .$$

b) Decidere se vale pure l'implicazione contraria.

Corso di studio in **Fisica**
Compito di **Analisi matematica I**
assegnato il 21 febbraio 2006 (prova in itinere)

B

1 Trovare i domini delle seguenti funzioni reali di variabile reale:

$$f(x) = \log_4\left(\sqrt{2}\cos 3^x + 1\right) \qquad , \qquad g(x) = \log_4\left(\sqrt{2}\cos 3^x + 1\right) - \sqrt[4]{-x} \quad .$$

2 Trovare tutte le coppie ordinate $(z, w) \in \mathbb{C}^2$ tali che ciascuno dei due numeri z e w sia uguale al prodotto del quadrato dell'altro per il coniugato di $\frac{4(1-i)}{(1+i)^3}$. (Scrivere i risultati utilizzando la forma algebrica dei numeri complessi).

3 Studiare la monotonia della successione

$$\{a_n\} = \left\{\log_2\left(2n + 3 - \sqrt{4n^2 - n + 1}\right)\right\} \quad .$$

Trovare il limite di $\{a_n\}$.

Determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore della successione $\{a_n\}$, precisando se si tratta, rispettivamente, di minimo e di massimo.

4 Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+1}\right)^{\sqrt{n+\cos n}} \qquad , \qquad \lim_{x\to 0}\frac{4^{|x|+\operatorname{sen}^2 x} - 3^{\sqrt{|x|}}}{\sqrt{|x|}} \quad .$$

5 Sia $f : [0,3] \to \mathbb{R}$ una funzione iniettiva tale che $f(0) = 0$, $f(3) = 5$.
a) Provare che vale l'implicazione

$$f \;\text{ continua} \quad \Longrightarrow \quad f([0,3]) \;=\; [0,5] \quad .$$

b) Decidere se vale pure l'implicazione contraria.

Corso di studio in **Fisica**
Compito di **Analisi matematica I**
assegnato il 12 giugno 2006

1 Calcolare le radici quarte del numero complesso

$$\frac{(\sqrt{3}i-1)(1-i)^8}{64(1+i)^8}$$

e scriverle in forma algebrica.

2 Studiare la monotonia della successione

$$\{a_n\} = \left\{3n+1-\sqrt{9n^2+1}\right\} \quad .$$

Trovare il limite di $\{a_n\}$.
Determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore della successione $\{a_n\}$, precisando se si tratta, rispettivamente, di minimo e di massimo.

3 Studiare la funzione reale di variabile reale

$$f(x) = \log_2(|\operatorname{sen} x| + \cos x + 1)$$

e disegnarne il grafico.

4a Stabilire il carattere delle seguenti serie numeriche:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{2n+3}}{(2n-1)!} \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{\pi}{2n+3} \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2-n^2}{n^2} \quad .$$

4b Provare, senza calcolarne l'integrale, che la funzione

$$\frac{1}{x^2} \operatorname{sen}^3 \frac{1}{x}$$

è integrabile in $[\frac{2}{\pi}, +\infty[$.
Calcolare quindi l'integrale improprio

$$\int_{[\frac{2}{\pi}, +\infty[} \frac{1}{x^2} \operatorname{sen}^3 \frac{1}{x} \, dx \quad .$$

Corso di studio in **Fisica**
Compito di **Analisi matematica I**
assegnato il 28 giugno 2006

1 Considerata la successione $\{a_n\} = \left\{ \frac{n!}{(2n-1)5^n} \right\}$,
a) decidere se si tratta di una successione monotòna;
b) trovarne il limite;
c) trovarne l'estremo inferiore e l'estremo superiore, precisando se si tratta, rispettivamente, di minimo e di massimo.

2 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita nel modo seguente:

$$f(x) \;=\; \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q}\,, \\ \operatorname{sen} x & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\,. \end{cases}$$

Dire, giustificando le risposte,
a) se esiste il $\lim_{x \to +\infty} f(x)$;
b) quali sono i punti $x_0 \in \mathbb{R}$ nei quali la funzione f è continua;
c) di che tipo sono i punti di discontinuità di f.

3 Studiare la funzione reale di variabile reale

$$f(x) = \frac{x-2}{x}\, e^{\frac{2}{|x|}}$$

e disegnarne il grafico.

4a Trovare tutti i valori di $x \in \mathbb{R}$ per i quali la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{x^{n^2}}{\sqrt{n}} - \frac{3}{5^{n+1}} \right]$$

è convergente.

4b Provare, senza calcolarne l'integrale, che la funzione

$$\frac{8x^3}{(x^2-2)^2(x^4+4)}$$

è integrabile nell'intervallo $[2\sqrt{3}, +\infty[$.
Calcolare quindi l'integrale improprio

$$\int_{[2\sqrt{3},+\infty[} \frac{8x^3}{(x^2-2)^2(x^4+4)}\, \mathrm{d}x \quad .$$

Corso di studio in **Fisica**
Compito di **Analisi matematica I**
assegnato il 19 luglio 2006

1 Sono assegnate le successioni: $\{a_n\} = \left\{ \frac{n^2-n+1}{n^2+5} \right\}$, $\{b_n\} = \{\cos 2\pi a_n\}$.
Studiare la monotonia della successione $\{a_n\}$, calcolarne il limite e trovarne l'estremo inferiore e l'estremo superiore, precisando se si tratta, rispettivamente, di minimo e di massimo.
Rispondere agli stessi quesiti per la successione $\{b_n\}$.

2 Risolvere nel campo complesso l'equazione

$$(z - 2\mathcal{I}m\, z)^3 = \frac{(1+i)(i-1)^4}{16} \quad .$$

3 Studiare la funzione reale di variabile reale

$$f(x) = \frac{|2x^2 - 19x + 44|}{x - 6}$$

e disegnarne il grafico.

4a Stabilire il carattere delle seguenti serie numeriche:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 7}{3^{n^2-n}} \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{n+1}{2n-1} \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{4n-3}} \quad .$$

4b a) Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \left[\log x - \frac{x^2}{\sqrt{2-x}} \right] dx \quad .$$

b) Stabilire se la funzione $\log x - \frac{x^2}{\sqrt{2-x}}$ è integrabile in senso generalizzato nell'intervallo $[0, 2]$.

Corso di studio in **Fisica**
Compito di **Analisi matematica I**
assegnato il 6 settembre 2006

1 Calcolare le radici quarte del numero complesso

$$\frac{3i-1}{3+i}$$

e scriverle in forma algebrica.

2 Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\operatorname{sen}(2^x+3^x)}{\operatorname{sen}(4^x+9^x)} \qquad , \qquad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+n+5}{2n^2+1}\right)^{\sqrt{n+\operatorname{sen} n}} \qquad .$$

3 Studiare la funzione reale di variabile reale

$$f(x)=\frac{x-1}{x+1}\,e^{\frac{2}{x}}$$

e disegnarne il grafico.

4a Stabilire il carattere delle seguenti serie numeriche:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{2n+1}}{(2n+1)^n} \qquad , \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n}-\frac{\sqrt{n+1}}{n}\right) \qquad , \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\operatorname{tg}\frac{\pi}{n+2} \qquad .$$

4b a) Calcolare l'integrale indefinito

$$\int\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{3}e^x}{e^x}\,dx \quad .$$

b) Calcolare l'integrale definito

$$\int_{1-\log 2}^{1+\log 5}\frac{e^{|1-\sqrt{x}|}}{\sqrt{x}}\,dx \quad .$$

Corso di studio in **Fisica**
Compito di **Analisi matematica I**
assegnato il 18 ottobre 2006

1 Calcolare le radici quarte del numero complesso

$$\frac{3+i}{1-3i}$$

e scriverle in forma algebrica.

