UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA	COGNOME e NOME:	
Facoltà di Ingegneria	FIRMA:	
docenti: A.O.Caruso – A.Villani	MATRICOLA:	
C.D.L. IN INGEGNERIA INDUSTRIALE (A-SALA)	REGOLARITÀ STUDI:	☐ In Regola ☐ Ripetente ☐ Fuori Corso
Anno Accademico 2011/2012	PROGRAMMA DEL PROF.:	
PROVA D'ESAME DI ANALISI MATEMATICA I DEL .../.../2012	CORSO SEGUITO NELL'A.A.:	

Non sono consentiti formulari, appunti, libri e calcolatori; non è consentito comunicare con i colleghi; ogni mezzo di comunicazione elettronico deve essere tenuto spento; su richiesta saranno dati chiarimenti solamente sull'interpretazione del testo; tempo disponibile: due ore e mezza (2,5 ore); verrà escluso dalla prova lo studente che, ad una verifica, fosse sprovvisto di un documento di riconoscimento. Durante la prova non è possibile uscire dall'aula, a meno che si decida di ritirarsi, o si abbia una effettiva necessità (ed in tal caso, uscendo uno per volta, è necessario lasciare gli oggetti personali e l'elaborato sulla cattedra prima di uscire dall'aula). Per svolgere i calcoli è possibile utilizzare i fogli a quadri di cui si ha bisogno, e che è possibile prendere dalla cattedra; **vanno però consegnati al massimo due fogli a quadri in bella copia, in entrambi i quali devono essere apposti nome e cognome sia a stampatello che in firma autografa**: questi saranno gli unici fogli ad essere corretti; si ricorda poi che è possibile utilizzare solamente penne con inchiostro indelebile; il non attenersi alle suddette regole può comportare l'annullamento della prova d'esame; verranno in ogni caso considerati nulli gli elaborati privi dei dati sufficienti a riconoscere il candidato. **Il presente foglio deve comunque essere riconsegnato debitamente compilato, anche nel caso in cui si decida di ritirarsi, al fine di consentire il riconoscimento dello studente ritirato.** Per superare la prova occorre svolgere correttamente il numero minimo di risposte nel seguito indicate; in caso di esito positivo, lo studente potrà aver registrato l'esame con un votazione massima 30/30; lo studente che abbia conseguito una votazione non inferiore a 26/30 potrà, a richiesta, proseguire l'esame con un colloquio orale tramite il quale il voto finale potrà essere rimodulato nell'intero intervallo 18/30 $\rightarrow$ 30/30 e lode.

Quesiti (svolgere almeno quattro quesiti; voto min. 21/30 - voto max. 27/30; pt. -1 per due quesiti errati)

1) L'insieme $X = \{0\} \cup \left\{ \frac{(-1)^n}{n}, n = 1, 2, 3, \dots \right\}$

- (a) ha massimo ma non ha minimo;
- (b) è chiuso e limitato;
- (c) è aperto e non limitato;
- (d) nessuna delle precedenti risposte.

2) La funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{se } x \geq 0 \\ x^2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

appartiene all'insieme

- (a) $C^0(\mathbb{R}) \setminus C^1(\mathbb{R})$;
- (b) $C^1(\mathbb{R}) \setminus C^2(\mathbb{R})$;
- (c) $C^2(\mathbb{R}) \setminus C^3(\mathbb{R})$;
- (d) $C^3(\mathbb{R}) \setminus C^0(\mathbb{R})$.

3) Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione a termini reali positivi. La condizione $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(1 + a_n) = 0$ è

- (a) non necessaria ed insufficiente;
- (b) non necessaria ma sufficiente;
- (c) necessaria e sufficiente;
- (d) necessaria ma non sufficiente;

perchè la serie di termine generale a_n converga.

4) Poniamo $f(x) = \arctan\left(\frac{1}{|x|}\right)$, per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Allora,

- (a) f è pari e non limitata, e la sua restrizione all'intervallo $] - \infty, 0[$ è crescente;
- (b) f è dispari e limitata, e la sua restrizione all'intervallo $]0, +\infty[$ è crescente;
- (c) f è pari e limitata, e la sua restrizione all'intervallo $] - \infty, 0[$ è crescente;
- (d) f è dispari e limitata, e la sua restrizione all'intervallo $]0, +\infty[$ è decrescente.

5) Siano f e g due funzioni definite su tutto $\mathbb{R}$ ed a valori reali. Si consideri la proposizione $\mathcal{P}$ seguente:

$$" \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : x \in \mathbb{R}, |x| > \delta \implies |f(x) - g(x)| < \varepsilon "$$

Allora, la negazione di $\mathcal{P}$

- (a) è " $\exists \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : x \in \mathbb{R}, |x| > \delta \implies |f(x) - g(x)| < \varepsilon$ ";
- (b) è " $\exists \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : x \in \mathbb{R}, |x| \leq \delta \iff |f(x) - g(x)| \geq \varepsilon$ ";
- (c) è " $\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0, \exists x \in \mathbb{R}, |x| > \delta \implies |f(x) - g(x)| \geq \varepsilon$ ";
- (d) non si può formulare con simboli matematicamente noti.

-
- 6) La restrizione della funzione $f(x) = [x] - x$ all'intervallo $[-1, 1]$
- (a) è non positiva, discontinua, non limitata ed integrabile secondo Riemann;
 - (b) è non negativa, continua, non limitata e non integrabile secondo Riemann;
 - (c) è non positiva, discontinua, limitata ed integrabile secondo Riemann;
 - (d) è non negativa, continua, non limitata e non integrabile secondo Riemann.

Esercizi (*svolgere almeno un esercizio; voto min. 21/30 - voto max. 27/30*)

- 1) Studiare il

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\cos \frac{1}{n^\alpha} \right)^n$$

al variare del parametro reale positivo α .

- 2) Calcolare

$$\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2} dx$$

dopo averne verificato l'integrabilità della funzione integranda nell'intervallo d'integrazione assegnato.

- 3) Studiare la funzione f definita dalla posizione

$$f(x) = x \arctan \left(\frac{1}{x} \right)$$

e tracciarne un grafico qualitativo.

Definizioni (*dare almeno una definizione; pt. -1 per ogni definizione mancante o errata*)

- 1) Definizione di funzione iniettiva e di funzione suriettiva: esibire qualche esempio e qualche controesempio.
-
- 2) Definizione di serie numerica regolare.
-
- 3) Definizione di funzione integrabile secondo Riemann.
-

Teoremi (*dimostrare almeno un teorema; pt. +1 (risp. +3) per due (risp. tre) dimostrazioni corrette*)

- 1) Teorema di Bolzano–Weierstraß.
-
- 2) Teorema “ponte” di passaggio tra limiti di funzioni e limiti di successioni.
-
- 3) Teorema di Fermat.