2 Studiare la monotonia della successione

$$\{a_n\} = \left\{\log_{3-\sqrt{5}}\left(2n+1-\sqrt{4n^2+1}\right)\right\} \quad .$$

Trovare il limite di $\{a_n\}$.

Determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore della successione $\{a_n\}$, precisando se si tratta, rispettivamente, di minimo e di massimo.

3 Studiare la funzione reale di variabile reale

$$f(x) = \log|x^2 - 10|$$

e disegnarne il grafico.

4a Stabilire il carattere delle seguenti serie numeriche:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{2n+3}}{(2n+1)!} \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n} - \frac{\sqrt{n+1}}{n^3}\right) \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \operatorname{sen}\frac{\pi}{n+2} \quad .$$

4b a) Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} \log^2(5-\sqrt{x})\, dx \quad .$$

b) Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^{\pi} |\cos x| e^{\left|\frac{1}{2} - \operatorname{sen} x\right|}\, dx \quad .$$

Corso di studio in **Fisica**
Compito di **Analisi matematica I**
assegnato l'11 dicembre 2006

1 Sono assegnate le successioni: $\{a_n\} = \left\{ \frac{n^2+5}{n^2-n+1} \right\}$, $\{b_n\} = \{\cos \pi a_n\}$.
Stabilire se la successione $\{a_n\}$ è monotòna, calcolarne il limite e trovarne l'estremo inferiore e l'estremo superiore, precisando se si tratta, rispettivamente, di minimo e di massimo.
Rispondere agli stessi quesiti per la successione $\{b_n\}$.

2 Risolvere nel campo complesso l'equazione

$$z^6 - 8i(1 + iz^3) \; = \; iz^3 \quad .$$

3 Studiare la funzione reale di variabile reale

$$f(x) = 3x \left(x - \frac{1}{2} \right) + \log 2 - \log |2 - 3x|$$

e disegnarne il grafico.

4a Stabilire il carattere delle seguenti serie numeriche:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{3n+2}}{(2n-1)!} \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{\sqrt{n+2}} \right) \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+3}}{\sqrt{n+3}} \quad .$$

4b a) Calcolare l'integrale indefinito

$$\int (\mathrm{e}^x - 1) \operatorname{arctg} \, (\mathrm{e}^x - x + \pi) \; dx \quad .$$

b) Calcolare l'integrale definito

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2 + 2|x| + 5} \quad .$$

Corso di studio in **Fisica**
Compito di **Analisi matematica I**
assegnato il 12 febbraio 2007

1 Calcolare le radici cubiche del numero complesso

$$\frac{(i-2)^4}{(1+2i)(1+i)^3}$$

e scriverle in forma algebrica.

2 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita nel modo seguente:

$$f(x) \;=\; \begin{cases} x^2 & \text{se } x \in \mathbb{Q}\,, \\ -x & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\,. \end{cases}$$

Dire, giustificando le risposte,
a) se esiste il $\lim_{x \to +\infty} f(x)$;
b) quali sono i punti $x_0 \in \mathbb{R}$ nei quali la funzione f è continua;
c) di che tipo sono i punti di discontinuità di f.

3 Studiare la funzione reale di variabile reale

$$f(x) = \frac{|x| + x}{2} - \mathrm{e}^{-x^3} + 1$$

e disegnarne il grafico.

4 Trovare tutti i valori di $x \in \mathbb{R}$ per i quali la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{x^{n+1}}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{3^{n+2}} \right]$$

è convergente.

5 Provare, senza calcolarne l'integrale, che la funzione

$$\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}(x+2\sqrt{x}+2)^3}$$

è integrabile nell'intervallo $[1, +\infty[$.
Calcolare quindi l'integrale improprio

$$\int_{[1,+\infty[} \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}(x+2\sqrt{x}+2)^3}\,\mathrm{d}x \qquad .$$

Corso di laurea di primo livello in **Fisica**
Compito di **Analisi Matematica I**
assegnato il 7 marzo 2007

1 Calcolare le radici quarte del numero complesso

$$\frac{2i}{(\sqrt{3}-i)^5}$$

e scriverle in forma algebrica.

2 Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la funzione definita nel modo seguente:

$$f(x) \;=\; \begin{cases} x^2 & \text{se } x\in\mathbb{Q}\,, \\ 2|x| & \text{se } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\,. \end{cases}$$

Dire, giustificando le risposte,
a) se esiste il limite $\lim_{x\to+\infty} f(x)$;
b) quali sono i punti $x_0\in\mathbb{R}$ nei quali la funzione f è continua;
c) di che tipo sono i punti di discontinuità di f.

3 Studiare la funzione reale di variabile reale

$$f(x) = x \operatorname{arctg} \sqrt{|x|}$$

e disegnarne il grafico.

4 Stabilire il carattere delle seguenti serie numeriche:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!}{5^{n^2+2}} \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right) \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+3}}{\log(n+3)} \quad .$$

5 Provare, senza calcolarne l'integrale, che la funzione

$$x\,\frac{x^2+1}{(x^4+2x^2+2)^3}$$

è integrabile nell'intervallo $[1,+\infty[$.
Calcolare quindi l'integrale improprio

$$\int_{[1,+\infty[} x\,\frac{x^2+1}{(x^4+2x^2+2)^3}\,\mathrm{d}x \quad .$$

Corso di laurea di primo livello in **Fisica**
Compito di **Analisi Matematica I**
assegnato il 4 maggio 2007

1 Risolvere nel campo complesso l'equazione
$$z^4\,\overline{z} \;=\; 16\sqrt{2}(i-1) \quad .$$

2 Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la funzione definita nel modo seguente:
$$f(x) \;=\; \begin{cases} \operatorname{arctg} x^2 & \text{se } x\in\mathbb{Q}\,, \\ \operatorname{arctg} x^3 & \text{se } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\,. \end{cases}$$
Dire, giustificando le risposte,
a) se esistono i limiti:
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) \quad ;$$
b) quali sono i punti $x_0\in\mathbb{R}$ nei quali la funzione f è continua;
c) quali sono i punti $x_0\in\mathbb{R}$ nei quali la funzione f è derivabile.

3 Studiare la funzione reale di variabile reale
$$f(x) = x\operatorname{arctg}|x|$$
e disegnarne il grafico.

4 Trovare tutti i numeri $x\in\mathbb{R}$ per i quali la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2^{n+1}}{n!+n} - \frac{x^n}{n^2+3}\right]$$
è convergente.

5 Provare, senza calcolarne l'integrale, che la funzione
$$\frac{1}{x^2}\cos^2\frac{1}{x}$$
è integrabile in $[\frac{1}{\pi},+\infty[$.
Calcolare quindi l'integrale improprio
$$\int_{[\frac{1}{\pi},+\infty[} \frac{1}{x^2}\cos^2\frac{1}{x}\;\mathrm{d}x \quad .$$

Corso di laurea di primo livello in **Fisica**
Compito di **Analisi matematica I**
assegnato il 20 febbraio 2008 (prova in itinere)

A

1 Trovare i domini delle seguenti funzioni reali di variabile reale:

$$f(x) = \log_5\left(\left(\tfrac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}+\operatorname{tg} x^2} - 1\right) \quad , \quad g(x) = \sqrt[4]{-x} + \log_5\left(\left(\tfrac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}+\operatorname{tg} x^2} - 1\right) \quad .$$

2 Calcolare le radici quarte del numero complesso

$$\frac{(\sqrt{3}-i)(1+i)^{24}}{8i}$$

e scriverle in forma algebrica.

3 Sono assegnate le successioni:

$$\{a_n\} = \left\{\frac{n^2+3n+4}{n^2+1}\right\} \quad , \quad \{b_n\} = \left\{\operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi}{6}\, a_n\right)\right\} \quad .$$

Studiare la monotonia della successione $\{a_n\}$ e trovarne il limite.
Trovare il limite di $\{b_n\}$.
Studiare la monotonia della successione $\{b_n\}$ e trovarne l'estremo inferiore e l'estremo superiore, precisando se si tratta, rispettivamente, di minimo e di massimo.

4 Calcolare i seguenti limiti, menzionando, di volta in volta, i teoremi che si applicano:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}\ \operatorname{tg}\tfrac{1}{3n+2}\right)^{\frac{2^n}{\sqrt{n+1}}} \quad , \quad \lim_{x\to 4}\left(\frac{4}{x}\right)^{\frac{1}{4-x}} \quad .$$

5 Sia $f :]-\infty, 0[\to \mathbb{R}$ una funzione continua e iniettiva, tale che:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad .$$

Provare che f è crescente in $]-\infty, 0[$.

Corso di laurea di primo livello in **Fisica**
Compito di **Analisi matematica I**
assegnato il 20 febbraio 2008 (prova in itinere)

B

1 Trovare i domini delle seguenti funzioni reali di variabile reale:

$$f(x) = \log_{\sqrt{3}} \left(\sqrt{3} + \operatorname{tg} 2^{x-1}\right) \quad , \quad g(x) = \log_{\sqrt{3}} \left(\sqrt{3} + \operatorname{tg} 2^{x-1}\right) + \sqrt{2 - \max\{x, 1-x\}} \ .$$

2 Risolvere nel campo complesso l'equazione

$$z^5 \overline{z} = -\frac{128}{1 + \sqrt{3}i} \quad .$$

3 Studiare la monotonia della successione

$$\{a_n\} = \left\{ \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{4n^2+n+3}-(2n+1)} \right\} \quad .$$

Trovare il limite di $\{a_n\}$.
Determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore della successione $\{a_n\}$, precisando se si tratta, rispettivamente, di minimo e di massimo.

4 Calcolare i seguenti limiti, menzionando, di volta in volta, i teoremi che si applicano:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2 + \cos\sqrt{n}}{n^2 - n + 1}\right)^{1+n\log 2} \qquad , \qquad \lim_{x\to 2\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{3^{x(2\pi - x)} - 1} \quad .$$

5 Provare che l'equazione (nell'incognita $x \in \mathbb{R}$)

$$x^4 \ = \ \operatorname{tg} x$$

ha infinite soluzioni e che l'insieme di tali soluzioni non è limitato né inferiormente né superiormente.

Corso di laurea di primo livello in **Fisica**
Compito di **Analisi matematica I**
assegnato il 20 febbraio 2008 (prova in itinere)

C

1 Trovare i domini delle seguenti funzioni reali di variabile reale:

$$f(x) = \sqrt[4]{1 - 4^{-1+\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,3^x}} \quad , \quad g(x) = \sqrt[4]{1 - 4^{-1+\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,3^x}} - \log_2\big(\log_3 x\big) \quad .$$

2 Risolvere nel campo complesso l'equazione

$$z^4\overline{z} = -\frac{32\sqrt{2}}{1+i} \quad .$$

3 Studiare la monotonia della successione

$$\{a_n\} = \left\{\log_3\left(\frac{41}{3} + \frac{4^{n+1}(n+3)}{(n+2)!}\right)\right\} \quad .$$

Trovare il limite di $\{a_n\}$.
Determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore della successione $\{a_n\}$, precisando se si tratta, rispettivamente, di minimo e di massimo.

4 Calcolare i seguenti limiti, menzionando, di volta in volta, i teoremi che si applicano:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^n + \sqrt{n} + 1}{2^n + 5}\right)^{1-n^2} \quad , \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{\log_{\sqrt{2}}(1 + 2^x + 5^x)}{\log_2(1 + 3^x + 7^x)} \quad .$$

5 Sia $f :]-\infty, 0] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e iniettiva, tale che:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad , \quad f(0) = 7 \quad .$$

Provare che l'insieme immagine $f(]-\infty, 0])$ è l'intervallo $]-\infty, 7]$.

Corso di laurea di primo livello in **Fisica**
Compito di **Analisi matematica I**
assegnato il 20 febbraio 2008 (prova in itinere)

D

1 Trovare i domini delle seguenti funzioni reali di variabile reale:

$$f(x) = \sqrt{5\cos 3^x - 2\big(\cos^2 3^x + 1\big)}\ ,\quad g(x) = \sqrt{5\cos 3^x - 2\big(\cos^2 3^x + 1\big)} + \log\big(1-\pi^x\big)\ .$$

2 Calcolare le radici cubiche del numero complesso

$$\frac{(1+2i)(1+i)^3}{(2-i)^7}$$

e scriverle in forma algebrica.

3 Sia $\{a_n\}$ la seguente successione:

$$a_0 = \sqrt{3}\,,\ a_1 = \sqrt{2+\sqrt{3}}\,,\ a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\,,\ a_3 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\,,\ \ldots\ .$$

a) Esprimere la legge di definizione di $\{a_n\}$ tramite il principio della definizione per induzione.
b) Provare che $\{a_n\}$ è monotona.
c) Trovare il limite di $\{a_n\}$.

4 Calcolare i seguenti limiti, menzionando, di volta in volta, i teoremi che si applicano:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)}{5^{2n-3}} \qquad , \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\log_2(1+\operatorname{sen}^2 2x)}{\left(1+\operatorname{tg}^2 x\right)^5 - 1}\ .$$

5 Provare che l'equazione (nell'incognita $x \in \mathbb{R}$)

$$2^x = \operatorname{sen} x$$

ha infinite soluzioni e che l'insieme di tali soluzioni è limitato superiormente ma non inferiormente.

Corso di laurea di primo livello in **Fisica**
Compito di **Analisi matematica I**
assegnato il 19 giugno 2008

A

A1 Calcolare le radici cubiche del numero complesso
$$\frac{(1+2i)(1+i)^9(2-11i)^3}{(2-i)^{10}}$$
e scriverle in forma algebrica.

A2 Sia $f:]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che:
$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$
e sia $A = \{x \in]0,+\infty[\, : f(x) = \sqrt{x}+2\}$.
Provare che l'insieme A

a) non è vuoto; b) è limitato; c) ha minimo e massimo.

B1 Studiare la funzione reale di variabile reale
$$f(x) = x + 1 + \sqrt{x^2+4x+3}$$
e disegnarne il grafico.

B2 Stabilire il carattere delle seguenti serie numeriche:
$$(1) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n^2+1}}{\log(n^2+1)} \qquad , \qquad (2) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\sqrt{4n+1}}{4^{2n-3}} - \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{n+2}} \right] \quad .$$

B3 Svolgere uno dei seguenti due esercizi:

a) calcolare l'integrale esteso
$$\int_{[-1, \frac{1}{\sqrt[5]{2}}]} \sqrt{\frac{x^8+x^{13}}{1-x^5}} \quad ;$$

b) dire, giustificando le risposte, quali delle seguenti funzioni sono integrabili in $[1,+\infty[$:
$$f(x) = \tfrac{1}{\sqrt{x}}\left(5+3\operatorname{sen}\sqrt{x}\right) \quad , \quad g(x) = \tfrac{1}{x\sqrt{x}}\left(3-5\operatorname{sen}^2\sqrt{x}\right) \quad , \quad h(x) = \tfrac{\operatorname{sen} x^3}{x} \quad .$$

Corso di laurea di primo livello in **Fisica**
Compito di **Analisi matematica I**
assegnato il 19 giugno 2008

B

A1 Sia $\{a_n\}$ la seguente successione:

$$a_0=\sqrt{2008}\,,\ a_1=\sqrt{10+\sqrt{2008}}\,,\ a_2=\sqrt{10+\sqrt{10+\sqrt{2008}}}\,,\ a_3=\sqrt{10+\sqrt{10+\sqrt{10+\sqrt{2008}}}}\,,\ \dots\ .$$

Esprimere la legge di definizione della successione $\{a_n\}$ tramite il principio della definizione per induzione. Provarne quindi la monotonia e trovarne il limite.

A2 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita nel modo seguente:

$$f(x) \ = \begin{cases} \cos x & \text{se } x \in \mathbb{Q}\,, \\ \operatorname{sen} x & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\,. \end{cases}$$

Dire, giustificando le risposte,
a) se esiste il $\lim_{x\to+\infty} f(x)$;
b) quali sono i punti $x_0 \in \mathbb{R}$ nei quali la funzione f è continua;
c) di che tipo sono i punti di discontinuità di f.

B1 Studiare la funzione reale di variabile reale

$$f(x) = (x+1)\log\frac{x-1}{x+1}$$

e disegnarne il grafico.

B2 Stabilire il carattere delle seguenti serie numeriche:

$$(1) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{n}}{n^2+1} \qquad , \qquad (2) \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left[\log\frac{n+2}{3n-1} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}}\right] \quad .$$

B3 Svolgere uno dei seguenti due esercizi:

a) Calcolare gli integrali estesi:

$$\int_{[0,\frac{\pi}{2}]} \frac{\operatorname{sen} x+2}{\cos x+2}\,\mathrm{d}x \qquad , \qquad \int_{[0,2\pi]} \frac{\operatorname{sen} x+2}{\cos x+2}\,\mathrm{d}x \qquad .$$

b) dire, giustificando le risposte, quali delle seguenti funzioni sono integrabili in $[1,+\infty[$:

$$f(x) = \frac{2-\cos x}{x+2} \quad , \quad g(x) = \frac{\cos x^2}{(x+2)\sqrt{x}} \quad , \quad h(x) = \frac{1}{x(1+\log^4 x)} \quad .$$

Corso di laurea di primo livello in **Fisica**
Compito di **Analisi matematica I**
assegnato il 17 luglio 2008

A1 Considerata la successione $\{a_n\} = \left\{\operatorname{arctg}\left(3 - \frac{(n+2)!}{(n+6)4^{n-2}}\right)\right\}$,
a) decidere se si tratta di una successione monotòna;
b) trovarne il limite;
c) trovarne l'estremo inferiore e l'estremo superiore, precisando se si tratta, rispettivamente, di minimo e di massimo.

A2 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita nel modo seguente:

$$f(x) \;=\; \begin{cases} x + \cos x & \text{se } x \in \mathbb{Q}\,, \\ x + \operatorname{sen} x & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\,. \end{cases}$$

Dire, giustificando le risposte,
a) se esiste il $\lim_{x\to+\infty} f(x)$;
b) se esiste il $\lim_{x\to 0} f(x)$;
c) se è vero che la restrizione di f ad un qualsiasi intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ è una funzione limitata;
d) se è vero che la restrizione di f all'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ ha minimo e massimo assoluti.

B1 Studiare la funzione reale di variabile reale

$$f(x) = \log\left(1 + \tfrac{1}{x}\right) - \tfrac{1}{x+1}$$

e disegnarne il grafico.

B2 Stabilire il carattere delle seguenti serie numeriche:

$$(1) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{(-1)^{3n+2}}{3n+2} \qquad , \qquad (2) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\sqrt{n!}}{5^{n^2}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{n\sqrt{n+2}}\right] \quad .$$

B3 a) Calcolare gli integrali estesi

$$\int_{[0,\frac{\pi}{2}]} \frac{\mathrm{d}x}{4-\cos^2 x} \qquad , \qquad \int_{[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}]} \frac{\mathrm{d}x}{4-\cos^2 x}$$

b) Dire, giustificando le risposte, quali delle seguenti funzioni sono integrabili in $[0, 1]$:

$$f(x) = \frac{2+\operatorname{sen}\frac{1}{x}}{x+x^2} \quad , \quad g(x) = \frac{2-\operatorname{sen}\frac{1}{x}}{\sqrt{x+x^2}} \quad .$$

Corso di laurea di primo livello in **Fisica**
Compito di **Analisi matematica I**
assegnato il 19 settembre 2008

A1 Considerata la successione $\{a_n\} = \left\{\log_{\frac{2}{5}}\left(\sqrt{n^2+3n+2} - n + 1\right)\right\}$,
a) decidere se si tratta di una successione monotòna;
b) trovarne il limite;
c) trovarne l'estremo inferiore e l'estremo superiore, precisando se si tratta, rispettivamente, di minimo e di massimo.

A2 Considerati gli insiemi $A = (]-\infty, 0] \cap \mathbb{Q}) \cup \mathbb{N}$ e $B = \mathbb{R} \setminus A$, sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita nel modo seguente:

$$f(x) \;=\; \begin{cases} \sqrt[3]{1+2x^2} & \text{se } x \in A\,, \\ \sqrt[3]{1+x^3} & \text{se } x \in B\,. \end{cases}$$

Dire, giustificando le risposte,
a) se esistono i limiti: $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)$;
b) quali sono i punti $x_0 \in \mathbb{R}$ nei quali la funzione f è continua;
c) di che tipo sono i punti di discontinuità di f.

B1 Studiare la funzione reale di variabile reale

$$f(x) = (x+1)\log\tfrac{1-x}{1+x} + 2x$$

e disegnarne il grafico.

B2 Stabilire il carattere delle seguenti serie numeriche:

$$(1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\tfrac{n}{n^2-7} \quad , \quad (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^{2n}\tfrac{2}{n!} + \tfrac{1}{\sqrt[3]{n}} - \tfrac{1}{\sqrt[3]{n+1}}\right] \;.$$

B3 a) Calcolare gli integrali estesi:

$$\int_{[0,\pi]} \tfrac{\mathrm{d}x}{2+\cos x} \quad , \quad \int_{[0,\frac{3\pi}{2}]} \tfrac{\mathrm{d}x}{2+\cos x} \quad .$$

b) Dire, giustificando le risposte, quali delle seguenti funzioni sono integrabili in $[1, +\infty[$:

$$f(x) = \tfrac{x+\operatorname{arctg} x^3}{x+x^3} \quad , \quad g(x) = \tfrac{x+\operatorname{arctg} x^2}{x+x^2} \quad .$$

Corso di laurea di primo livello in **Fisica**
Compito di **Analisi matematica I**
assegnato il 23 ottobre 2008

A1 Considerata la successione $\{a_n\} = \left\{ 2^{\frac{5^{n+2}(n+5)}{(n+1)!}} \right\}$,

a) decidere se si tratta di una successione monotòna;
b) trovarne il limite;
c) trovarne l'estremo inferiore e l'estremo superiore, precisando se si tratta, rispettivamente, di minimo e di massimo.

A2 Provare che l'equazione (nell'incognita $x \in \mathbb{R}$)

$$e^x = \operatorname{sen} x$$

ha infinite soluzioni e che l'insieme di tali soluzioni è limitato superiormente ma non inferiormente.

B1 Studiare la funzione reale di variabile reale

$$f(x) = \sqrt{3x(2-x)} + x - 1$$

e disegnarne il grafico.

B2 Stabilire il carattere delle seguenti serie numeriche:

$$(1) \ \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{n}{n\sqrt{n+1}+2} \quad , \quad (2) \ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos n\pi \right) \operatorname{sen} \frac{n}{n\sqrt{n+1}+2} \quad , \quad (3) \ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{3^{n^2}} - \frac{3^{n^2}}{(n+1)!} \right] \quad .$$

B3 a) Calcolare l'integrale esteso

$$\int_{[0,2\pi]} \frac{\operatorname{sen}^2 x \cos x}{(\operatorname{sen}^3 x - 2)(|\operatorname{sen}^3 x| + 5)} \quad .$$

b) Provare, senza calcolarne l'integrale, che la funzione

$$\frac{1}{\sqrt{e^x - 1}}$$

è integrabile in senso generalizzato nell'intervallo $[0, \log 2]$.
Calcolare quindi l'integrale

$$\int_{[0,\log 2]} \frac{1}{\sqrt{e^x - 1}} \, dx \quad .$$

Corso di laurea di primo livello in **Fisica**
Compito di **Analisi matematica I**
assegnato l'11 dicembre 2008

A1 Considerata la successione $\{a_n\} = \left\{\log_{\sqrt{2}}\left(\sqrt{n^2+3n+2}-n\right)\right\}$,
a) decidere se si tratta di una successione monotòna;
b) trovarne il limite;
c) trovarne l'estremo inferiore e l'estremo superiore, precisando se si tratta, rispettivamente, di minimo e di massimo.

A2 Provare che l'equazione (nell'incognita $x \in \mathbb{R}$)

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \operatorname{sen} x$$

ha infinite soluzioni e che l'insieme di tali soluzioni è limitato inferiormente ma non superiormente.

B1 Studiare la funzione reale di variabile reale

$$f(x) = 3 - x + \sqrt{x^2 - 8x + 15}$$

e disegnarne il grafico.

B2 Stabilire il carattere delle seguenti serie numeriche:

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n^2+1}}{\sqrt{n^2+1}} \quad , \quad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{3^{n^2}} - \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \frac{1}{\sqrt{n+3}}\right] \quad .$$

B3 a) Calcolare l'integrale esteso

$$\int_{[\frac{1}{\mathrm{e}},\mathrm{e}]} \frac{\log^2 x}{x\left(\log^3 x - 2\right)\left(\left|\log^3 x\right| + 5\right)}\,\mathrm{d}x \quad .$$

b) Dire, giustificando le risposte, quali delle seguenti funzioni sono integrabili in $[1, +\infty[$:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{arctg} x}} \quad , \quad g(x) = \frac{\cos x}{x} \quad .$$

Corso di laurea di primo livello in **Fisica**
Compito di **Analisi matematica I**
assegnato il 22 gennaio 2009

A1 Calcolare le radici quarte del numero complesso

$$-(1-i)^8$$

e scriverle in forma algebrica.

A2 Date due funzioni $f, g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, sia $h : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la funzione definita ponendo

$$h(x) = \max\{f(x), g(x)\} \qquad \forall x \in [0, +\infty[\quad .$$

Provare che condizione sufficiente affinché h sia convergente a 5 per $x \to +\infty$ è che entrambe le funzioni f e g siano convergenti a 5 per $x \to +\infty$.
Dire, giustificando la risposta, se la condizione è anche necessaria.

B1 Studiare la funzione reale di variabile reale

$$f(x) = \frac{1}{x} - \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

e disegnarne il grafico.

B2 Stabilire il carattere delle seguenti serie numeriche:

$$(1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{n+1}{2n+3}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right] \quad , \quad (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left[\operatorname{sen}\frac{1}{n^3} - \operatorname{sen}\frac{1}{\sqrt{n}}\right] \quad .$$

B3 Provare, senza calcolarne l'integrale, che la funzione

$$\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}(x+2\sqrt{x}+5)^3}$$

è integrabile nell'intervallo $[0, 1]$.
Calcolare quindi l'integrale generalizzato

$$\int_{[0,1]} \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}(x+2\sqrt{x}+2)^3}\, \mathrm{d}x \quad .$$

Corso di laurea di primo livello in **Fisica**
Compito di **Analisi matematica I**
assegnato il 26 febbraio 2009

A1 Calcolare le radici quarte del numero complesso

$$-\frac{1}{64}(1-i)^{16}$$

e scrverle in forma algebrica.

A2 Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\operatorname{sen}(2^x+5^x)}{\operatorname{sen}(3^x+7^x)} \qquad , \qquad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n^2+n+5}{3n^2+1}\right)^{\sqrt{n+\cos n^3}} \qquad .$$

B1 Studiare la funzione reale di variabile reale

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{3} - \frac{8}{3} + \log(3-x)$$

e disegnarne il grafico.

B2 Trovare tutti i valori di $x \in \mathbb{R}$ per i quali la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{x^{n^2}}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{7^{n+3}}\right]$$

è convergente.

B3 Provare, senza calcolarne l'integrale, che la funzione

$$\frac{1}{x^2}\cos^3\frac{1}{x}$$

è integrabile in $[\frac{2}{\pi}, +\infty[$.
Calcolare quindi l'integrale improprio

$$\int_{[\frac{2}{\pi},+\infty[} \frac{1}{x^2}\cos^3\frac{1}{x}\, \mathrm{d}x \qquad .$$

Corso di laurea di primo livello in **Fisica**
Compito di **Analisi matematica I**
assegnato il 23 aprile 2009

A1 Calcolare le radici cubiche del numero complesso

$$\frac{(2-i)^4}{(1+2i)(1+i)^3}$$

e scriverle in forma algebrica.

A2 Sia $\{a_n\}$ la seguente successione:

$$a_0{=}2\,,\ a_1{=}\sqrt{4{+}\sqrt{2}}\,,\ a_2{=}\sqrt{4{+}\sqrt{2}{+}\sqrt[4]{4{+}\sqrt{2}}}\,,\ a_3{=}\sqrt{4{+}\sqrt{2}{+}\sqrt[4]{4{+}\sqrt{2}}{+}\sqrt[4]{4{+}\sqrt{2}{+}\sqrt[4]{4{+}\sqrt{2}}}}\,,\ \ldots\ .$$

Esprimere la legge di definizione della successione $\{a_n\}$ tramite il principio della definizione per induzione. Provarne quindi la monotonia e trovarne il limite.

B1 Studiare la funzione reale di variabile reale

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1}$$

e disegnarne il grafico.

B2 Trovare tutti i valori di $x \in \mathbb{R}$ per i quali la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big[\frac{x^{n^3}}{\sqrt{n^2+1}} - \frac{2}{n!+3} \Big]$$

è convergente.

B3 Provare, senza calcolarne l'integrale, che la funzione

$$\tfrac{1}{x^2}\,\left(\cos^3 \tfrac{1}{x} + \operatorname{sen} \tfrac{1}{x}\right)$$

è integrabile in $[\frac{2}{\pi}, +\infty[$.
Calcolare quindi l'integrale improprio

$$\int_{[\frac{2}{\pi},+\infty[} \tfrac{1}{x^2}\,\left(\cos^3 \tfrac{1}{x} + \operatorname{sen} \tfrac{1}{x}\right)\ \mathrm{d}x \quad .$$

Corso di laurea di primo livello in **Fisica**
Compito di **Analisi Matematica I**
assegnato il 22 febbraio 2010 (prova in itinere)

1 Trovare i domini delle seguenti funzioni reali di variabile reale:

$$f(x) = \log_{1+\sqrt{3}} \left(1 - \left(\tfrac{1}{3}\right)^{2\cos x - \sqrt{3}} \right) \quad , \quad g(x) = f(x) - \sqrt[4]{\min\{2\pi - x, x + 2\}} \ .$$

2 Calcolare le radici quarte del numero complesso

$$\frac{\sqrt{2} - i}{\sqrt{2} + i}$$

e scriverle in forma algebrica.

3 Sono assegnate le successioni:

$$\{a_n\} = \left\{ \sqrt{n+1} - n^2 \right\} \quad , \quad \{b_n\} = \left\{ (-1)^n \left(\lambda^2 + \frac{1}{4} \right)^{a_n} \right\} \ .$$

Studiare la monotonia della successione $\{a_n\}$ e trovarne il limite.
Trovare tutti i valori del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$ per i quali la successione $\{b_n\}$ è regolare.
Trovare, al variare di λ, l'estremo inferiore e l'estremo superiore della successione $\{b_n\}$, precisando se si tratta, rispettivamente, di minimo e di massimo.

4 Calcolare i seguenti limiti, menzionando, di volta in volta, i teoremi che si applicano:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \log(1 + \operatorname{tg} 8x)}{6^{x^2} - 1} \quad , \quad \lim_{n \to \infty} \frac{(n!)^3}{\mathrm{e}^{\,n} n^{3n}} \ .$$

5 Data la funzione reale di variabile reale

$$f(x) = \log_{-\frac{x}{2x+1}} 2 \ ,$$

a) trovarne il dominio e studiarne il segno;
b) trovarne i punti di discontinuità, precisandone la natura;
c) trovare l'insieme immagine $f\left(\left]-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right[\right)$;
d) trovare l'insieme immagine $f\left(\left]-\frac{1}{2}, -\frac{2}{5}\right] \right)$.

Corso di laurea di primo livello in **Fisica**
Compito di **Analisi Matematica I**
assegnato il 28 giugno 2010

1 Data la successione di numeri complessi

$$z_n = \sqrt{n\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\alpha} - n} \; + \; i\,\frac{3\alpha n^2 + n}{2n^2+1} \quad ,$$

determinare il valore del parametro $\alpha > 0$ tale che $\{z_n\}$ converga ad un numero complesso ℓ di modulo 1.

2 Determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore del seguente insieme numerico

$$X = \left\{(-1)^n k^{\frac{k^2n^2+(-1)^n 2kn+1}{(-1)^n kn+1}} \quad : n \in \mathbb{N}\right\}$$

al variare del parametro $k > 0$.

3 Data la funzione

$$f(x) = \mathrm{e}^{\frac{|x|-6}{x+2}} - 1 \ ,$$

a) determinare l'insieme di definizione di f e trovare gli eventuali punti in cui f non è derivabile;
b) dimostrare che la funzione g, restrizione di f all'intervallo $]6, +\infty[$, è invertibile, determinare l'insieme di definizione della funzione inversa g^{-1} e, senza fare uso dell'espressione analitica di g^{-1}, calcolare $(g^{-1})'(\sqrt{\mathrm{e}} - 1)$;
c) studiare la convessità di f nell'intervallo $]0, +\infty[$.

4 Dire, giustificando la risposta, quali dei seguenti limiti di funzioni di due variabili esistono

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\arctan(x^2+y^2)} \ , \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{\log\left[x^2+y^2+1\right]} \ , \quad \lim_{(x,y)\to\infty} |y - x^3|(x - y^3) \ .$$

5 Data la funzione

$$\varphi(x) = \log\left(2 + |x-1|\right) + \mathrm{e}^{|x|} \ ,$$

a) trovare le primitive di φ nell'intervallo $]-\infty, 0[$;
b) trovare una funzione f, primitiva di φ nell'intervallo $]-\infty, +\infty[$ e tale che $f(0) = 0$.

Corso di laurea di primo livello in **Fisica**
Compito di **Analisi Matematica I**
assegnato il 19 luglio 2010

1 Data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ data dalla legge

$$f(x) = \tfrac{x-i}{x+i} \ ,$$

a) provare che f è iniettiva;
b) provare che per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha $|f(x)| = 1$ e $|f(x)| \neq 1$;
c) dedurre da quanto provato in b) che le due successioni $\left\{ \frac{(f(x))^n}{n+1} \right\}$ e $\{(f(x))^n\}$ sono, rispettivamente, convergente e oscillante.

2 Siano date una funzione continua $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e una successione crescente $\{\alpha_n\} \subseteq [a,b]$. Dimostrare che la successione

$$y_n = \int_a^{\alpha_n} f(x)\ dx$$

è convergente.

3 Data la funzione reale di variabile reale

$$f(x) = \left(\tfrac{x}{|x+1|} - 1 \right)\ \mathrm{e}^{\frac{2}{x+|x|}} \ ,$$

a) trovarne il dominio X;
b) provare che la funzione f è iniettiva e trovare il dominio Y della funzione inversa f^{-1};
c) calcolare la derivata di f^{-1} nel punto $y_0 = -\frac{1}{3}\sqrt{\mathrm{e}}$;
d) provare che f è strettamente concava nell'insieme X (può essere utile a tal fine – ma non è indispensabile – esprimere la derivata prima di f nella forma $f'(x) = -f(x)h(x)$);
e) trovare due intervalli aperti $I, J \subseteq X$ tali che le due restrizioni $f|_I$ e $f|_J$ siano una uniformemente continua e l'altra no.

4 Studiare, al variare del parametro $k \in]-\infty, +\infty[$, il carattere della seguente serie numerica

$$\textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + n^k \sin \frac{1}{n}\right) \ .$$

5 Si consideri la successione di funzioni definite nell'intervallo $[0,1]$ mediante la legge

$$f_n(x) = \begin{cases} 3n^2 x & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{1}{3n} \\ n & \text{se } \frac{1}{2n} \leq x \leq \frac{1}{3n} \\ -2n^2 x + 2n & \text{se } \frac{1}{2n} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{se } \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Dopo avere disegnato il grafico della generica funzione f_n ($n \geq 2$), rispondere, giustificando le risposte date, alle seguenti domande:
a) la successione $\{f_n\}$ converge puntualmente in $[0,1]$?
b) per la successione $\{f_n\}$ è verificato, nell'intervallo $[0,1]$, il passaggio al limite sotto il segno di integrale?
c) la successione $\{f_n\}$ converge uniformemente in $[0,1]$?

Corso di laurea di primo livello in **Fisica**
Compito di **Analisi Matematica I**
assegnato il 19 luglio 2010

1 Data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ data dalla legge

$$f(x) = \frac{x-i}{x+i} \ ,$$

a) provare che f è iniettiva;
b) provare che per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha $|f(x)| = 1$ e $|f(x)| \neq 1$;
c) dedurre da quanto provato in b) che le due successioni $\left\{ \frac{(f(x))^n}{n+1} \right\}$ e $\{(f(x))^n\}$ sono, rispettivamente, convergente e oscillante.

2 Siano date una funzione continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e una successione crescente $\{\alpha_n\} \subseteq [a, b]$. Dimostrare che la successione

$$y_n = \int_a^{\alpha_n} \ f(x) \ dx$$

è convergente.

3 Data la funzione reale di variabile reale

$$f(x) = \left(\frac{x}{|x+1|} - 1 \right) \ \mathrm{e}^{\frac{2}{x+|x|}} \ ,$$

a) trovarne il dominio X;
b) provare che la funzione f è iniettiva e trovare il dominio Y della funzione inversa f^{-1};
c) calcolare la derivata di f^{-1} nel punto $y_0 = -\frac{1}{3}\sqrt{\mathrm{e}}$;
d) provare che f è strettamente concava nell'insieme X (può essere utile a tal fine – ma non è indispensabile – esprimere la derivata prima di f nella forma $f'(x) = -f(x)h(x)$);
e) trovare due intervalli aperti $I, J \subseteq X$ tali che le due restrizioni $f|_I$ e $f|_J$ siano una uniformemente continua e l'altra no.

4 Studiare, al variare del parametro $k \in]-\infty, +\infty[$, il carattere della seguente serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log \left(1 + n^k \sin \frac{1}{n}\right) \ .$$

5 Si consideri la successione di funzioni definite nell'intervallo $[0, 1]$ mediante la legge

$$f_n(x) = \begin{cases} 3n^2 x & \text{se } 0 \le x \le \frac{1}{3n} \ , \\ n & \text{se } \frac{1}{3n} \le x \le \frac{1}{3n} \ , \\ -2n^2 x + 2n & \text{se } \frac{1}{2n} \le x \le \frac{1}{n} \ , \\ 0 & \text{se } \frac{1}{n} \le x \le 1 \ . \end{cases}$$

Dopo avere disegnato il grafico della generica funzione f_n $(n \geq 2)$, rispondere, giustificando le risposte date, alle seguenti domande:
a) la successione $\{f_n\}$ converge puntualmente in $[0, 1]$?
b) per la successione $\{f_n\}$ verificato, nell'intervallo $[0, 1]$, il passaggio al limite sotto il segno di integrale?
c) la successione $\{f_n\}$ converge uniformemente in $[0, 1]$?

Corso di laurea di primo livello in **Fisica**
Compito di **Analisi Matematica I**
assegnato il 6 settembre 2010

1 Scrivere in forma algebrica i seguenti numeri complessi:

$$z_1 = \frac{(1-3i)^2}{i-2} \; ; \quad z_2 = \left(\cos\frac{\pi}{9} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{9}\right)^3 \; ; \quad z_2 = \left(\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{9} + i\cos\frac{\pi}{9}\right)^6 \; .$$

2 Determinare, al variare del parametro $k > 0$, l'estremo inferiore e l'estremo superiore del seguente insieme numerico

$$X = \left\{ \left(k^{3\log\frac{1}{k}}\right)^n \; : \; n \in \mathbb{N} \right\} \; .$$

3 Studiare la funzione definita dalla legge

$$f(x) = \frac{|x^2 + 4x - 77|}{x+1}$$

e trovare due intervalli aperti I, J contenuti nell'insieme di definizione di f tali che le due restrizioni $f|_I$ e $f|_J$ siano una uniformemente continua e l'altra no.

4 Calcolare il valore di

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \cos x^3 \,\mathrm{d}x$$

con un errore minore di $\frac{1}{10^4}$.

5 Indicato con X l'insieme di definizione della funzione

$$\varphi(x) = \mathrm{arctg}\,\frac{1}{\sqrt{x-1}} \; ,$$

calcolare l'area del rettangoloide relativo all'intervallo $[0,2]$ e alla funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi x}{x+4-3x^2} & \text{se } x \in (\mathbb{R} \setminus X) \cap [0,2] \, , \\ \varphi(x) & \text{se } x \in X \cap [0,2] \, . \end{cases}$$

Corso di laurea di primo livello in **Fisica**
Compito di **Analisi Matematica I**
assegnato il 27 settembre 2010

1 Sia f la funzione reale di variabile reale definita dalla legge

$$f(x) = x - \log(\mathrm{e}^x - 1) \quad .$$

a) Trovare l'insieme di definizione di f.
b) Provare che la funzione f è strettamente monotona e trovarne l'insieme immagine.
c) Dimostrare che la funzione inversa di f è la stessa f.
(Suggerimento: è utile esprimere la legge di definizione di f nella forma $f(x) = \log g(x)$.)

2 Sono assegnate le successioni: $\{a_n\} = \left\{\sqrt{n+3} - \sqrt{n} - 1\right\}$, $\{b_n\} = \left\{a_n^2\right\}$.
Stabilire se la successione $\{a_n\}$ è monotòna, calcolarne il limite e trovarne l'estremo inferiore e l'estremo superiore, precisando se si tratta, rispettivamente, di minimo e di massimo.
Rispondere agli stessi quesiti per la successione $\{b_n\}$.

3 Data la funzione reale di variabile reale

$$f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}^x - 1}} \quad ,$$

a) trovarne l'insieme di definizione e gli asintoti;
b) studiarne la monotonia;
c) studiare la derivabilità nel punto $x_0 = 0$ della funzione g, prolungamento continuo all'intervallo chiuso $]-\infty, 0]$ della restrizione di f a $]-\infty, 0[$.

4 a) Trovare l'ordine di infinitesimo per $x \to 0$ della funzione $\operatorname{sen} x - x$ rispetto alla funzione x.
b) Provare che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\operatorname{sen}\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right]$ converge.
c) Provare che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\operatorname{sen}\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2010}\right]$ converge assolutamente.

5 a) Verificare che la funzione $\frac{1}{x} - \frac{1}{\mathrm{e}^x - 1}$ è convergente per $x \to 0$.
b) Calcolare l'integrale

$$\int_{[0,\log 2]} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\mathrm{e}^x - 1}\right) \, \mathrm{d}x \quad .$$

c) Dimostrare che $p = 1$ è l'unico valore dell'esponente $p > 0$ per il quale l'integrale

$$\int_{[0,\log 2]} \left(\frac{1}{x^p} - \frac{1}{\mathrm{e}^x - 1}\right) \, \mathrm{d}x$$

esiste finito.

Corso di laurea di primo livello in **Fisica**
Compito di **Analisi Matematica I**
assegnato il 6 dicembre 2010

1 Trovare il derivato di ognuno dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{ (-1)^{n^2} \left(\tfrac{n^2+1}{n^2}\right)^{n^2} \ : \ n \in \mathbb{N} \right\} \quad , \quad B = \mathbb{R} \setminus A \quad , \quad C = \{2^q \ : \ q \in \mathbb{Q} \cap]-\infty, 0]\} \quad .$$

2 Decidere quali delle seguenti funzioni sono uniformemente continue negli intervalli a fianco indicati:

$$\text{a) } f(x) = \operatorname{sen} x^2 \ \text{ in } \ [0, \sqrt{\pi}[\ ; \ \text{ b) } g(x) = \operatorname{sen} \tfrac{1}{\pi - x^2} \ \text{ in } \ [0, \sqrt{\pi}[\ ;$$
$$\text{c) } h(x) = |3x-1| + |x| \ \text{ in } \ \mathbb{R} \ ; \ \text{ d) } k(x) = \log(\log x + 1) \ \text{ in } \ [1, +\infty[\ .$$

Giustificare le risposte fornite.

3 Trovare, al variare del parametro $c \in [0, +\infty[$, gli intervalli $I \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$ nei quali la funzione reale di variabile reale

$$f_c(x) = \tfrac{c}{x} - \operatorname{arctg} \tfrac{1}{x}$$

è decrescente.
Trovare inoltre tutti i valori di $c \in [0, +\infty[$ per i quali il grafico della f_c ha punti di flesso.

4 Studiare il carattere delle seguenti serie numeriche:

$$\text{a) } 1 + \tfrac{1}{2011} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2012} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{2013} + \dots \quad , \quad \text{b) } \left(1 - \tfrac{1}{2011}\right) + \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2012}\right) + \left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2013}\right) + \dots \quad .$$

5 a) Determinare l'integrale indefinito

$$\int (\mathrm{e}^x - 2x) \operatorname{arcsen}\left(x^2 + 1 - \mathrm{e}^x\right) \, dx \quad .$$

b) Calcolare l'integrale definito

$$\int_{-\pi}^{0} \frac{\operatorname{sen} x \cos^2 x}{(\cos^3 x - 2)(|\cos^3 x| + 5)} \quad .$$

Corso di laurea di primo livello in **Fisica**
Compito di **Analisi Matematica I**
assegnato il 31 gennaio 2011

1 Trovare tutte le coppie ordinate (z, w) di numeri complessi, ciascuno dei quali sia uguale al quadrato del prodotto dell'altro per l'unità immaginaria. Scrivere i risultati in forma algebrica.

2 Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{\sqrt{(n+1)! - n}} \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{2^{x^2} + x^5 + \operatorname{sen} 5x}{5^x + x^2 + \cos 2x} \quad .$$

3 a) Studiare la funzione reale di variabile reale

$$f(x) = x - \log x$$

e disegnarne il grafico.
b) Calcolare la derivata seconda della funzione $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ e verificare, senza usare la calcolatrice, che la funzione g è strettamente concava nel punto $\frac{1}{4}$.
c) Provare che il grafico della restrizione di g all'intervallo $[1, 2]$ ha un unico punto di flesso.

4 Provare, senza calcolarne l'integrale, che la funzione

$$\frac{(2 - \cos x) \log(2x - \operatorname{sen} x)}{(2x - \operatorname{sen} x)^3}$$

è integrabile nell'intervallo $[\pi, +\infty[$.
Calcolare quindi l'integrale improprio

$$\int_{[\pi,+\infty[} \frac{(2 - \cos x) \log(2x - \operatorname{sen} x)}{(2x - \operatorname{sen} x)^3} \, \mathrm{d}x \quad .$$

5 Provare che la successione di funzioni

$$\left\{ \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x+n}}{n+3} \right\} \tag{1}$$

converge puntualmente, ma non uniformemente, in $[0, +\infty[$.
Dimostrare che gli intervalli $I \subseteq [0, +\infty[$ nei quali la (1) converge uniformemente sono tutti e soli quelli limitati.

Corso di laurea di primo livello in **Fisica**
Compito di **Analisi Matematica I**
assegnato il 2 marzo 2011

1 Determinare i numeri complessi z tali che

$$|z| + iRe\, z = i\overline{z} - z$$

e poi trovare le loro radici quadrate.

2 Determinare, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, gli estremi dell'insieme numerico

$$X = \left\{ (k^2 - 2k - 3)\, \mathrm{arctg}\, (\sqrt{n^2 + n} - n) \;:\; n \in \mathbb{N} \right\} .$$

3 Studiare la funzione definita dalla legge

$$f(x) = \frac{\log(1-x)}{x-1} .$$

Stabilire, inoltre, se f è uniformemente continua in ciascuno degli intervalli $]-1,0[$, $[0,1[$.

4 Stabilire il carattere delle seguenti serie numeriche:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{tg}\left(\tfrac{1}{n+3} - \tfrac{1}{n+4}\right) \quad , \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{n^2 2^n}{3^n + n} \quad , \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos\left(\tfrac{1}{3^n} + \tfrac{1}{n^3}\right)\right) \quad .$$

5 Data la funzione reale di due variabili reali definita dalla legge

$$f(x,x) = xy^2 \log(x^2 + y^2)$$

determinare l'inseme di definizione di f e dimostrare che f è prolungabile per continuità a tutto $\mathbb{R}^2$.

6 Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y''' - 2y'' + y' - 2y = 10\, \mathrm{e}^x .$$

Corso di laurea di primo livello in **Fisica**
Compito di **Analisi Matematica I**
assegnato il 16 maggio 2011

1 Calcolare le radici quarte del numero complesso

$$\frac{\sqrt{3}-i}{2i(1+i)^8}$$

e scriverle in forma algebrica.

2 Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^n+n+1}{2^n+1}\right)^{\sqrt{n+\cos n}} \quad , \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{5^{\sqrt{2x+1}}}{2^{2x-5}-1} \quad .$$

3 Data la funzione reale di variabile reale

$$f(x)=\mathrm{e}^{x-\operatorname{arctg} x} \ ,$$

a) trovare gli asintoti per il grafico di f;
b) provare che f è iniettiva e calcolare la derivata della funzione inversa di f nel punto $y_0=\sqrt[4]{\mathrm{e}^{4-\pi}}$;
c) trovare i punti di flesso per f.

4 Stabilire il carattere delle seguenti serie numeriche:

$$(1) \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\tfrac{1-2n}{n^2} \qquad , \qquad (2) \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left[\operatorname{sen}\tfrac{(2n-1)\pi}{n^2} - \operatorname{sen}\tfrac{(2n+1)\pi}{(n+1)^2}\right] \quad .$$

5 Provare, senza calcolarne l'integrale, che la funzione $\frac{1}{x^3}\operatorname{sen}\frac{1}{x}$ è integrabile nell'intervallo $[\frac{1}{2\pi},+\infty[$.
Calcolare quindi l'integrale improprio

$$\int_{[\frac{1}{2\pi},+\infty[}\frac{1}{x^3}\operatorname{sen}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \quad .$$

Corso di Laurea in **Fisica**
Compito di **Analisi Matematica I (A-L)**
assegnato il 14 febbraio 2012 (prova in itinere)

1 Determinare il dominio di definizione delle seguenti funzioni reali di variabile reale:

$$f(x) = \sqrt{3 - \frac{\log(x^2 + x - 6)}{\log(x - 2)}} \qquad ; \qquad g(x) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{x^2 - 5x + 1}{x^2 + 1}\right)^n \quad .$$

2 Determinare tutte le radici complesse dell'equazione:

$$3iz^5 - 3iz^4 + (3\sqrt{2} + 6i)z - 6i - 3\sqrt{2} = 0$$

sapendo che una radice è $z = 1$.

3 Studiare, al variare di $\lambda > 0$, la monotonia della successione:

$$\{a_n\} = \left\{\lambda^{\sqrt{9n^2+1}-3n+1},\ n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Trovare il limite di $\{a_n\}$.

Determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore della successione $\{a_n\}$, precisando se si tratta, rispettivamente, di minimo e di massimo.

4 Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log\left(1 + \operatorname{sen}\left(2^{-n^2}\right)\operatorname{sen}\left(n^2\right)\right)}{n\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2^{-n^2}} - (2)^{2^{-n^2}}\right)} \qquad ; \qquad \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{\sqrt{x^2-3x}-\sqrt{x^2+1}} \quad .$$

Corso di laurea di primo livello in **Fisica**
Compito di **Analisi Matematica I (A-L)**
assegnato il 25 giugno 2012

1 Risolvere nel campo complesso l'equazione nell'incognita z:

$$z^5 + iz^4 + \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) z + \tfrac{\sqrt{3}}{2} + \tfrac{1}{2}i = 0 \quad .$$

2 Trovare l'estremo inferiore e l'estremo superiore dei seguenti insiemi numerici, precisando se l'estremo inferiore è anche minimo e l'estremo superiore anche massimo:

$$A = \left\{ \left(\tfrac{n+1}{n}\right)^{-\frac{n}{3}} \,:\, n \in \mathbb{N}^+ \right\} \quad , \quad B = \left\{ \operatorname{arctg} \tfrac{1}{2n-13} \,:\, n \in \mathbb{N}^+ \right\} \quad ,$$

$$C = \{a + b \,:\, a \in A\,,\, b \in B\} \quad .$$

Giustificare le risposte date.

3 Studiare la funzione reale di variabile reale

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1 - \mathrm{e}^{\,x}}{\mathrm{e}^{\,x}}$$

e disegnarne il grafico.

4 Dire, giustificando la risposta, quali delle seguenti serie numeriche sono convergenti, precisando se la convergenza è anche assoluta:

$$(1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \tfrac{1}{\sqrt{n+2}} \quad , \quad (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{tg} \tfrac{1}{\sqrt{n+2}} \quad , \quad (3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left[\operatorname{tg} \tfrac{1}{\sqrt{n+1}} - \operatorname{tg} \tfrac{1}{\sqrt{n+2}} \right] \quad .$$

5 Provare, senza calcolarne l'integrale, che la funzione $\frac{2x+1}{x^3+3x^2+4x+2}$ è integrabile nell'intervallo $[0, +\infty[$.
Calcolare quindi l'integrale improprio

$$\int_{[0,+\infty[} \frac{2x+1}{x^3 + 3x^2 + 4x + 2}\, \mathrm{d}x \quad .$$